LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

EXERCICES

PSI

Énoncés

Solutions

Commentaires

J. BERGUA • J.-L. BAUDY

Tout le nouveau programme

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

PHYSIQUE

PSI

J. BERGUA • J.-L. BAUDY

Professeurs en classes préparatoires scientifiques

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

Bréal éditions

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Titres disponibles dans la filière PSI

Mathématiques 2e année

- Algèbre et géométrie PSI
- Analyse PSI

Physique 2e année

- Mécanique des fluides PC - PSI
- Électromagnétisme PC - PSI
- Physique des ondes PC - PSI
- Électrotechnique PSI
- Électronique PSI
- Optique MP - PC - PSI - PT
- Thermodynamique PC - PSI

Chimie 2e année

- Chimie PSI

Exercices 2e année

- Mathématiques PC - PSI
- Physique PSI

Maquette : Joëlle Parreau.
Couverture : Sophie Martinet.
Réalisation : Alpha-Edit.

© Bréal 2004
Toute reproduction même partielle interdite.
Dépôt légal : août 2004.
ISBN 2 7495 0407 4

Copyrighted material

Avant-propos

Les **Nouveaux Précis Bréal** sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail.
Ils ont pour objectif de dégager, à travers des énoncés variés et classiques, les méthodes qui permettent la **construction progressive et raisonnée** de la solution d'un exercice ou d'un problème. C'est pourquoi il est souhaitable de les utiliser tout au long de l'année, parallèlement à l'acquisition des connaissances.
Les exercices proposés ont été sélectionnés pour leur représentativité : ils permettent de présenter **l'ensemble des méthodes et des raisonnements** qui, une fois assimilés, doivent permettre de résoudre, sans trop de difficultés, des exercices analogues.

Ce volume traite **l'ensemble du programme de physique de deuxième année PSI**.

Chaque chapitre propose une série d'**exercices structurés** dont la **solution** est **très détaillée**, suivis de quelques exercices corrigés de réinvestissement.

Chaque exercice de la première catégorie est caractérisé par :

- un **énoncé** constitué de questions progressives ;
- « **Ce qu'il faut savoir** » : la liste des connaissances – en physique (« Points de cours ») et parfois en mathématiques (« Outils mathématiques ») – nécessaires pour traiter l'exercice ;
- « **Ce qu'il faut comprendre** » : l'analyse qui propose brièvement les chemins à suivre pour répondre efficacement aux questions posées. C'est un moment essentiel dans la recherche de la solution : assez brève, l'analyse doit précéder la mise en œuvre des calculs. Il nous paraît très important que la recherche de la solution passe systématiquement par cette étape. Il n'y a rien de plus stérile que de se lancer dans les calculs sans savoir de façon précise dans quel but ils sont entrepris...
- la solution proprement dite dans laquelle sont souvent rappelés et développés quelques « **Points cours** » dont une bonne compréhension est indispensable. Des « **Points méthodes** » (sur fond grisé) permettent d'affiner la réflexion : il s'agit soit de mises en garde afin d'éviter une erreur fréquente de raisonnement, soit le plus souvent d'explications supplémentaires justifiant le choix d'un théorème ou la pertinence d'un raisonnement. Des « **commentaires** » conduisent à une discussion des résultats obtenus et à une vérification de leur cohérence (recherche de cas ou de valeurs limites, approches différentes pouvant donner un autre éclairage...). Ces commentaires jouent un rôle comparable à l'analyse, mais cette fois après le développement des calculs : c'est une forme de contrôle des résultats obtenus.

Analyse et discussion, qui sont finalement les deux points les plus importants pour le physicien, sont aussi sans doute les étapes les plus difficiles à mettre en œuvre, mais leur bonne prise en compte facilitera considérablement la construction d'une solution structurée (et exacte...) de chaque exercice.

Nous espérons que cet ouvrage aidera les étudiants dans cette voie, dans la perspective d'une réussite aux concours. Nous accueillerons avec reconnaissance les remarques et les critiques des lecteurs, qui peuvent nous être adressées par courrier électronique à l'adresse suivante : **infos@editions-breal.fr**.

Les auteurs

This One
R3OZ-R8O-JRQE
Copyrighted material

Sommaire

PARTIE 1 : Mécanique des fluides 9

Chapitre 1 Hydrostatique (Révisions PCSI) 11

• Exercices avec solution détaillée

101. Forces de pression 12
102. Champ de pesanteur apparent 16

Chapitre 2 Écoulements parfaits 23

• Exercices avec solution détaillée

201. Tourbillon 24
202. Vidange d'un tube coudé 29
203. Étude d'un régime transitoire 34
204. Mise en mouvement d'une boule par un fluide 39
205. Cavité, bulle dans un fluide 48
206. Étude de la houle 57

• Exercices corrigés

207. Vase de Tantale 67
208. Tube en rotation 71
209. Tube en U en rotation 73
210. Modification de la largeur ou de la profondeur d'un canal 77
211. Force sur un hangar 85

Chapitre 3 Fluides visqueux 93

• Exercices avec solution détaillée

301. Régulateur de débit 94
302. Film fluide sur plan incliné 97
303. Mesure du coefficient de viscosité dynamique de l'eau liquide 101
304. Viscosimètre à billes 109
305. Viscosimètre de Couette 115
306. Oscillations d'une plaque dans un fluide visqueux 122

• Exercices corrigés

307. Mesure de la vitesse d'écoulement d'un fluide 127
308. Influence de la viscosité sur les oscillations d'un fluide 129

Chapitre 4 Bilans dynamique et thermodynamique 135

• Exercices avec solution détaillée

401. Entonnoir en bout de tube 136
402. Jet sur une plaque 138
403. Tourniquet de foire 144
404. Ressaut hydraulique 147
405. Houle en eau peu profonde 153
406. Onde de choc droite 160

• Exercices corrigés

407. Vidange d'un tube coudé 166
408. Propagation d'une discontinuité de hauteur d'eau 170

Copyrighted material

PARTIE 2 : Électromagnétisme 175

Chapitre 1 Équations de Maxwell 177

• Exercices avec solution détaillée

101. Câble coaxial en régime stationnaire 178
102. Câble coaxial en régime sinusoïdal 185

• Exercice corrigé

103. Condensateur en régime variable 192

Chapitre 2 Induction électromagnétique 199

• Exercices avec solution détaillée

201. Mouvement d'une bobine en présence d'un champ magnétique 200
202. Quantité d'électricité induite 205
203. Mise en rotation d'une sphère chargée 208

• Exercices corrigés

204. Barres sur rails 212
205. Lévitation d'une spire conductrice 217
206. Moteur synchrone 220
207. Déplacement de deux spires 225
208. Chute d'un aimant dans un tuyau cylindrique 229

PARTIE 3 : Physique des ondes 235

Chapitre 1 Corde vibrante 237

• Exercices avec solution détaillée

101. Deux cordes mises bout à bout 238
102. Absence d'onde réfléchie 242

• Exercices corrigés

103. Amortissement par « rayonnement » 245
104. Trois cordes 249
105. Corde plombée 254
106. Corde avec raideur 258
107. Oscillations forcées – Bilan d'énergie 263
108. Corde de guitare 270

Chapitre 2 Ondes acoustiques 275

• Exercices avec solution détaillée

201. Son émis par un réacteur d'avion 276
202. Tuyau d'orgue 278
203. Sphère pulsante 282
204. Résonateur 287

Copyrighted material

• Exercices corrigés
205. Isolation acoustique 293
206. Tuyaux sonores de section variable 297
207. Tuyau déformable 306
208. Ondes acoustiques dans un solide 310
209. Ondes dans un tuyau à section rectangulaire 312

Chapitre 3 Ondes Électromagnétiques 317

• Exercices avec solution détaillée
301. Interférences 318
302. Réflexion sur un métal, pression de radiation 320
303. Polarisation rotatoire 326
304. Onde guidée 328
305. Ligne sans pertes 333
306. Couche semi-réfléchissante 337
• Exercices corrigés
307. Miroir multicouches diélectriques 342
308. Ondes dans un plasma idéal 348
309. Réflexion sur un plasma 351

PARTIE 4 : Optique ondulatoire 359

Chapitre 1 Interférences 361

• Exercices avec solution détaillée
101. Interféromètre de Michelson 362
102. Influence de la largeur de la fente source 369
103. Interféromètre de Michelson en coin d'air 373
• Exercices corrigés
104. Étoile double 379
105. Largeur spectrale de raie 384
106. Spectrométrie à transformée de Fourier 391
107. Couleurs interférentielles 399

Chapitre 2 Diffraction 405

• Exercices avec solution détaillée
201. Apodisation 406
202. Diffraction à l'infini 412
• Exercices corrigés
203. Filtrage spatial 418
204. Monochromateur 422

Copyrighted material

PARTIE 5 : Thermodynamique 427

Chapitre 1 Énergie et entropie 429

• Exercices avec solution détaillée

101. Compressions d'un gaz 430
102. Transformation quasi statique irréversible 434
103. Création d'entropie 437
104. Cycle à trois transformations 442
105. « Turbopropulseur » 446

Chapitre 2 Diffusion thermique 451

• Exercices avec solution détaillée

201. « Isolation » d'une conduite 452
202. Régulation thermique par ailette 457
203. Phénomènes instationnaires 462
204. Impression de chaud ou de froid au « contact » 468
205. Bouffée de chaleur 472

• Exercices corrigés

206. Transfert d'énergie thermique entre deux corps 476
207. Barre parcourue par un courant 481
208. Échangeur d'énergie thermique 485
209. Formation d'une couche de glace 491

Chapitre 3 Diffusion de particules 497

• Exercices avec solution détaillée

301. Bilan de particules 498
302. Diffusion dans un milieu actif – Réacteur à neutrons 502

• Exercices corrigés

303. Diffusion à contre courant 507
304. Réalisation d'une jonction par diffusion 510

PARTIE 6 : Conversion de puissance 515

Chapitre 1 Conversion électromagnétique statique 517

• Exercices avec solution détaillée

101. Transformateur pour alimenter une ampoule basse tension 518
102. Transformateur et transfert de puissance 521

• Exercices corrigés

103. Transformateur non parfait : pertes fer par hystérésis 526
104. Transformateur d'impulsions 532

Copyrighted material

Chapitre 2 Conversion électromécanique 539

• Exercices avec solution détaillée

201. Modélisation d'une machine à courant continu 540
202. Fonctions de transfert d'un moteur à courant continu 547

• Exercice corrigé

203. Le moteur linéaire 554

Chapitre 3 Conversion électronique 563

• Exercices avec solution détaillée

301. Moteur à courant continu alimenté par hacheur série 564
302. Hacheur indirect à stockage inductif 570

• Exercice corrigé

303. Étude d'un onduleur 576

PARTIE 7 : Électronique des signaux et des systèmes 581

Chapitre 1 Électronique des systèmes linéaires 583

• Exercices avec solution détaillée

101. Diagramme asymptotique 584
102. Montages déphaseurs 589
103. Filtre passe-bande à deux A.O. 592
104. Filtre du type Butterworth 597
105. Une application du multiplieur 606

• Exercices corrigés

106. Passe-bande à paramètres ajustables 610
107. Coupe-bande 616

Chapitre 2 Commande d'un système 623

• Exercices avec solution détaillée

201. Rétroaction et propriétés d'un amplificateur 624
202. Oscillateur quasi sinusoïdal 628
203. Oscillateur à relaxation 638

• Exercices corrigés

204. Moteur à courant continu à vide puis en charge 645
205. Oscillateur à fréquence commandée par une tension 651
206. Boucle à verrouillage de phase 659
207. Intégrateur numérique – Numérisation d'un signal 663

Partie

1

Mécanique des fluides

Copyrighted material

chapitre

1

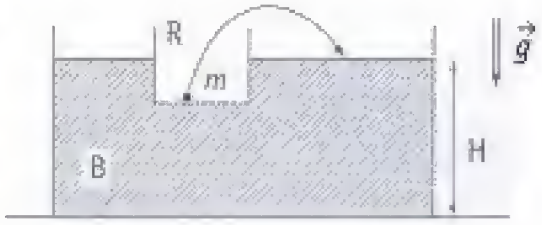
Hydrostatique (Révisions PCSI)

101 Forces de pression

1. Un récipient R de masse M contient un corps solide de masse m. R flotte à la surface de l'eau contenue dans un bac B.

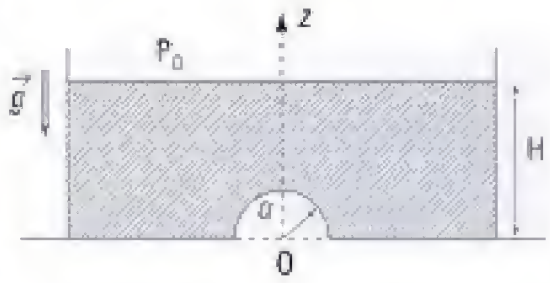
La masse m est « jetée par-dessus bord ».

Que dire de la nouvelle hauteur d'eau dans le récipient ?



2. Un récipient cylindrique repose sur une surface horizontale. Le fond du récipient présente en son milieu une partie hémisphérique (centre O, rayon a).

On le remplit d'eau (masse volumique ρ_0) sur une hauteur H ($H > a$). On supposera que la pression de l'air enfermé dans la cavité est P_0 pression ambiante régnant au-dessus de l'eau.



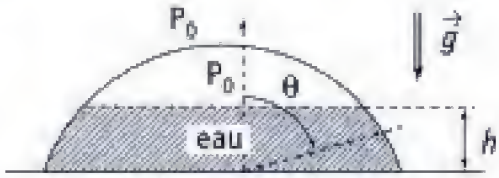
Déterminer la force résultante exercée sur la demi-sphère par l'eau et l'air :

a. en traduisant l'équilibre de la colonne d'eau surmontant la partie hémisphérique ;

b. par l'intermédiaire du théorème d'Archimède.

3. Une cloche (hémisphère de rayon a et de masse M) repose sur un plan horizontal. Elle contient de l'eau jusqu'à une hauteur h.

Montrer qu'il existe une valeur critique h_c de h au-delà de laquelle l'équilibre est rompu.



On notera ρ = cste la masse volumique de l'eau.

Rappel : l'élément de surface associé à l'intervalle $[\theta, \theta + d\theta]$ d'une sphère est donné par $\delta\Sigma = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Loi de l'hydrostatique.
- Théorème d'Archimède.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Deux cas sont à étudier selon que la masse « jetée par-dessus bord » flotte ou coule.

2. Pour pouvoir appliquer le théorème d'Archimède, on imaginera un corps solide en forme de demi-boule de « centre » O et de rayon a, complètement entouré d'eau :

Copyrighted material

la résultante des forces de pression exercée par l'eau sur la surface bombée est évidemment la même…

3. La pression dans l'eau peut s'écrire $P = P_0 + p$. Seule la surpression p est à prendre en compte, P_0 s'exerçant sur les faces externe et interne de la cloche.

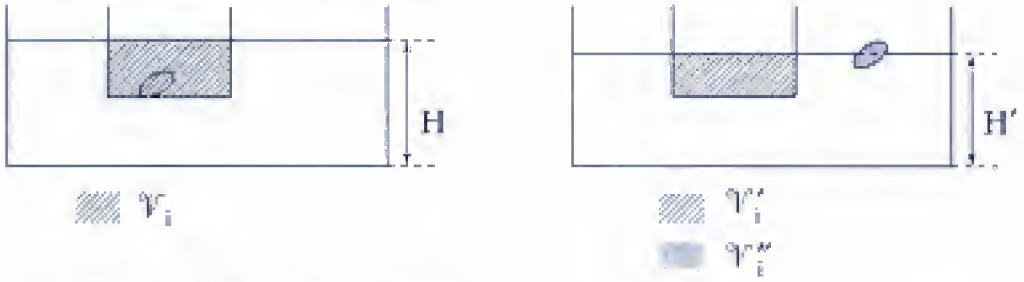
3. Solution

1. Notons ρ la masse volumique moyenne du corps de masse m et ρ_0 la masse volumique de l'eau. Deux cas peuvent se produire :

■ **1er cas :** $\rho < \rho_0$ et le corps va flotter à la surface de l'eau. Le volume total immergé reste alors le même, que la masse m soit à l'intérieur ou à l'extérieur du récipient. Il n'y a pas, dans ce cas, de modification de la hauteur H du niveau de l'eau.

Quantitativement, on a :
– dans l'état initial, $(M + m)g = \rho_0 \mathcal{V}_i g$ ($\mathcal{V}_i$ volume immergé, on a négligé la contribution de l'air à la poussée d'Archimède) ;

– dans l'état final, d'une part pour le récipient, $Mg = \rho_0 \mathcal{V}'_i g$, d'autre part pour le corps solide flottant, $mg = \rho_0 \mathcal{V}''_i g$.



D'où : $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}'_i + \mathcal{V}''_i$ et $\boxed{H' = H}$

■ **2e cas :** $\rho > \rho_0$ et le corps plus dense que l'eau va couler. Le volume total « immergé » devient alors plus faible. En effet :

– dans l'état initial, on a : $(M + m)g = \rho_0 \mathcal{V}_i g$;

– dans l'état final, on a : $Mg = \rho_0 \mathcal{V}'_i g$.

Le volume total d'eau « déplacé » devenant $\mathcal{V}'_T = \mathcal{V}'_i + \mathcal{V}_{corps}$ avec ici :

$$\rho_0 \mathcal{V}_{corps} g < mg \quad \text{(corps plus dense que l'eau)}$$

d'où $\mathcal{V}'_T = \dfrac{M}{\rho_0} + \mathcal{V}_{corps} < \dfrac{M + m}{\rho_0} < \mathcal{V}_i \Rightarrow \boxed{\mathcal{V}'_T < \mathcal{V}_i}$

Il en résulte que la hauteur d'eau dans le bac sera plus faible.

Commentaire

Si on note S la surface de la base du bac et H_0 la hauteur d'eau en l'absence du récipient et du corps, on aura :

$$SH = SH_0 + \mathcal{V}_i \quad \text{avec } \mathcal{V}_i = \mathcal{V}'_i + \mathcal{V}''_i \quad (\rho_0 \mathcal{V}'_i = M ;\ \rho_0 \mathcal{V}''_i = m).$$

1er cas : $SH' = SH_0 + \mathcal{V}'_i + \mathcal{V}''_i = SH_0 + \mathcal{V}_i \Rightarrow H' = H$.

2d cas : $SH'' = SH_0 + \mathcal{V}'_i + \mathcal{V}_{corps}$

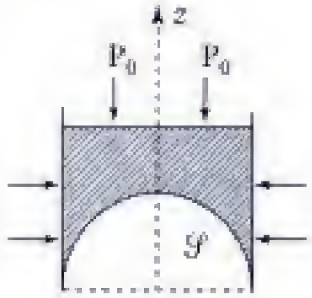
Copyrighted material

avec ici $\mathcal{V}_{corps} < \dfrac{m}{\rho_0}$; or $m = \rho_0 \mathcal{V}_i''$, d'où $\mathcal{V}_{corps} < \mathcal{V}_i''$ et $SH'' < SH_0 + \mathcal{V}_i' + \mathcal{V}_i''$

soit $SH'' < SH_0 + \mathcal{V}_i \Rightarrow \boxed{H' < H}$

2. a. La force s'exerçant sur la demi-sphère s'écrit : $\vec{F}_p = \vec{F}_p^{air} + \vec{F}_p^{eau}$.

Pour déterminer $\vec{F}_p^{eau}$, traduisons l'équilibre de la colonne d'eau (partie hachurée sur le schéma) surmontant $\mathcal{S}$. On a, en désignant par M la masse correspondante de cette colonne :



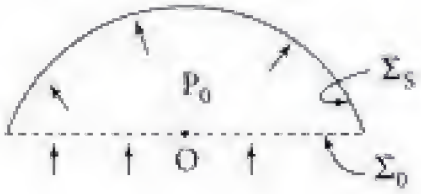
$$\vec{0} = M\vec{g} + \underbrace{(-P_0\pi a^2 \vec{u}_z)}_{\text{force exercée par l'air sur la surface libre}} + \underbrace{(-\vec{F}_p^{eau})}_{\text{principe de l'action et de la réaction}}$$

la résultante des forces latérales de pression étant nulle.

Or $M = \rho_0\left(\pi a^2 H - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi a^2\right) = \pi\rho_0 a^2\left(H - \dfrac{2}{3}a\right)$

soit $\vec{F}_p^{eau} = -\pi\rho_0 g a^2\left(H - \dfrac{2}{3}a\right)\vec{u}_z - P_0\pi a^2\vec{u}_z$ (3) (avec $\vec{g} = -g\vec{u}_z$).

Il reste à exprimer la résultante $\vec{F}_p^{air}$ des forces de pression dues à l'air. P_0 étant à répartition uniforme, cette force sur Σ_S est la même que celle qui s'exercerait sur le disque Σ_0 (de centre O et de rayon a).



On a donc : $\vec{F}_p^{air} = P_0\iint_{\Sigma_S}\vec{n}\,\delta\Sigma_S = P_0\Sigma_0\vec{u}_z = P_0\pi a^2\vec{u}_z$ (4)

soit au total d'après (3) et (4) : $\boxed{\vec{F}_p = -\pi\rho_0 g a^2\cdot\left(H - \dfrac{2}{3}a\right)\vec{u}_z}$

On retrouve le résultat précédent (expression (2)).

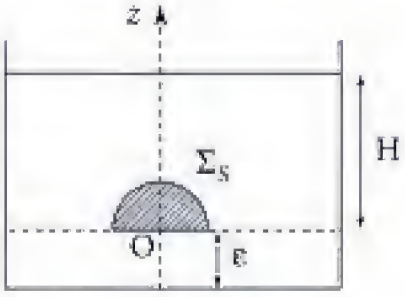
2. b.

> **Point méthode**
>
> Pour appliquer le théorème d'Archimède, il est nécessaire que le corps considéré soit entièrement entouré de fluides en équilibre hydrostatique dans le référentiel considéré.

Considérons alors un solide (demi-boule de rayon a) immergé dans l'eau, à une profondeur H, et dont la face plane se trouverait à une distance ε du fond du récipient.

D'après le théorème d'Archimède, on aurait pour la résultante des forces de pression exercées par l'eau :

$$\vec{F}'^{eau}_p = \rho_0 \mathcal{V} g\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \mathcal{V} = \frac{2}{3}\pi a^3$$



Copyrighted material

soit $\vec{F}'^{eau}_p = g\rho_0\pi a^2 \cdot \frac{2a}{3}\vec{u}_z$.

Or $\vec{F}'^{eau}_p = \underbrace{\vec{F}^{eau}_p}_{\text{résultante sur } \Sigma_s} + \vec{F}^{eau}_p (\to \Sigma_0) = \vec{F}^{eau}_p + P(O)\pi a^2 \vec{u}_z$

et avec $P(O) = P_0 + \rho_0 gH$ (loi de l'hydrostatique) :

$$\rho_0 g\,\pi a^2 \cdot \frac{2a}{3}\vec{u}_z = \vec{F}^{eau}_p + \pi a^2 \cdot (P_0 + \rho_0 gH)\vec{u}_z$$

soit $$\vec{F}^{eau}_p = -P_0\pi a^2 \vec{u}_z - \pi a^2 \rho_0 g\left(H - \frac{2}{3}a\right)\vec{u}_z.$$

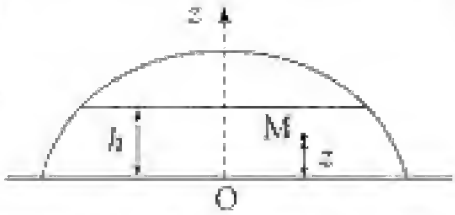
On retrouve l'expression (3) de $\vec{F}^{eau}_p$ établie au **2. a.** ; la suite du raisonnement n'est pas modifiée.

Commentaire

On pouvait remarquer que la pression P_0 ne devait pas intervenir puisqu'elle s'exerce également en dessous de la surface bombée ; il était donc possible, dès le départ, de ne considérer que le champ de pression dans l'eau, référencé à P_0, soit $p = P(M) - P_0$.

Il suffit alors, dans l'expression précédente de $\vec{F}^{eau}_p$, d'éliminer le terme en P_0 pour aboutir à $\vec{F}_F$.

3. Supposons le système en équilibre pour une hauteur h d'eau.



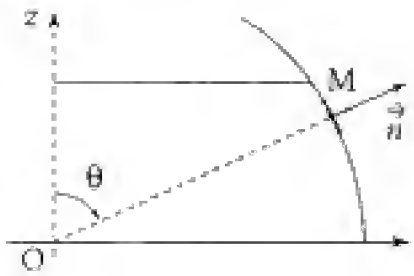
Au sein du fluide en équilibre hydrostatique, on a :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow P(z) = P_0 + \rho g \cdot (h - z).$$

Calculons la résultante des forces de pression exercées par l'air et l'eau sur la cloche.

La contribution de P_0 est globalement nulle. Seule la surpression $p = \rho g \cdot (h - z)$ donnera une force résultante non nulle dirigée, par symétrie, selon $\vec{u}_z$.

L'élément de surface $\delta\Sigma$, situé en M, sera soumis à la force élémentaire $\vec{\delta F}$ telle que : $\vec{\delta F} = p\vec{n}\,\delta\Sigma$.



Sa projection sur $\vec{u}_z$ donne :

$\vec{u}_z \cdot \vec{\delta F} = p\vec{n} \cdot \vec{u}_z \delta\Sigma = p\cos\theta\,\delta\Sigma = p(\theta)\cos\theta\,\delta\Sigma$

(symétrie de révolution d'axe Oz).

Considérons alors la surface associée à l'intervalle $[\theta, \theta + d\theta]$:

$$\delta\Sigma = (a\,d\theta)(2\pi a\sin\theta) = 2\pi a^2 \sin\theta\,d\theta$$

d'où, avec $\vec{F}_p(\text{eau + air}) = F_p\vec{u}_z$:

$$\delta F_p = p(\theta)\cos\theta 2\pi a^2 d(-\cos\theta) \quad (d(-\cos\theta) = \sin\theta\,d\theta).$$

Soit encore avec $z(M) = a\cos\theta$: $\delta F_p = p(z)2\pi z\,d(-z)$ où $p(z) = \rho g(h - z)$.

Copyright protected material

Et au total : $F_p = 2\pi\rho g\int_0^h z(h-z)\,dz$ (quand $\theta : \theta_0 \to \frac{\pi}{2}$ alors $z : h \to 0$)

$$F_p = 2\pi\rho g\left[\frac{h^2}{2}h - \frac{h^3}{3}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{F_p} = \pi\rho g\frac{h^3}{3}\vec{u_z}}$$

Écrivons maintenant que la cloche, de masse M, est en équilibre. Appelons $\vec{R}$ la réaction du sol : $\vec{R} + M\vec{g} + \vec{F_p} = 0 \Rightarrow \vec{R} = (Mg - F_p)\vec{u_z} = R\vec{u_z}$.

L'équilibre n'a lieu que pour $R > 0$, ce qui implique :

$$Mg > \frac{1}{3}\pi\rho g h^3 \text{ et donc } \boxed{h < h_c = \left(\frac{3M}{\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Ce résultat n'a d'intérêt que pour $h_c < a$...

102 Champ de pesanteur apparent

1. On considère un fluide en équilibre hydrostatique dans un référentiel $\mathcal{R}$. Il est soumis aux forces de pression et à des forces extérieures de densité volumique :

$$\vec{\varphi}(M) = \rho_0\vec{g^*}(M)$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide, constante du problème.

a. Montrer que les surfaces isobares sont localement orthogonales au champ de vecteur $\vec{g^*}$.

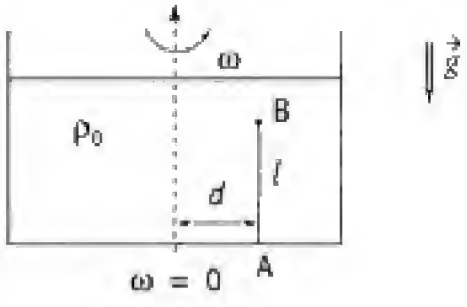
b. Application : dans les deux cas suivants, déterminer les isobares associés à l'équilibre hydrostatique dans $\mathcal{R}$.

■ **1er cas** : le fluide est contenu dans un récipient cylindrique, lié à $\mathcal{R}$, tournant par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, autour de son axe vertical Oz à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega\vec{u_z}$.

■ **2e cas** : le fluide est contenu dans un récipient, lié à $\mathcal{R}$, animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré ($\vec{a} = a_0\vec{u_x}$, $a_0 > 0$; $\vec{u_x}$: direction horizontale) par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$.

2. a. Un « pendule » simple est constitué d'un fil AB, de longueur l et de masse négligeable, et d'une boule B « quasi ponctuelle » de masse m et de volume $\mathcal{V}$. On appelle ρ la masse volumique moyenne de B ($m = \rho\mathcal{V}$).

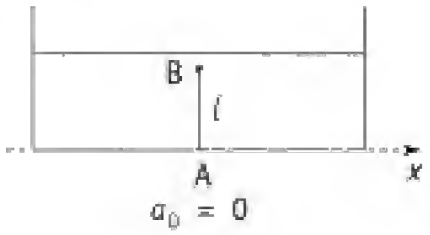
Dans le cas d'un récipient tournant, l'extrémité A est fixée au fond du récipient à une distance d de l'axe de rotation. À l'équilibre, on constate



Copyrighted material

que le fil est tendu. Le schéma représente la situation pour $\omega = 0$. Qu'en est-il pour $\omega \neq 0$?

b. Reprendre la question précédente dans le cas d'un récipient uniformément accéléré ($\vec{a} = a_0 \vec{u}_x$).



1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Loi de l'hydrostatique.
- Théorème d'Archimède.

Outil mathématique

- Opérateur gradient.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. Étant donné un champ de scalaire $M \to \phi(M)$, on montrera que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(M)$ est localement orthogonal à la surface équipotentielle passant par M.

b. On se placera dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au récipient. Il faudra alors prendre en compte les forces d'inertie d'entraînement (fluide en équilibre dans $\mathcal{R}$) pour obtenir, dans chaque cas, l'expression de $\vec{g}^*(M)$.

2. a. Dans le référentiel tournant, le champ des pressions dépend de z (*via* le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$) et de la distance r à l'axe (*via* les forces d'inertie d'entraînement).

La poussée d'Archimède appliquée à la boule B n'est rien d'autre que la résultante des forces de pression qu'exerce le fluide sur la surface de B : à la composante « classique » verticale due à la pesanteur, il faudra prendre soin d'ajouter une composante horizontale dont l'origine est liée aux forces d'inertie…

On tiendra compte de ce que la boule, de volume $\mathcal{V}$, est quasi ponctuelle…

b. L'expression des forces d'inertie d'entraînement est modifiée mais le raisonnement reste le même.

3. Solution

1. a. Dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$, le fluide est en équilibre hydrostatique sous l'effet des forces de pression, de densité volumique $\overrightarrow{\text{grad}}P$, et de forces extérieures de densité volumique $\vec{\varphi}_v = \rho_0 \vec{g}^*(M)$. On a donc :

$$-\vec{\nabla}P + \vec{\varphi}_v = \vec{0} \quad \text{(loi de l'hydrostatique)}$$

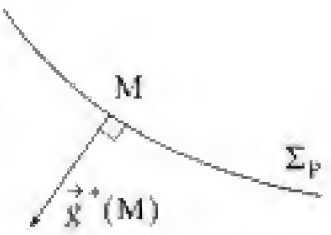
soit encore $\vec{\nabla}P = \rho_0 \vec{g}^*(M)$ (1)

Copyrighted material

Considérons alors, au sein du fluide, une surface isobare Σ_P.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}P$ est orthogonal, en M, à cette surface. En effet, pour deux points quelconques M et N infiniment voisins, on a par définition de l'opérateur gradient :

$$dP = \overrightarrow{\text{grad}}P \cdot \vec{\delta l} = P_N - P_M \quad \text{où} \quad \vec{\delta l} = \overrightarrow{MN}.$$



Pour deux points M et N appartenant à la même surface isobare, $dP = 0$ et $\vec{\delta l}$ est porté par le plan tangent en M. Dès lors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M P \cdot \vec{\delta l} = 0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}_M P \perp \text{isobare}}$$

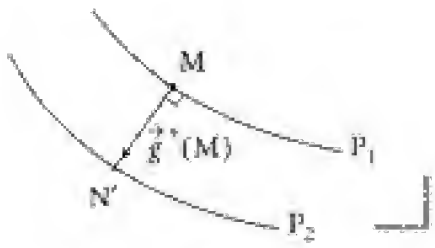
Or d'après (1), $\overrightarrow{\text{grad}}_M P$ est colinéaire à $\vec{g}^*(M)$.

En conclusion, les surfaces isobares sont localement orthogonales aux vecteurs $\vec{g}^*$.

Commentaire

Soit deux surfaces isobares infiniment voisines, associées aux pressions P_1 et P_2. Le sens du vecteur $\vec{g}^*(M)$ nous indique que $P_2 > P_1$

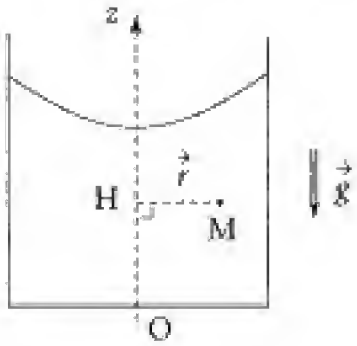
$(P_2 - P_1 = \overrightarrow{\text{grad}}P)_M \cdot \overrightarrow{MN'} = \rho_0 \vec{g}^*(M) \cdot \overrightarrow{MN'} > 0)$.



1. b. ■ Cas du fluide dans un cylindre tournant

Plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ tournant avec le cylindre, et supposons que le fluide y soit en équilibre ($\vec{v} = \vec{0}$ à tout instant t) : les forces visqueuses, nécessaires pour atteindre cet équilibre, sont inopérantes dans cet état d'équilibre. On a alors :

$$\vec{\varphi}_v = \underbrace{\vec{\varphi}_v(\text{pesanteur})}_{\rho_0 \vec{g}} + \underbrace{\vec{\varphi}_v(\text{inertie d'entrainement})}_{-\rho_0 \vec{a}_e(M)}.$$



Or $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$ $\quad (\vec{\omega} = \text{constante} = \omega \vec{u}_z)$

d'où $\vec{\varphi}_v = \rho_0 \vec{g} + \rho_0 \omega^2 \vec{r}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{HM}$ et $\vec{\varphi}_v = \rho_0 \vec{g}^*$ avec $\vec{g}^* = \vec{g} + \omega^2 \vec{r}$

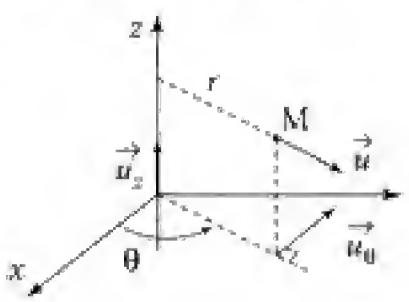
$$\boxed{\vec{g}^* = -g \vec{u}_z + \omega^2 \vec{r}} \quad (2)$$

Une surface isobare est telle (*cf.* **1. a.**) que : $dP = \vec{\nabla} P \cdot \vec{\delta l} = \rho_0 \vec{g}^* \vec{\delta l} = 0$ (3)

Or en coordonnées cylindriques, les points d'une telle surface sont repérés par (r, θ, z), et donc $\vec{\delta l} = dr \vec{u} + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$.

(2) et (3) donnent alors :

$$(-g \vec{u}_z + \omega^2 r \vec{u})(dr \vec{u} + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z) = 0$$



Copyrighted material

soit : $-g\,dz + \omega^2 r\,dr = 0 \Rightarrow d\left(\omega^2 \frac{r^2}{2} - gz\right) = 0.$

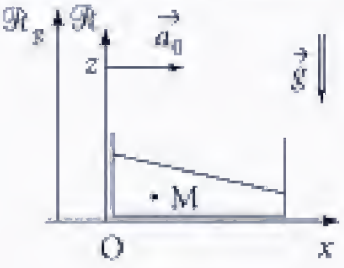
Les isobares sont des paraboloïdes de révolution d'axe Oz (axe du cylindre) et d'équation :

$$\boxed{z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{cste}}$$

Il en est ainsi de la surface libre du fluide (isobare $P = P_0$; effets de tension superficielle négligés).

■ **Cas du fluide dans un récipient en mouvement rectiligne uniformément accéléré**

Plaçons-nous dans un référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ lié au récipient.



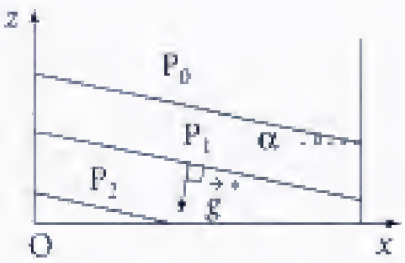
Ici $\vec{\varphi}_v = \vec{\varphi}_v(\text{pesanteur}) + \vec{\varphi}_v(\text{inertie d'entraînement})$

(on étudie l'état d'équilibre dans $\mathcal{R}$).

D'où $\vec{\varphi}_v = \rho_0 \vec{g} + \rho_0(-a_0 \vec{u}_x)$ $\quad \vec{a}_0 = a_0 \vec{u}_x$

$$\vec{\varphi}_v = \rho_0(\vec{g} - a_0 \vec{u}_x) \Rightarrow \boxed{\vec{g}^* = -g\vec{u}_z - a_0 \vec{u}_x}$$

L'équation d'une surface isobare est donnée par (méthode identique à celle suivie dans le cas précédent) :



$(-g\vec{u}_z - a_0 \vec{u}_x) \cdot \vec{\delta l} = 0$

avec ici $\vec{\delta l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$

$(-g\vec{u}_z - a_0 \vec{u}_x) \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) = 0$

et donc :

$-g\,dz - a_0\,dx = 0 \Rightarrow d(gz + a_0 x) = 0.$

Les isobares sont des plans d'équation

$$\boxed{z = -\frac{a_0}{g}x + \text{cste}}$$

On a : $\tan\alpha = \frac{a_0}{g}$.

Point méthode

On peut, bien évidemment, retrouver les résultats précédents en intégrant directement l'équation de l'hydrostatique, $\overrightarrow{\text{grad}}P = \vec{\varphi}_v$, afin d'établir l'expression du champ de pression P(M).

Ainsi, dans le premier cas, on aurait, avec en coordonnées cylindriques et $P = P(r, z)$:

$$\vec{\nabla}P = \left(\frac{\partial P}{\partial r}, 0, \frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

d'où puisque $\vec{\nabla}P = \rho_0 \vec{g}^* = \rho_0(\omega^2 \vec{r} - g\vec{u}_z)$: $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0 \omega^2 r$ et $\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho_0$.

Or $dP = \frac{\partial P}{\partial z}dz + \frac{\partial P}{\partial r}dr \Rightarrow dP = -\rho_0 g\,dz + \rho_0 \omega^2 r\,dr$

• • •

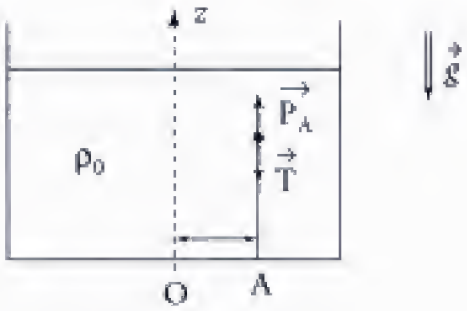
...

et $dP = d\left[-\rho_0 gz + \rho_0\omega^2\frac{r^2}{2}\right] \Rightarrow \boxed{P(r,z) = \rho_0\omega^2\frac{r^2}{2} - \rho_0 gz + \text{cste}}$

Une surface isobare correspond bien à $\rho_0\omega^2\frac{r^2}{2} - \rho_0 gz = \text{cste}$, soit :

$$\boxed{z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 + \text{cste}}$$

2. a. ■ Analysons la situation pour $\omega = 0$. La boule B est en équilibre sous l'action :



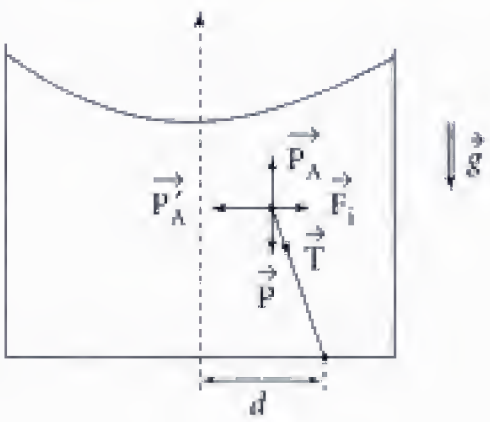
- de son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z = -\rho V g\vec{u}_z$;
- de la poussée d'Archimède $\vec{P}_A = +\rho_0 V g\vec{u}_z$;
- de la tension $\vec{T}$ du fil.

On a donc : $\vec{T} + \vec{P} + \vec{P}_A = \vec{0}$, d'où :

$$\vec{T} = -(\vec{P} + \vec{P}_A) \text{ soit } \vec{T} = -\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)mg\vec{u}_z = T\vec{u}_z.$$

Le fil étant tendu, il vient : $T < 0$ et donc $\rho_0 > \rho$ (la poussée d'Archimède l'emporte sur le poids).

■ Considérons maintenant la situation où $\omega \neq 0$, et plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où le fluide est en équilibre hydrostatique.



La boule B est alors soumise, dans sa position d'équilibre, aux forces $\vec{P}_A = \frac{\rho_0}{\rho}mg\vec{u}_z$ et $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, déjà citées, ainsi qu'à la force d'inertie $\vec{F}_i = m\omega^2\vec{r}$ (où $\vec{r} = \overrightarrow{HM}$). Il faut également prendre en compte une seconde composante $\vec{P}'_A$ de la poussée d'Archimède associée aux modifications du champ des pressions dues aux efforts d'inertie d'entraînement :

Pesanteur
- poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- poussée d'Archimède de « pesanteur » : $\vec{P}_A = -\frac{\rho_0}{\rho}\vec{P} = -\frac{\rho_0}{\rho}m\vec{g}$.

Efforts d'inertie d'entraînement ($\omega = \text{cste}$)
- force d'inertie : $\vec{F}_i = m\omega^2\vec{r}$
- poussée d'Archimède « inertielle » : $\vec{P}'_A = -\frac{\rho_0}{\rho}\vec{F}_i = -\frac{\rho_0}{\rho}m\omega^2\vec{r}$.

} boule B quasi-ponctuelle

Copyrighted material

L'équilibre de la boule impose, en prenant en compte la tension $\vec{T}$ du fil :

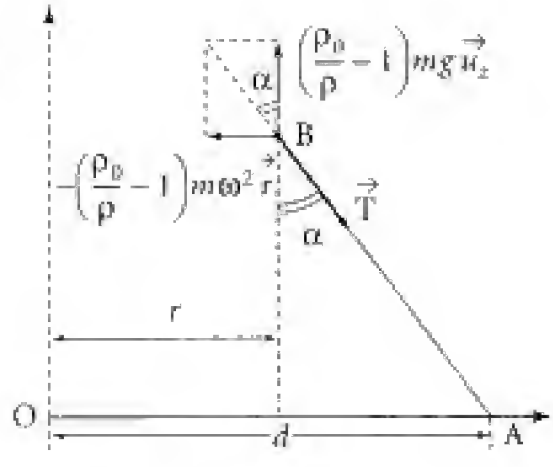
$$\vec{T} + (\vec{P_A} + \vec{P}) + (\vec{F_i} + \vec{P'_A}) = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{T} = -\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) mg\,\vec{u}_z + \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m\omega^2\,\vec{r}} \quad (4) \quad (\rho_0 > \rho).$$

On a donc : $\tan\alpha = \dfrac{\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m\omega^2 r}{\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) mg} = \dfrac{\omega^2}{g} r$

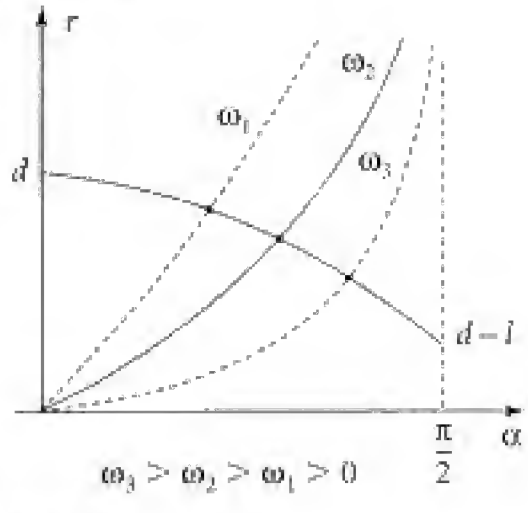
et $d - r = l\sin\alpha \Rightarrow r = d - l\sin\alpha$.

Ainsi $\boxed{r = \dfrac{g}{\omega^2}\tan\alpha = d - l\sin\alpha}$

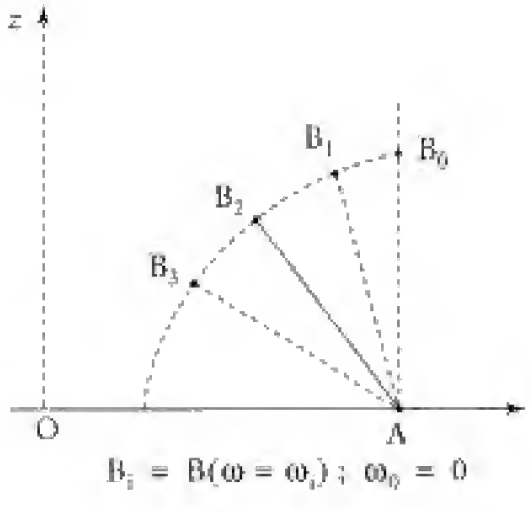


Traçons les courbes $\alpha \to \dfrac{g}{\omega^2}\tan\alpha$ et $\alpha \to d - l\sin\alpha$.

■ 1er cas : $d > l$

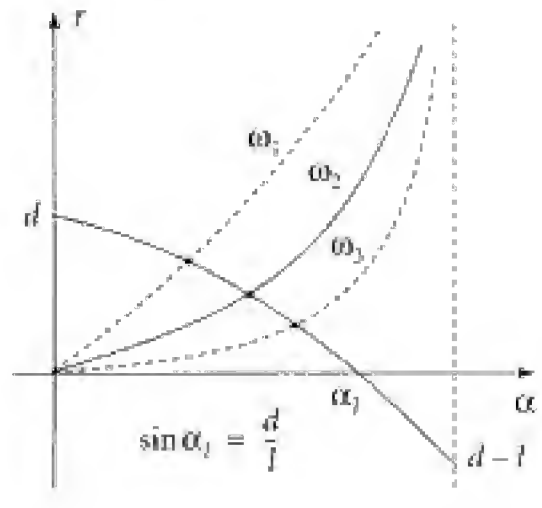


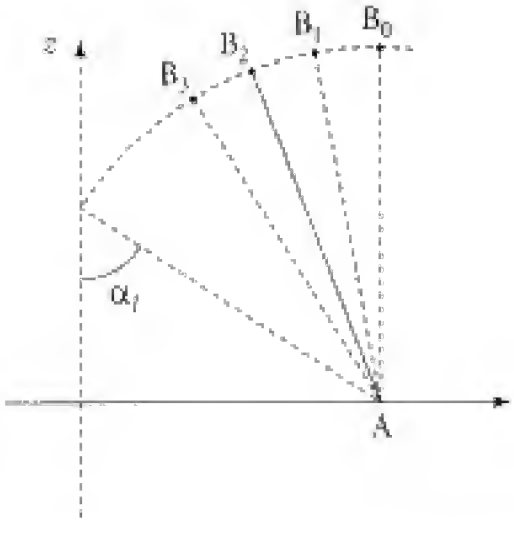
$\omega_3 > \omega_2 > \omega_1 > 0$



$B_i = B(\omega = \omega_i)$; $\omega_0 = 0$

■ 2e cas : $d < l$

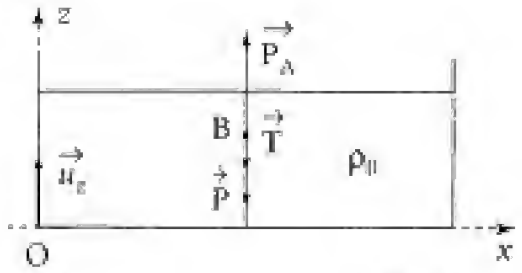




Copyright du matériel

2. b. Reprenons la démarche précédente dans le cas du récipient uniformément accéléré ($\vec{a} = a_0 \vec{u}_x$ avec $a_0 > 0$).

■ 1er cas : $a_0 = 0$



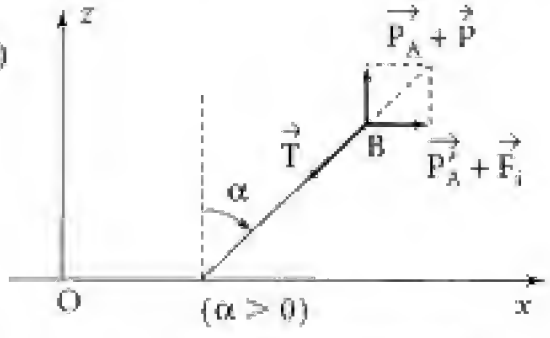
L'équilibre de la boule se traduit encore par :

$$\vec{P}_A + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = T\vec{u}_z = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m\vec{g}.$$

Le fil étant tendu ($T < 0$), on a $\rho_0 > \rho$.

■ 2e cas : $a_0 \neq 0$

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'(O, x, y, z)$ lié au récipient.



L'équilibre correspond à :

$$\vec{T} + (\vec{P}_A + \vec{P}) + (\vec{P}'_A + \vec{F}_i) = \vec{0}.$$

$$\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{P}_A = -\frac{\rho_0}{\rho} m\vec{g}$$

$$\vec{F}_i = -m a_0 \vec{u}_x \Rightarrow \vec{P}'_A = \frac{\rho_0}{\rho} m a_0 \vec{u}_x \text{ d'où } \boxed{\vec{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m\vec{g} - \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m a_0 \vec{u}_x} \quad (5)$$

soit $\tan\alpha = \dfrac{\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m a_0}{\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m g} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \dfrac{a_0}{g}}$

Commentaire

On peut facilement vérifier que l'on a : $\vec{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m\vec{g}^*$ (*cf.* (4) et (5)).

Le fil indique donc la direction et le sens du vecteur $\vec{g}^*$ (« pesanteur apparente »).

Copyrighted material

Chapitre

2

Écoulements parfaits

201 Tourbillon

On considère, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, un écoulement stationnaire d'un fluide parfait. Il s'agit d'un mouvement tourbillonnaire à symétrie de révolution autour d'un axe vertical Oz. Le fluide est soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz. Dans le modèle envisagé, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}$ a pour valeur :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z \text{ pour } r < a \ (\Omega = \text{cste}) ; \\ \cdot\ \vec{\Omega} = \vec{0} \text{ pour } r > a. \end{array}\right\} \text{avec } \vec{v} = v(r, z)\vec{u}_\theta$$

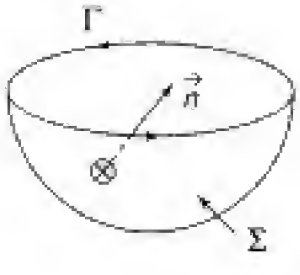
Le fluide est homogène de masse volumique uniforme ρ_0.

1. Montrer que ce champ des vitesses $\vec{v}$ est compatible avec un écoulement incompressible. On donne, en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

2. Déterminer les expressions du champ des vitesses $\vec{v}$ pour $r < a$ et pour $r > a$.

Rappels : Considérons un contour fermé Γ orienté et une surface Σ (orientée par rapport à Γ) s'appuyant sur Γ (Σ n'est pas une surface fermée). À la relation locale $\vec{a} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{b}$, correspond une relation intégrale (théorème de Stokes) :



$$\oint_\Gamma \vec{b}\cdot\overrightarrow{\delta l} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\vec{b}\cdot\overrightarrow{\delta\Sigma} = \iint_\Sigma \vec{a}\cdot\overrightarrow{\delta\Sigma}$$

soit

$$\oint_\Gamma \vec{b}\cdot\overrightarrow{\delta l} = \iint_\Sigma \vec{a}\cdot\overrightarrow{\delta\Sigma}$$

Quelle analogie peut-on faire avec la magnétostatique ?

3. Déterminer le champ des pressions.

On distinguera les deux cas $r < a$ et $r > a$, et on posera $P_0 = \lim_{\substack{r\to\infty \\ z=0}} P(r, z)$.

Tracer la courbe $r \to f(r) = P - P_0 + \rho_0 gz$. On notera : $p_m = \rho_0\Omega^2a^2$.

4. Applications :

a. Le modèle précédent est appliqué à une tornade pour laquelle $v_{max} = 150 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $\rho_0 = 1{,}3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer la dépression p_m. La comparer à $P_0 = 10^5$ Pa.

b. Le modèle décrit un tourbillon de vidange. Le fluide est de l'eau surmontée de l'atmosphère à la pression uniforme P_0. Déterminer la forme de la surface libre du fluide.

Copyrighted material

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Écoulement incompressible ($\mathrm{div}\vec{v} = 0$).
- Équation d'Euler (fluide parfait).
- Premier théorème de Bernoulli.

2. Ce qu'il faut comprendre

2. On exploitera la symétrie du problème pour déterminer $\vec{v}$, connaissant $\vec{\Omega}$, par application du théorème de Stokes. On vérifiera que le champ des vitesses est bien continu en $r = a$. L'analogie avec la magnétostatique s'effectuera en mettant en correspondance les champs de vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

3. On pourra utiliser le premier théorème de Bernoulli pour le fluide situé en $r > a$. Il faudra reprendre à l'équation d'Euler pour le fluide situé en $r < a$. On tiendra compte de ce que la pression est continue en $r = a$.

3. Solution

1. Calculons $\mathrm{div}\vec{v}$ avec $\vec{v}(0, v(r, z), 0)$:

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}v(r, z) + 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\vec{v} = 0}$$

Cette équation traduit que l'écoulement envisagé est incompressible.

2. On a ici $2\vec{\Omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{v}$, soit d'après l'énoncé ($\vec{b} \to \vec{v}$ et $a \to 2\vec{\Omega}$) :

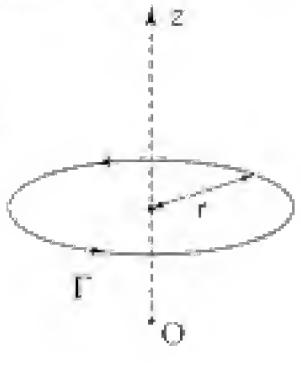
$$\oint_\Gamma \vec{v}\cdot\vec{\delta l} = \iint_\Sigma 2\vec{\Omega}\cdot\vec{\delta\Sigma}$$

(Γ et Σ doivent être le contour et la surface contenus dans le fluide). Considérons alors un contour Γ circulaire d'axe Oz, de rayon r, orienté dans le sens direct.

$$\oint_\Gamma \vec{v}\cdot\vec{\delta l} = v(r, z)2\pi r.$$

De plus, $\vec{\Omega} = \Omega(r)\vec{u}_z$. Supposons maintenant que le disque délimité par Γ soit effectivement contenu dans le fluide :

$$\iint_\Sigma 2\vec{\Omega}\cdot\vec{\delta\Sigma} = \int_0^r 2\Omega(r)2\pi r\,\mathrm{d}r.$$



Envisageons les cas $r < a$ et $r > a$.

- **Pour $r < a$**, $\Omega(r) = \Omega = \mathrm{cste}$.

soit : $2\pi r v(r, z) = 4\pi\Omega\int_0^r r\,\mathrm{d}r = 2\pi\Omega r^2$

d'où : $$\boxed{\vec{v}(r, z) = \Omega r\vec{u}_\theta \text{ pour } r < a} \quad (1)$$

Le champ des vitesses correspond à une rotation en bloc du fluide (pour $r < a$) à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. En effet, on a alors :

Copyrighted material

$$\vec{v} = \Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} = \Omega\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \Omega\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \begin{pmatrix}\partial x & -\Omega y\\ \partial y \wedge & \Omega x\\ \partial z & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\Omega\end{pmatrix} = 2\Omega\vec{u}_z.$

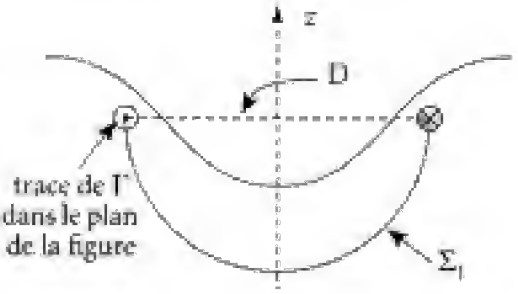
On a bien $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}$.

• **Pour $r > a$** ($\Omega(r) = \Omega$ pour $r \leqslant a$ et $\Omega(r) = 0$ pour $r > a$) :

$$2\pi r v(r, z) = 4\pi\int_0^{r}\Omega r\,dr = 2\pi a^2 \text{ d'où : } \boxed{\vec{v}(r, z) = \frac{\Omega a^2}{r}\vec{u}_\theta \text{ pour } r > a} \quad (2)$$

Commentaire

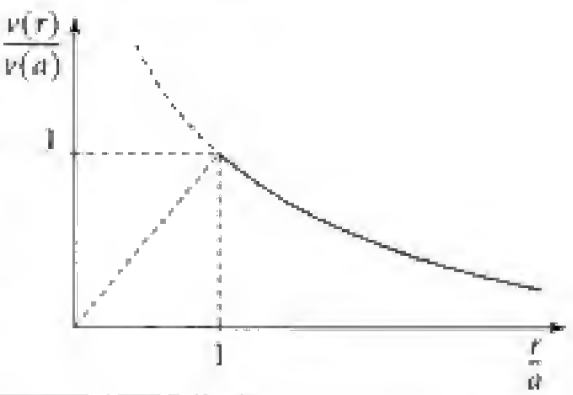
Il se peut que le disque D s'appuyant sur le contour Γ ne corresponde pas entièrement à une surface fluide. On prendra alors une surface telle que Σ_1. Il suffit alors de remarquer que si l'on prolonge (mathématiquement) le champ des vitesses (et celui de $\vec{\Omega}$) à tout l'espace, le flux de $\vec{\Omega}$ à travers Σ_1 a la même valeur que le flux qu'aurait $\vec{\Omega}$ (prolongé) à travers le disque D ($\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}$ est à flux conservatif : $\text{div}\vec{\Omega} = 0$).



Les résultats (4) et (5) sont donc valables en tout point du fluide.

Il y a bien continuité de la vitesse en $r = a$.

On retrouve l'équivalence avec un fil droit de rayon a parcouru par un courant I réparti de façon uniforme avec une densité volumique $j = \frac{I}{\pi a^2}$, soit en posant $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$ ($\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \vec{\omega}$: $\vec{\omega}$ vecteur vorticité) :



$\vec{v}(r < a) = \frac{\omega}{2}r\vec{u}_\theta$	$\leftrightarrow$	$\vec{B}(r < a) = \frac{\mu_0 j}{2}r\vec{u}_\theta$
$\vec{v}(r > a) = \frac{\omega a^2}{2r}\vec{u}_\theta$	$\leftrightarrow$	$\vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 j a^2}{2r}\vec{u}_\theta$
$\vec{\omega}$	$\leftrightarrow$	$\mu_0\vec{j}$
$\omega\pi a^2$	$\leftrightarrow$	$\mu_0 I$
$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \vec{\omega}$	$\leftrightarrow$	$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Copyrighted material

3. Champ des pressions

■ **Pour $r < a$:** le champ des pressions peut s'obtenir à partir de l'équation d'Euler.

POINT MÉTHODE

L'écoulement considéré est ici rotationnel. On aurait alors pu songer à appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant. Or celles-ci s'identifient à des cercles d'axe Oz sur lesquels la pression $P(r, z)$ est fixée, r étant donné. On ne peut donc en déduire aucune information sur $P(r, z)$.

On a donc recours à l'équation d'Euler : $\rho_0 \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho_0 \vec{g}$ (3)

avec $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} \wedge \vec{v}$.

Le régime est stationnaire : $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.

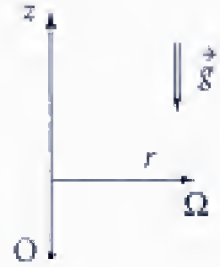
D'autre part $\vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta$ et $v^2 = v^2(r) \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\dfrac{v^2(r)}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dr}v^2(r)\right)\vec{u}_r$

et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} \wedge \vec{v} = 2\Omega\vec{u}_z \wedge v(r)\vec{u}_\theta = 2\Omega \cdot v(r) \cdot (-\vec{u}_r)$.

L'équation (3) devient :

$$\rho_0\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dr}(v^2(r) - 2\Omega v(r))\right]\vec{u}_r = -\vec{\nabla}(P + \rho_0 gz).$$

Or $v(r) = \omega r$, d'où : $\rho_0\left[\dfrac{1}{2}\Omega^2 \cdot 2r - 2\Omega^2 r\right]\vec{u}_r = -\vec{\nabla}(P + \rho_0 gz)$



et $\vec{\nabla}(P + \rho_0 gz) = \rho_0 \Omega^2 r \vec{u}_r = \vec{\nabla}\left(\rho_0 \Omega^2 \dfrac{r^2}{2}\right)$.

Finalement : $\vec{\nabla}\left(P + \rho_0 gz - \dfrac{1}{2}\rho_0 \Omega^2 r^2\right) = \vec{0}$.

Dans la région fluide associée à $r < a$, nous avons donc :

$$\boxed{P(r, z) = K + \frac{1}{2}\rho_0 \Omega^2 r^2 - \rho_0 gz \quad (K = \text{cste})} \qquad (4)$$

■ **Pour $r > a$:** l'écoulement y est irrotationnel ($\vec{\Omega} = \vec{0}$), on peut donc appliquer le théorème de Bernoulli dans tout le volume fluide correspondant.

On a donc ici avec gz l'énergie potentielle de pesanteur rapportée à l'unité de masse :

$$\frac{P(r, z)}{\rho_0} + \frac{v^2(r)}{2} + gz = \text{cste}.$$

Or $v(r) = \dfrac{\Omega a^2}{r} \Rightarrow$ $\boxed{P(r, z) = K' - \rho_0 gz - \dfrac{1}{2}\rho_0 \dfrac{\Omega^2 a^4}{r^2} ;\ K' = \text{cste} ;\ r > a}$ (5)

■ Il reste à déterminer les constantes K et K'.

L'énoncé nous indique que $P(r, z) \to P_0$ quand $r \to +\infty$ et $z = 0$, d'où :

$$K' = P_0 \text{ et } P(r > a, z) = P_0 - \rho_0 g z - \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\Omega^2 a^4}{r^2} \quad (6)$$

D'autre part, la continuité de la pression en $r = a$ donne :

$P(a^-, z) = P(a^+, z)$, soit d'après (4) et (6) :

$$K + \frac{1}{2}\rho_0 \Omega^2 a^2 - 0 = P_0 - 0 - \frac{1}{2}\rho_0 \Omega^2 a^2 \Rightarrow K = P_0 - \rho_0 \Omega^2 a^2 \quad (7)$$

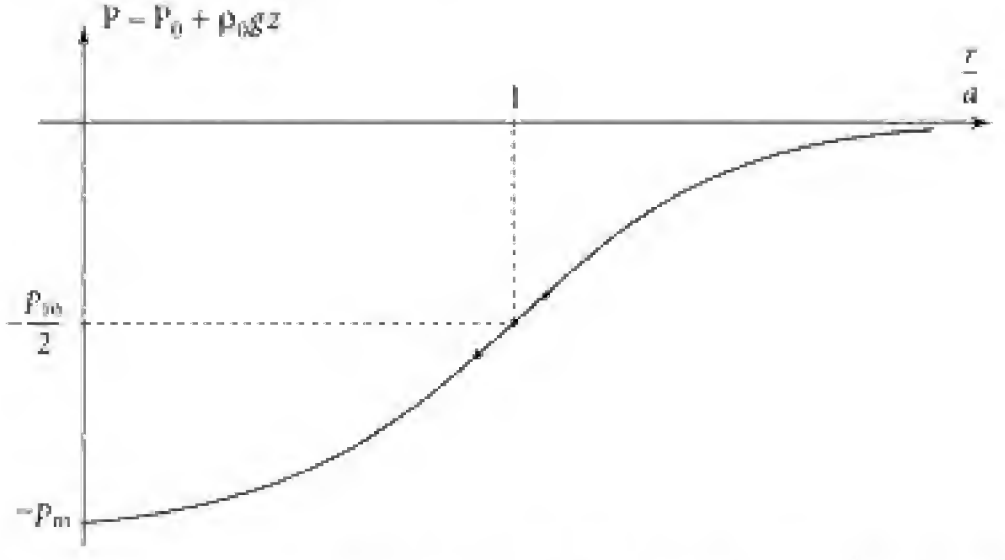
Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} r < a : P(r, z) = P_0 - \rho_0 g z + \frac{1}{2}\rho_0 \Omega^2 (r^2 - 2a^2) \\ r > a : P(r, z) = P_0 - \rho_0 g z - \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\Omega^2 a^4}{r^2} \end{array}} \quad (8)$$

■ **Courbe** $r \to P - P_0 + \rho_0 g z = f(r)$

Pour $r < a$: $f(r) = \rho_0 \Omega^2 a^2 \left(-1 + \frac{r^2}{2a^2}\right) = -p_m \cdot \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)$.

Pour $r > a$: $f(r) = -\frac{1}{2}\rho_0 \Omega^2 a^2 \frac{a^2}{r^2} = -\frac{p_m}{2}\frac{a^2}{r^2}$.



4. a. La dépression cherchée s'écrit : $p_m = \rho_0 \Omega^2 a^2$. Or $v_{max} = \Omega a \Rightarrow$ $\boxed{p_m = \rho_0 v_{max}^2}$

A.N. : $p_m = 1{,}3 \cdot \left(\frac{150 \cdot 10^3}{3\,600}\right)^2 \approx$ **23 mbar** et $\boxed{\frac{p_m}{P_0} = 0{,}02}$

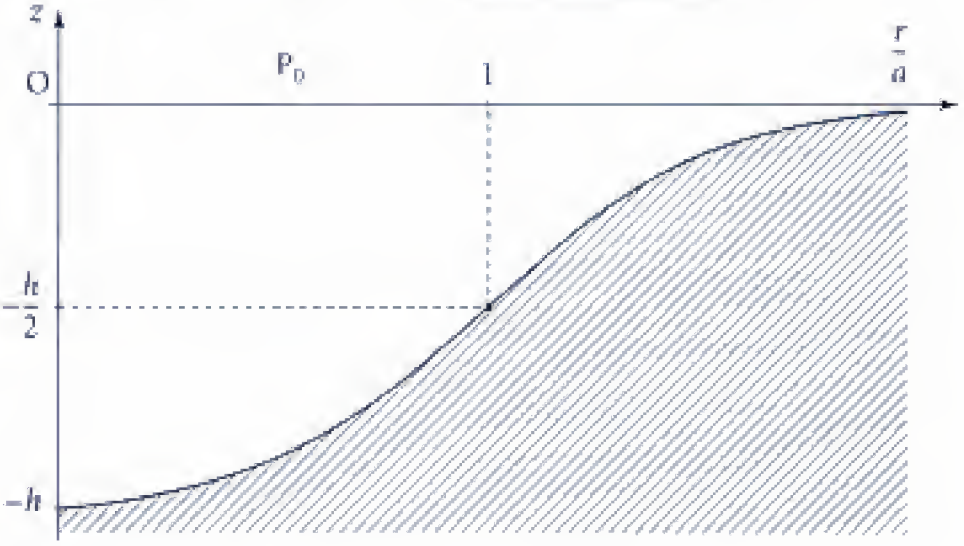
4. b. Tourbillon de vidange

La surface correspond à l'isobare P_0, on obtient donc :

$$r > a : P_0 = P_0 - \rho_0 g z - \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\Omega^2 a^4}{r^2} \text{ et } \boxed{z_s = -\frac{1}{2}\frac{\Omega^2 a^2}{g} \cdot \frac{a^2}{r^2}} \quad (9)$$

Copyrighted material

$r < a$: $P_0 = P_0 - \rho_0 g z + \frac{1}{2}\rho_0 \Omega^2 a^2 \left(\frac{r^2}{a^2} - 2\right)$ et $\boxed{z_s = -\frac{1}{2}\frac{\Omega^2 a^2}{g}\left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right)}$ (10)



$\boxed{h = \frac{\Omega^2 a^2}{g}}$

Commentaires

• Les expressions (9) et (10) fixant l'équation de la surface libre (méridienne dans un plan vertical contenant l'axe Oz) font apparaître les grandeurs $\frac{z_s}{a}$ et $\frac{r}{a}$ et un paramètre sans dimension $\eta = \frac{\Omega^2 a}{g}$, qui n'est rien d'autre que le rapport de l'accélération liée au mouvement de rotation (calculée en $r = a$) et de l'accélération de la pesanteur.

• La surface se creuse d'autant plus que la vorticité est forte dans la zone $r < a$ ou, plus exactement, que l'accélération $\Omega^2 a$ qu'elle engendre est importante comparée à l'accélération de la pesanteur.

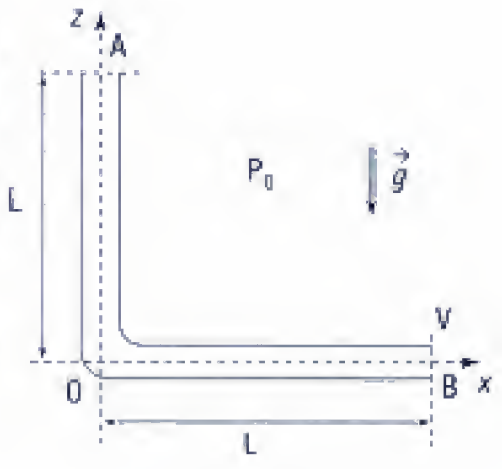
202 Vidange d'un tube coudé

Un tube de faible section s ($s = a^2$ avec $a \ll L$) est constitué de deux branches de même longueur L, l'une verticale AO, l'autre horizontale OB.

L'extrémité supérieure A est ouverte alors que l'extrémité inférieure B est fermée par une vanne V.

L'atmosphère est à la pression uniforme P_0.

À $t = 0^+$, la vanne est ouverte. Le fluide est en écoulement parfait, de masse volumique constante et uniforme ρ.



Copyrighted material

1. Déterminer, juste après l'ouverture, la variation de pression ΔP en tout point du fluide.

2. a. On note $z'(t)$ la hauteur de liquide dans le tube vertical. Montrer que l'on a :

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = -g\left[1 - \frac{L}{z' + L}\right] \quad (z' > 0)$$

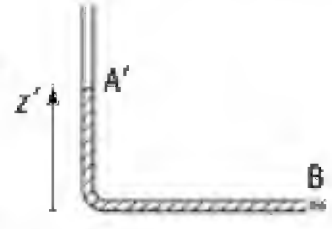
En déduire la norme $v(\tau)$ de la vitesse du fluide à l'instant τ où la branche verticale s'est juste vidée de son fluide.

2. b. Évaluer τ de différentes manières.

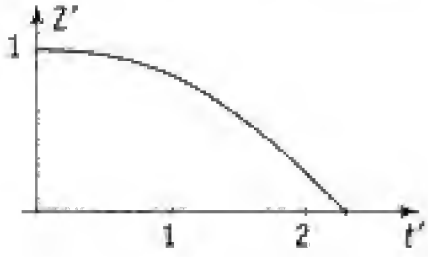
On pourra également montrer que l'on a, z' désignant la cote du niveau du fluide dans la branche verticale :

$$\frac{dZ'}{dt'} = -\sqrt{2\left[1 - Z' + \ln\left(\frac{1 + Z'}{2}\right)\right]} \text{ où } Z' = \frac{z'}{L} \text{ et } t' = t\sqrt{\frac{g}{L}}$$

(variables réduites).



Le schéma ci-contre représente la courbe $t' \to Z'(t')$.



1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de l'hydrostatique.
- Équation d'Euler : intégration sur une ligne de courant.
- Accélération d'une particule fluide.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Après suppression de la vanne, l'accélération en un point du fluide n'est plus nulle. On écrira donc l'équation d'Euler que l'on intégrera, à $t = 0^+$, d'une part de A à B, d'autre part d'un point M du fluide à B (ou à A).

On considérera que la vitesse est uniforme sur toute section.

2. a. On reprend le raisonnement précédent à l'instant t où la hauteur de fluide dans la branche verticale est $z'(t)$. On justifiera que l'on a $v(t) = -\frac{dz'}{dt}$ ($v(t)$ définie positive).

La valeur de τ n'est pas nécessaire pour déterminer $v(\tau)$.

b. On peut chercher à évaluer le temps de vidange τ de la branche verticale :

– à partir de $v(\tau)$,

– en formant un temps caractéristique lié aux grandeurs significatives du problème physique (ici L et g),

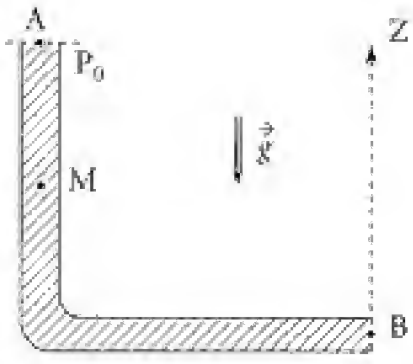
– par une lecture directe du graphe $t' \to Z'(t')$.

Copyrighted material

3. Solution

1. ■ Avant l'ouverture de la vanne, le fluide est en équilibre hydrostatique, soit en notant Z l'altitude du point considéré :

$$\boxed{P(Z) = P_0 + \rho g(L - Z)} \quad (0)$$



« Juste après » l'ouverture de la vanne, bien que ses vitesses restent négligeables, le fluide présente une accélération non nulle, la contrainte exercée au niveau de la vanne étant supprimée. Il en résulte une variation de la pression au sein du fluide.

Écrivons l'équation d'Euler sous la forme :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(P + \rho g z).$$

Intégrons cette équation, à t fixé, le long du tube assimilé à une « ligne de courant » :

$$\rho\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} + \rho\int (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v})\vec{\delta l} = -\int \vec{\nabla}\left(P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z\right) \cdot \vec{\delta l} \quad (1)$$

La deuxième intégrale est nulle, $\vec{\delta l}$ étant parallèle à la vitesse $\vec{v}$.

Pour la troisième intégrale, notons, qu'à t fixé : $\vec{\nabla}\,U(M, t) \cdot \vec{\delta l} = d_1 U$ (différentielle par rapport aux seules variables d'espace) d'où :

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{\nabla}\left(P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z\right) \cdot \vec{\delta l} = \left[P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z\right]_{M_1, t}^{M_2, t} \quad (2)$$

Pour le premier terme, on a $\vec{v} = v(M, t)\vec{u}$ et $\vec{\delta l} = \delta l \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur fixe tangent au tube. D'où :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \delta l.$$

L'incompressibilité du fluide implique la conservation du débit volumique. La section du tube étant uniforme, il vient :

$$v(M, t) = v(t).$$

La norme de la vitesse est donc la même en tout point du fluide contenu dans le tube. Il en est de même de la dérivée locale :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(M, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(t) = a(t)$$

d'où :

$$\int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = a(t)\int_{M_1}^{M_2} \delta l \quad (3)$$

(1), (2) et (3) donnent alors : $\rho a(t)\int_{M_1}^{M_2} \delta l = -\left[P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z\right]_{M_1, t}^{M_2, t}$ (4)

Copyrighted material

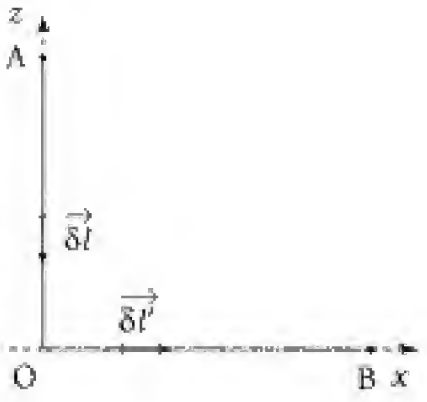
■ Appliquons l'équation (4) à $t = 0^+$ entre les points A et B ($M_1 = A$ et $M_2 = B$) :

$$\rho a(t = 0^+) \cdot 2L = -[P(B, 0^+) - P(A, 0^+)] + 0 - \rho g(z_B - z_A).$$

Or $z_A - z_B = L$; $P(A, t) = P_0$ d'où $P(A, t = 0^+) = P_0$ et $P(B, 0^+) = P_0$ (en supposant qu'à la sortie de la vanne, on a un écoulement parallèle pour lequel la pression est celle de l'air extérieur, c'est-à-dire P_0).

Finalement :

$$a(0^+)2L = gL \Rightarrow \boxed{a(0^+) = \frac{g}{2}} \quad (5)$$



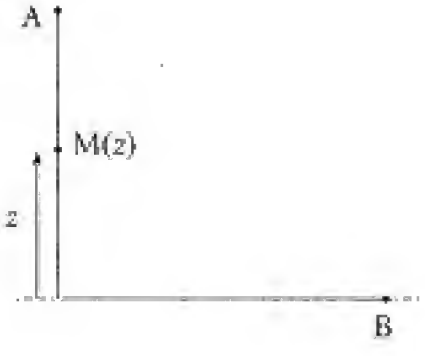
■ Reprenons le raisonnement précédent entre les points $M_1 = A$ et $M_2 = M(z)$:

$$\rho a(0^+) \cdot (L - z) = -[P(M, 0^+) - P_0] - \rho g(z_M - z_A) + 0$$

$$\rho a(0^+) \cdot (L - z) = -(P(M, 0^+) - P_0) + \rho g(L - z)$$

d'où $P(M(z), 0^+) = P_0 + \rho(L - z)(g - a(0^+))$ et avec (5) :

$$\boxed{P(M(z), 0^+) = P_0 + \frac{1}{2}\rho g(L - z)} \quad (6)$$



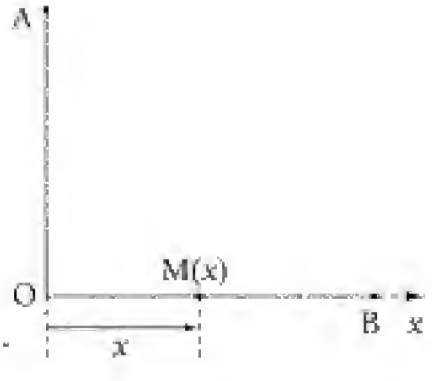
■ Enfin, avec $M_1 = M(x)$ et $M_2 = B$:

$$\rho a(0^+)(L - x) = -[P_0 - P(M(x), 0^+)] + 0 + 0$$

soit : $$\boxed{P(M(x), 0^+) = P_0 + \frac{1}{2}\rho g(L - x)} \quad (7)$$

On a bien la continuité de la pression en O ($x = 0$ et $z = 0$) :

$$P[M(z = 0), 0^+] = \left(P_0 + \frac{1}{2}\rho gL\right) = P[M(x = 0), 0^+].$$



■ Les équations (0), (6) et (7) permettent de définir le « saut » de pression qui apparait du fait de l'ouverture de la vanne.

$$\Delta P[M(z), 0^+] = \left(P_0 + \frac{1}{2}\rho g(L - z)\right) - (P_0 + \rho g(L - z))$$

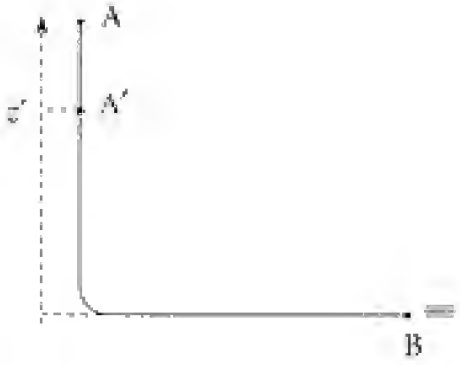
$$\boxed{\Delta P[M(z), 0^+] = -\frac{1}{2}\rho g(L - z)}$$

De même : $$\Delta P[M(x), 0^+] = \left(P_0 + \frac{1}{2}\rho g(L - x)\right) - (P_0 + \rho gL)$$

$$\boxed{\Delta P[M(z), 0^+] = -\frac{1}{2}\rho g(L + x)}$$

Copyrighted material

2. a. Considérons le tube à l'instant $t > 0$. Le niveau du liquide est descendu en A′($z'(t)$).



Réutilisons le résultat (4), à l'instant t entre les points A′ et B. Dès lors :

$$\rho a(t)\cdot(z'+L) = -[P(B,t)-P(A',t)] - \frac{\rho}{2}[v^2(B,t)-v^2(A',t)] - \rho g\underbrace{(z_B-z_{A'})}_{-z'}.$$

Or $P(B, t>0) = P_0 = P(A', t)$ et v ne dépend que de t, d'où : $\rho a(t')\cdot(z'+L) = 0+0+\rho g z' \quad (8) \quad z'\cdot 0 \leqslant z' \leqslant L.$

De plus, comme v ne dépend que de t : $a(t) = \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{dv}{dt}$.

Or $\vec{v}(A', t) = \dfrac{dz'}{dt}\vec{u}_z$, z' cote du point A′ $\Rightarrow v(t) = -\dfrac{dz'}{dt} > 0$ et $a(t) = -\dfrac{d^2z'}{dt^2}$.

L'équation (8) devient avec (9) : $(z'+L)\dfrac{d^2z'}{dt^2} = -gz'$

soit encore : $$\frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{gz'}{z'+L} = -g\left[1-\frac{L}{z'+L}\right].$$

Pour obtenir la vitesse à l'instant τ où la partie verticale du tube est vidangée, multiplions l'équation précédente par $\dfrac{dz'}{dt} : \dfrac{dz'}{dt}\cdot\dfrac{d^2z'}{dt^2} = -g\left[\dfrac{dz'}{dt}-\dfrac{L}{z'+L}\dfrac{dz'}{dt}\right]$

soit encore : $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right] = -g\frac{d}{dt}\{z'-L\ln(z'+L)\} \quad (10)$$

Intégrons entre l'instant initial $t = 0^+$ et l'instant τ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\Big|_\tau - 0 = g\{L[\ln(z'+L)]_{z'=L}^{z'=0} + L\} \quad (\text{à } t=0^+, v=0)$$

d'où : $v^2(\tau) = 2gL\cdot\{1-\ln 2\} \Rightarrow \boxed{v(\tau) = \sqrt{2gL}\sqrt{1-\ln 2}}$

2. b. Pour évaluer le temps τ, on peut :

• Soit considérer que : $\tau \sim \dfrac{L}{v(\tau)} \sim \sqrt{\dfrac{L}{2g(1-\ln 2)}} \sim 1{,}3\sqrt{\dfrac{L}{g}} \sim \sqrt{\dfrac{L}{g}}$.

On a de façon plus précise : $\dfrac{dz'}{dt} = -v(t)$, d'où $dt = -\dfrac{dz'}{v(t)}$

soit encore : $\tau = -\displaystyle\int_L^0 \frac{dz'}{v[t(z')]} > -\int_L^0 \frac{dz'}{v(\tau)} = \frac{L}{v(\tau)}$.

Le résultat $1{,}3\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ sous-évalue donc τ…

Copyrighted material

• Soit former un temps caractéristique à partir des grandeurs caractéristiques g et L définissant le problème :

$$\tau = L^{\alpha} g^{\beta} \Rightarrow \boxed{\tau \sim \sqrt{\frac{L}{g}}} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = -\frac{1}{2}\right).$$

• Soit enfin faire appel à une intégration numérique de l'équation différentielle obtenue à partir de (10) : $\frac{1}{2}\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 - 0 = -g(z' - L) + gL\{\ln(z' + L) - \ln(2L)\}$

d'où : $\frac{dz'}{dt} = -\sqrt{2gL}\sqrt{\ln\left(\frac{\frac{z'}{L} + 1}{2}\right) + \left(1 - \frac{z'}{L}\right)} \quad \left(\frac{dz'}{dt} < 0\right)$.

Posons alors $Z' = \frac{z'}{L}$ et $t' = \frac{t}{\tau_c}$ où $\tau_c = \sqrt{\frac{L}{g}}$ (variables réduites) :

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dZ'}{dt'} \cdot \frac{L}{\tau_c} = -\sqrt{2gL}\sqrt{1 - Z' + \ln\left(\frac{1 + Z'}{2}\right)}$$

soit : $\boxed{\frac{dZ'}{dt'} = -\sqrt{2\left[1 - Z' + \ln\left(\frac{1 + Z'}{2}\right)\right]}}$

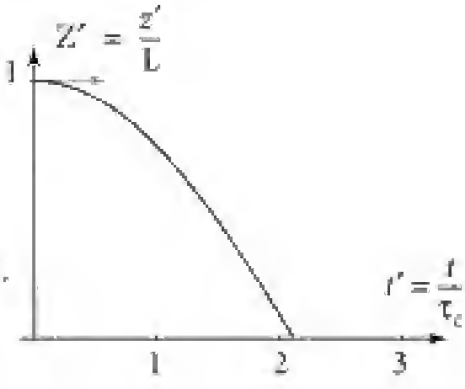
D'où le graphe $t' \to Z(t')$ donné dans l'énoncé.

On a bien :

$Z'(0) = 1 \quad (z'(0^+) = L)$

$\frac{dZ'}{dt'}(0) = 0 \quad (v(0^+) = 0)$

$\left|\frac{dZ'}{dt'}(\tau)\right| = \sqrt{2(1 - \ln 2)} \Rightarrow v(\tau) = \sqrt{2gL}\sqrt{1 - \ln 2}.$



La lecture du graphe fournit : $\frac{\tau}{\tau_c} \sim 2$ d'où :

$$\boxed{\tau \sim 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

203 Étude d'un régime transitoire

Un réservoir cylindrique, d'axe vertical et de grande section, alimente une canalisation cylindrique horizontale, de faible section intérieure constante, et de grande longueur L.

Cette canalisation est fermée, à son extrémité $x = L$, par une vanne V. La hauteur d'eau dans le réservoir, au-dessus du niveau de la conduite, est h.

Copyrighted material

On ouvre complètement la vanne V à $t = 0$; on admet que pendant la durée du régime transitoire dans la conduite, h ne varie pratiquement pas. L'écoulement de l'eau dans la conduite est supposé unidimensionnel (vitesse uniforme $v(x, t)\vec{u}_x$ sur chaque section droite). L'eau sera assimilée à un fluide en écoulement parfait, homogène et incompressible, de masse volumique ρ.

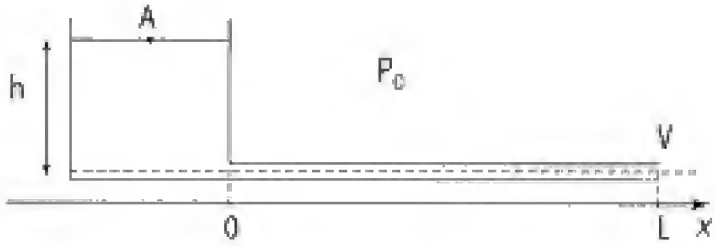
1. Soit deux points A et B d'une ligne de courant $(\mathcal{C}, t)$ à un instant t donné ; établir que :

$$P(B, t) + \rho\frac{v^2(B, t)}{2} + \rho g z(B) = P(A, t) + \rho\frac{v^2(A, t)}{2} + \rho g z(A) - \rho\int_{A(\mathcal{C})}^{B}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\delta\vec{l}$$

(théorème de Bernoulli généralisé aux écoulements non stationnaires).

2. Montrer que la vitesse de l'eau est uniforme le long de la conduite, à un instant donné.

Établir l'expression de la pression $P(x, t)$ dans la canalisation en fonction de P_0 (pression ambiante), ρ, L, $\frac{dv}{dt}$ et x.



3. Moyennant une approximation que l'on justifiera, établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. La résoudre en posant $v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{2gh}$ et $\tau = \frac{2L}{v_\infty}$.

A.N. : $h = 10$ m ; $L = 100$ m ; $g = 10$ m · s^{-2} : évaluer v_∞, τ et la durée au bout de laquelle v ne diffère de v_∞ que de 1 %. Conclure.

4. Le régime permanent étant atteint, on ferme rapidement la vanne V à partir de l'instant $t' = 0$; la vitesse d'écoulement en $x = L$ varie selon la loi $v(t') = v_\infty\cdot\left(1 - \frac{t'}{T}\right)$, T est la durée de fermeture. Déterminer la pression $P(x, t')$ dans la conduite, pour $0 \leqslant t' \leqslant T$. Où et quand est-elle maximale ?

A.N. : aux valeurs numériques du **3.**, on ajoute : $P_0 = 10^5$ Pa = 1 bar ; $\rho = 10^3$ kg · m^{-3} et $T = 0{,}1$ s. Calculer la pression maximale atteinte dans la conduite. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation d'Euler.
- Ligne de courant à t fixé.
- Écoulement incompressible.
- Écoulement parallèle.

Copyrighted material

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Il n'est pas possible d'appliquer le théorème de Bernoulli, l'écoulement étant instationnaire. Il faut revenir à l'équation d'Euler que l'on intègrera, à un instant t donné, sur une ligne de courant.

2. L'uniformité du champ des vitesses dans le tube – à t fixé – est liée à l'incompressibilité du fluide. On fera h = este et donc $v_A \sim 0$.

3. Dans la plus grande partie du réservoir, on pourra considérer que le fluide est quasiment au repos à l'exception d'un domaine $\mathcal{D}$ faiblement étendu situé près de l'embouchure de la canalisation. Plus la longueur L de cette dernière sera importante, plus le rôle de $\mathcal{D}$ pourra être négligé.

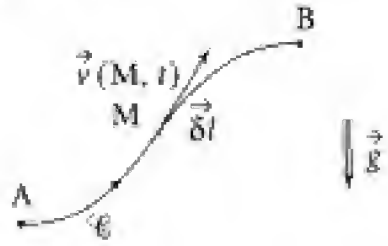
3. Solution

1. Écrivons l'équation d'Euler sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\,P = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + gz\right).$$

Considérons à l'instant t une ligne de courant, multiplions scalairement par un déplacement $\vec{\delta l}$, le long de cette ligne de courant ($\vec{\delta l}$ colinéaire à $\vec{v}$) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} + \vec{\delta l} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right) = 0.$$



Intégrons entre les deux points A et B, le long de $(\mathscr{C})$:

$$\int_{A(\mathscr{C})}^{B} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M, t) \cdot \vec{\delta l} + \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) \cdot \vec{\delta l} = 0.$$

Or $\overrightarrow{\text{grad}}\,U(x, y, z, t) \cdot \vec{\delta l} = d_t U$ (différentielle de U à t fixé)

et $\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\,U \cdot \vec{\delta l} = U(B, t) - U(A, t)$ soit :

$$\boxed{\int_{A(\mathscr{C})}^{B} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M, t) \cdot \vec{\delta l} + \left(\frac{v_B^2(t)}{2} + \frac{P_B(t)}{\rho} + gz_B\right) - \left(\frac{v_A^2(t)}{2} + \frac{P_A(t)}{\rho} + gz_A\right) = 0}$$

2. L'écoulement est incompressible, on a donc conservation du débit volumique q, à un instant t donné, à travers un même tube de courant et donc ici, à travers toute section de la canalisation.

D'où : $q(t) = s_1 v(x_1, t) = s_2 v(x_2, t)$.

Or $s_1 = s_2 = s$ d'où : $v(x_1, t) = v(x_2, t)$.

Le champ des vitesses est uniforme, à tout instant, dans la conduite.

Ainsi $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} v(t) \vec{u}_x = \frac{dv(t)}{dt} \vec{u}_x$.

Copyrighted material

À la sortie, l'eau forme un jet que l'on supposera localement cylindrique, au contact de l'air libre : la pression y vaut P_0 (écoulement parallèle sur lequel on néglige l'effet de la pesanteur). Appliquons le résultat de la question **1.** le long d'une ligne de courant rectiligne dans la conduite, entre un point M d'abscisse x et l'extrémité B($x = L$) :

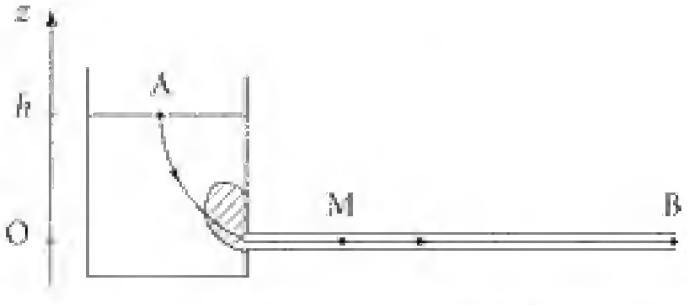
$v_M(t) = v_B(t) = v(t)$; $z_M = z_B$ (que l'on peut choisir nul)

$$\int_M^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = (L - x)\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{P(x, t) = P_0 + \rho(L - x)\frac{dv}{dt}}$$

La pression est une fonction affine de x à un instant donné.

3. Imaginons une ligne de courant, allant d'un point A de la surface du réservoir, où la vitesse est quasi-nulle, au point B, extrémité de la conduite :



$P_A = P_B = P_0$; $v_A = 0$ donc le résultat de la question **1.** donne, après division par ρ :

$$gh = \int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} + \frac{v^2}{2}.$$

La contribution essentielle à l'intégrale curviligne est celle de la partie rectiligne dans la conduite qui vaut $L\dfrac{dv}{dt}$.

Nous négligerons celle associée à la portion de ligne de courant dans le réservoir, sur laquelle la dérivée locale $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ a des valeurs appréciables, car sa longueur est certainement très inférieure à L. (On peut en effet supposer que le liquide est presque immobile dans le réservoir, sauf dans une petite région voisine de l'entrée de la conduite, hachurée sur la figure.)

Nous écrivons donc :

$$\boxed{gh = L\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2}}$$

Copyrighted material

La vitesse limite est $v_\infty = \sqrt{2gh}$ (formule de Torricelli, $\frac{dv}{dt} = 0$) ; l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_\infty^2 - v^2}{2L}.$$

Séparons les variables : $\frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{dt}{2L}$.

Posons $y = \frac{v}{v_\infty}$ et $\tau = \frac{2L}{v_\infty}$: $\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dt}{\tau}$

soit encore : $\frac{1}{2}\left[\frac{dy}{1+y} + \frac{dy}{1-y}\right] = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{t}{\tau}$ ($y(0) = 0$ car $v(0) = 0$)

d'où $\frac{1+y}{1-y} = \exp\left(\frac{2t}{\tau}\right) \Rightarrow y = \frac{\exp\left(\frac{2t}{\tau}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2t}{\tau}\right) + 1} = \frac{\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$.

Finalement, $y = \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow$ $\boxed{v(t) = v_\infty \cdot \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)}$

A.N. : $v_\infty = 14\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\tau = 14\ \text{s}$

$$v = v_\infty \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{99}{100} v_\infty \Rightarrow \tanh\left(\frac{t_1}{\tau}\right) = 0{,}99.$$

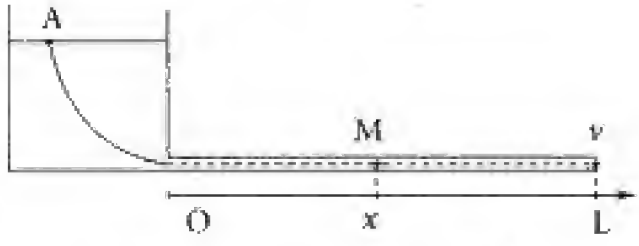
Pour $\frac{t_1}{\tau}$ suffisamment grand : $\frac{v_1}{v_\infty} \approx \frac{1 - \exp\left(-\frac{2t_1}{\tau}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2t_1}{\tau}\right)} \approx 1 - 2\exp\left(-\frac{2t_1}{\tau}\right) = 0{,}99,$

ce qui donne $\exp\left(-\frac{2t_1}{\tau}\right) \approx 5 \cdot 10^{-3}$ et $\boxed{t_1 \sim 37\ \text{s}}$

Le régime permanent n'est pas atteint immédiatement, et il faut supposer que la section du réservoir est assez grande pour que h n'ait pas varié pendant cette durée.

4. Dans la conduite, on a maintenant : $v(t') = v_\infty \cdot \left(1 - \frac{t'}{T}\right)$ pour $t' \in (0, T)$.

Considérons la portion (AM) de ligne de courant et appliquons le résultat de la première question avec la même approximation (*cf.* **3.**) que précédemment.



$$P(A, t) + \rho\frac{v^2(A, t)}{2} + \rho g z(A) = P(M, t) + \rho\frac{v^2(M, t)}{2} + \rho g z(M) + \rho\int_A^M \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\vec{\delta l}$$

où $P(A, t) = P_0$; $v(A, t) = 0$; $z(A) - z(M) = h$

et $\int_A^M \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = x\frac{dv}{dt}$ (pour x pas trop petit… : *cf.* approximation du **3.**).

Copyrighted material

Soit : $P(x, t) = P_0 + \rho g h - \frac{1}{2} v_\infty^2 \cdot \left(1 - \frac{t'}{T}\right)^2 + \rho \frac{x v_\infty}{T}$.

Finalement : $\boxed{P(x, t) = P_0 + \rho g h \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{t'}{T}\right)^2\right] + \rho \frac{x v_\infty}{T}}$

Elle est maximale pour $x = L$, c'est-à-dire juste derrière la vanne, et lorsque la vitesse v s'annule, à $t' = T$:

$$\boxed{P_{max} = P_0 + \rho g h + \rho L \frac{v_\infty}{T}}$$

A.N. : $\rho g h = 10^5$ Pa = 1 bar = P_0 ; $\rho L \frac{v_\infty}{T} = \frac{10^3 \times 14}{10^{-1}} = 1{,}4 \cdot 10^7$ Pa $= 1{,}4 \cdot 10^2$ bar.

À la précision des données, P_0 et $\rho g h$ doivent être négligés.

$$P_{max} \approx 1{,}4 \cdot 10^2 \text{ bars.}$$

Commentaire

Cette surpression importante, due à l'inertie de l'eau contenue dans la conduite lors de la fermeture rapide de la vanne, porte le nom de « coup de bélier ».
En fait, pour une conduite de cette longueur, il faut tenir compte de la compressibilité du liquide et de l'élasticité de la conduite. On observe, pour $t > T$, un phénomène de réflexions multiples sur les extrémités de la conduite d'une onde de compression-dilatation, qui s'amortit progressivement. Cela peut avoir un effet destructeur.

204 Mise en mouvement d'une boule par un fluide

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, une boule de masse m se déplace dans un fluide incompressible, avec la vitesse $\vec{w}(t) = w(t)\vec{u}_z$. On note ρ la masse volumique du fluide et a le rayon de la boule. On néglige les effets de la pesanteur et on suppose que l'écoulement parfait du fluide autour de la boule est irrotationnel.

Partie A

Le fluide est au repos à l'« infini ».

1. a. On impose au potentiel des vitesses ϕ, défini par $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$, la forme :

$$\phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{où} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

On notera $\theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{OM})$: (r, θ, φ) coordonnées sphériques de centre O et d'axe Oz.
Le point O, centre de la boule, est animé dans $\mathcal{R}_g$ de la vitesse $\vec{w}(t)$. M est un point courant du fluide.

Copyrighted material

Justifier brièvement ce choix de ϕ, puis en déduire le champ des vitesses $\vec{v}(r, \theta, t)$ au sein du fluide. On vérifiera que l'on a $\vec{A} = -\frac{a^3}{2}w(t)\vec{u}_z$.

b. Déterminer l'énergie cinétique contenue dans le fluide à l'instant t. On exprimera le résultat en fonction de ρ, $\mathcal{V}$ (volume de la boule) et $w(t)$.

Rappel : l'élément de volume $\delta\tau$ centré sur le point M s'exprime en coordonnées sphériques selon $\delta\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$.

2. a. L'opérateur exerce sur la boule la force $\vec{f} = f_0 \cos w_0 t \vec{u}_z$ et la boule est immobile à $t = 0$ $(w(0) = 0)$. Donner l'expression de l'amplitude de son mouvement. On utilisera le résultat obtenu au **1. b.**

b. On désire retrouver le résultat précédent en calculant directement la force $\vec{f}_p$ qu'exerce le fluide sur la boule.

α) Établir le théorème de Bernoulli dépendant du temps :

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + P + \rho\frac{v^2}{2} = K(t)$$

où $K(t)$ est une fonction du temps, uniforme dans le fluide, que l'on ne cherchera pas à calculer.

Le point M étant fixé (dans le fluide), montrer que l'on :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{a^3}{2}\frac{dw}{dt}\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{a^3 w^2}{2 r^3}(1 - 3\cos^2\theta).$$

β) Considérant que $\lim_{r\to\infty} P(r, \theta, t) = P_0$ montrer que :

$$P(a, \theta, t) = P_0 - \frac{1}{8}\rho w^2(5 - 9\cos^2\theta) + \rho\frac{a}{2}\frac{dw}{dt}\cos\theta.$$

En déduire que l'on a : $\vec{f}_p = -\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\frac{d\vec{w}}{dt}$.

Rappel : l'élément de surface $\delta\Sigma$ de la sphère de centre O et de rayon a associé à $\theta \in (\theta, \theta + d\theta)$ et $\varphi \in (0, 2\pi)$ est $\delta\Sigma = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$.

Partie B

Le fluide est maintenant animé, à grande distance, d'une vitesse $\vec{v_0}(t) = v_0(t)\vec{u}_z$. La boule n'est plus soumise qu'à l'action du fluide et prend une vitesse $\vec{w} = w(t)\vec{u}_z$.

1. En reprenant le raisonnement précédent, donner la nouvelle expression $\phi'(r, \theta)$ du potentiel des vitesses, et montrer que la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur la boule est :

$$\vec{f_p'} = -\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\left(\frac{d\vec{w}}{dt} - 3\frac{d\vec{v_0}}{dt}\right).$$

2. À $t = 0$, on a : $v_0(0) = w(0) = 0$. Déterminer $w(t)$ en fonction de $v_0(t)$ et des masses volumiques ρ (du fluide) et μ (de la boule).

Copyrighted material

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Écoulement irrotationnel : potentiel des vitesses.
- Écoulement incompressible.
- Conditions aux limites pour un fluide parfait.
- Équation d'Euler.
- Théorème de l'énergie cinétique.
- Théorème de la résultante dynamique.

Outils mathématiques

- Coordonnées sphériques.
- Opérateur gradient.

2. Ce qu'il faut comprendre

A.1. a. Il faut justifier que le vecteur $\vec{A}$ est nécessairement parallèle à $\vec{u}_z$ (direction de $\vec{w}$).

b. Le milieu fluide est théoriquement infini. L'intégrale donnant l'énergie cinétique converge cependant (le champ des vitesses décroît suffisamment rapidement quand r devient grand devant a).

2. a. Il n'y a pas de puissance développée par des efforts intérieurs au fluide (absence de viscosité et écoulement incompressible). On cherchera donc à appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {fluide + boule}.

b. α) Comme tout théorème de Bernoulli, il peut être établi en partant de l'équation d'Euler et en traduisant les hypothèses du texte (écoulement irrotationnel, ...).

Pour calculer $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, on prendra garde à ne pas oublier que O est un point mobile.

β) Pour le calcul de $\vec{f}_p$, on tiendra compte des symétries...

B.1. a. On ajoutera au potentiel des vitesses précédent ($\vec{A}$ ayant une valeur différente à déterminer) celui associé à un écoulement uniforme de vitesse $v_0(t)\vec{u}_z$. Le raisonnement à suivre est alors semblable à celui mené au **A. 2. b**.

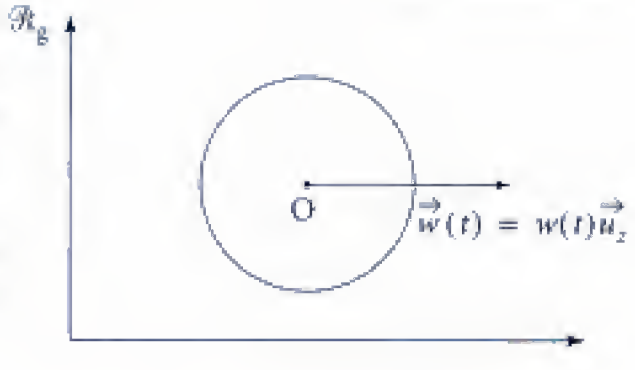
2. L'opérateur n'agit plus sur la boule...

3. Solution

Partie A

A. 1. a. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ la boule se déplace à la vitesse $w(t)\vec{u}_z$ dans un fluide parfait au repos à l'infini.

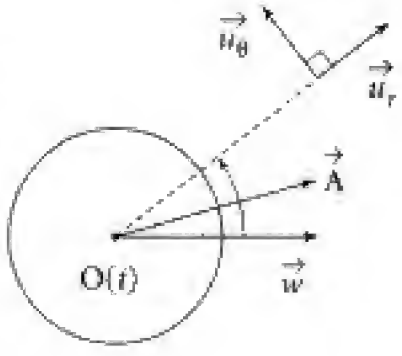
Le mouvement du fluide est associé à un écoulement irrotationnel et incompressible.



Copyrighted material

On peut donc écrire $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}[\phi(r, \theta)]$, avec $\Delta\phi = 0$.

Tout point du fluide est repéré par des coordonnées sphériques de centre $O(t)$ et d'axe $(O(t), \vec{u_z})$.



L'énoncé propose $\phi = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{r^3}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Or le potentiel est invariant par rotation autour de l'axe $(O, \vec{u_z})$, le vecteur $\vec{A}$ est donc porté par cet axe : $\vec{A} = A\vec{u_z}$. D'autre part, du fait de la linéarité des équations, A est proportionnel à $w(t)$.

Soit : $\vec{A} = \alpha w(t)\vec{u_z}$ et $\phi(M, t) = \alpha\dfrac{w(t)\cos\theta}{r^2}$.

À M fixé dans $\mathcal{R}_g$, les variables θ et r sont également fonctions du temps.

On a de plus $\Delta_{\text{sphérique}}\left(\dfrac{\cos\theta}{r^2}\right) = 0$ (*cf.* analogie avec le potentiel V crée par un dipôle électrostatique $\vec{p}$ placé en un point O : $V = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r^2}$ et $\Delta V = 0$ pour $r \neq 0$ ...).

Le champ des vitesses devient :

$$\vec{v}\left|\begin{array}{ll} -2\alpha w(t)\dfrac{\cos\theta}{r^3} & \vec{u_r} \\ -\alpha w(t)\dfrac{\sin\theta}{r^3} & \vec{u_\theta} \end{array}\right.$$

Pour déterminer la constante α, il faut assurer les conditions aux limites sur la surface de la boule. Le fluide étant parfait, en doit avoir continuité de la composante normale de la vitesse relative du fluide :

$$\vec{v} \cdot \vec{u_r} = \vec{w} \cdot \vec{u_r}.$$

Soit : $-2\alpha w(t)\dfrac{\cos\theta}{a^3} = w(t)\cos\theta \Rightarrow \alpha = -\dfrac{a^3}{2}$.

D'où : $\boxed{\phi(r, \theta) = -\dfrac{a^3}{2}w\dfrac{\cos\theta}{r^2}}$ (1) et $\boxed{\vec{v}\left|\begin{array}{l} \dfrac{a^3}{r^3}w(t)\cos\theta \\ \dfrac{a^3}{2r^3}w(t)\sin\theta \end{array}\right.}$ (2)

A. 1. b. L'énergie cinétique d'une particule fluide de volume $\delta\tau$ est :

$$\delta E_c = \frac{1}{2}\rho v^2(M)\delta\tau \text{ d'où au total : } E_c = \iiint\frac{1}{2}\rho v^2\delta\tau$$

avec $v^2 = \dfrac{A^2}{r^6}(4\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \dfrac{A^2}{r^6}(3\cos^2\theta + 1)$

et $\delta\tau = r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi$ (coordonnées sphériques).

Soit : $E_c = \dfrac{1}{2}\rho A^2\displaystyle\int_0^{2\pi} d\phi\int_a^{\infty}\frac{r^2 dr}{r^6}\int_0^{\pi}(3\cos^2\theta + 1)\sin\theta d\theta$.

Copyrighted material

La première intégrale vaut 2π, la deuxième $\frac{1}{3a^3}$. Quant à la troisième, elle s'écrit :

$$\int_0^{\pi}(3\cos^2\theta + 1)\mathrm{d}(-\cos\theta) = \left[-\cos^3\theta - \cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4.$$

Finalement $E_c = \frac{8}{6}\rho\frac{A^2}{a^3}\pi$, et en remplaçant A par sa valeur déduite de la première question :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{3}\rho\pi a^3 w^2 = \frac{1}{4}\rho\mathcal{V}w^2}$$ où $\mathcal{V}$ désigne le volume de la boule.

A. 2. a. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au système global constitué par la boule et le fluide. Il n'y a pas de dissipation d'énergie puisque le fluide est supposé parfait. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\text{fluide}) + E_c(\text{boule})) = \vec{f}\cdot\vec{w}(t).$$

Commentaires

- Il n'y a pas de travail intérieur des forces de pression, le fluide étant incompressible.
- Il n'y a pas de travail fourni par les forces de pression agissant sur la « limite » du fluide : à « l'infini », le module de la vitesse décroît plus vite (en $\frac{1}{r^3}$) que la surface de la sphère de rayon r (variant en r^2)...
- Les forces de pression s'exerçant entre le fluide et la boule sont intérieures au système. Elles ne travaillent pas (pour le système global), puisque de façon élémentaire, on a :

$$\delta\vec{f}_p = -P(a,\theta)\vec{n}\,\delta\Sigma$$

$$\delta\mathcal{P} = \underbrace{\delta\vec{f}_p\cdot\vec{w}}_{\text{sur la boule}} + \underbrace{(-\delta\vec{f}_p)\cdot\vec{v}(a,\theta)}_{\text{sur le fluide}} = \delta\vec{f}_p\cdot(\vec{w}-\vec{v}(a,\theta))$$

or $\delta\vec{f}_p \,//\, \vec{n}$ et $[\vec{w}-\vec{v}(a,\theta)]\cdot\vec{n} = 0$. On a bien : $\delta\mathcal{P} = 0$.

D'où : $\vec{f}\cdot\vec{w} = \left[m\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}\right]\cdot\vec{w}$.

L'accélération étant ici colinéaire à la force, il vient :

$$\boxed{\vec{f} = \left[m + \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\right]\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}} \quad (3)$$

Tout se passe donc comme si l'action du fluide consistait à « alourdir » le solide (effet de « *masse ajoutée* »).

Et pour une force sinusoïdale, imposée par l'opérateur, $\vec{f} = f_0\cos\omega_0 t\,\vec{u}_z$:

$$\left(m + \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\right)\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t} = f_0\cos\omega_0 t.$$

Soit une vitesse $w = \frac{f_0}{m'\omega_0}\sin\omega_0 t$, où l'on note $m' = m + \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}$.

Copyrighted material

Puis par simple intégration $z(t) = \dfrac{f_0}{m'\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t)$ en prenant $z(0) = 0$.

L'amplitude des oscillations est alors : $\boxed{\dfrac{f_0}{\left(m + \dfrac{2}{3}\rho\pi a^3\right)\omega_0^2}}$

Elle est évidemment d'autant plus faible que la pulsation est importante (effet d'inertie que renforce ici l'action du fluide).

Commentaire

Dans ce cadre d'hypothèses (fluide parfait,...), et pour une vitesse de la boule maintenue constante, la force exercée par le fluide serait nulle. En effet, cette force peut être déduite de l'équation (3) en la réécrivant selon :

$$m\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\frac{d\vec{w}}{dt} \text{ d'où } \vec{f'} \text{ (fluide} \rightarrow \text{boule)} = -\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\frac{d\vec{w}}{dt}.$$

Ce paradoxe (appelé paradoxe de d'Alembert) est levé si l'on tient compte des effets de viscosité et de sillage...

A. 2. b. α) L'équation d'Euler s'écrit : $\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) + \rho\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$.

Or l'écoulement est irrotationnel ($\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = 0$) et incompressible (ici $\rho = \text{cste}$) ; on a donc $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$ et : $\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) + \overrightarrow{\text{grad}}\dfrac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{grad}}\dfrac{P}{\rho} = 0$

soit encore : $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{P}{\rho}\right) = \vec{0}$

d'où : $\boxed{\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} = K(t)}$ (4)

Théorème de Bernoulli « généralisé » : régime instationnaire, $\rho = \text{cste}$.

Calculons $\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$. Les variations de ϕ avec le temps au point M fixe dans $\mathcal{R}_g$ ont deux origines :

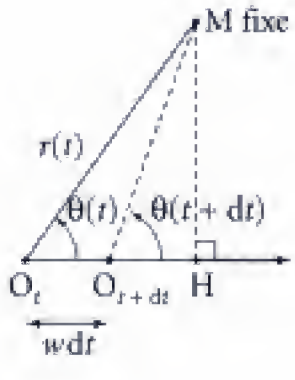
- $\dfrac{dw}{dt} \neq 0$;
- O n'est pas fixe et possède la vitesse $w(t)\vec{u}_z$ dans $\mathcal{R}_g$.

D'où : $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = -\dfrac{a^3}{2}\dfrac{dw}{dt}\dfrac{\cos\theta}{r^2} - \dfrac{a^3}{2}w(t)\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\cos\theta}{r^2}\right]_{M \text{ fixé}}$

or $O_tO_{t+dt} = w\,dt$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}(r\cos\theta) = \dfrac{\partial}{\partial t}(OH) = -w$.

De plus : $r^2(t + dt) = r^2(t) + (w\,dt)^2 - 2r(t)(w\,dt)\cos\theta(t)$

soit : $\dfrac{\partial}{\partial t}r^2 = -2rw\cos\theta \Rightarrow \left.\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)_{M \text{ fixé}} = -w\cos\theta$



Copyrighted material

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\cos\theta}{r^2}\right]_{M\text{ fixé}} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{r\cos\theta}{r^3}\right]_{M\text{ fixé}} = \frac{1}{r^3}(-w) + r\cos\theta\left(-\frac{3}{r^4}\right)(-w\cos\theta)$$

$$= -\frac{w}{r^3}(1-3\cos^2\theta)$$

et
$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{a^3}{2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{a^3w^2}{2r^3}(1-3\cos^2\theta)} \quad (5)$$

A. 2. b. β) Nous avons établi que la quantité $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2}$ est une fonction du temps $K(t)$ uniforme dans tout le fluide. Pour déterminer $K(t)$, faisons tendre r vers l'infini :

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{r\to\infty} \to 0\,; \quad v)_{r\to\infty} \to 0\,; \quad P)_{r\to\infty} = P_0$$

d'où : $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{P_0}{\rho}$.

De plus : $v^2 = \frac{a^6}{4r^6}w^2(4\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{a^6w^2}{4r^6}(3\cos^2\theta + 1)$

soit :
$$\boxed{P = P_0 - \rho\frac{a^6w^2}{8r^6}(3\cos^2\theta+1) + \rho\frac{a^3}{2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\frac{\cos\theta}{r^2} - \rho\frac{a^3w^2}{2r^3}(1-3\cos^2\theta)} \quad (6)$$

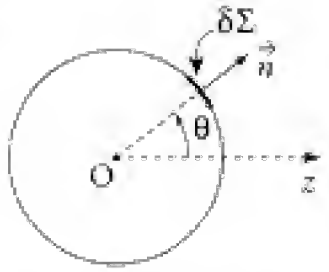
Sur la surface de la boule, $r = a$:

$$P(a,\theta) = P_0 - \frac{1}{8}\rho w^2(3\cos^2\theta+1) - \frac{1}{2}\rho w^2(1-3\cos^2\theta) + \rho\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\cos\theta$$

$$\boxed{P(a,\theta) = P_0 - \frac{1}{8}\rho w^2(5-9\cos^2\theta) + \rho\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\cos\theta}$$

soit $P(a,\theta) = P_1(a,\theta) + \rho\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\cos\theta$.

La force élémentaire qu'exerce le fluide sur l'élément de surface $\delta\Sigma = a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ de la boule est :



$$\delta\vec{f}_p = -P(a,\theta)\vec{n}\,\delta\Sigma = \delta\vec{f}_1 + \delta\vec{f}_2$$

$\delta\vec{f}_1$ due à $P_1(a,\theta)$

$\delta\vec{f}_2$ associée à $\frac{1}{2}\rho a\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\cos\theta$.

La contribution de $P_1(a,\theta)$ à toute la boule est nulle (les forces correspondantes s'annulent deux à deux en prenant des points diamétralement opposés).

Il reste donc : $\vec{f}_p = -\frac{1}{2}\rho a\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\iint_\Sigma \cos\theta\vec{n}\,\delta\Sigma$.

Copyrighted material

Pour une couronne telle que $\theta \in (\theta, \theta + d\theta)$ et $\varphi \in (0, 2\pi)$, la résultante est portée par Oz ; on a donc :

$$\vec{f}_p = -\frac{1}{2}\rho a \frac{dw}{dt}\left(\iint \cos\theta \vec{n} \cdot \vec{u}_z \delta\Sigma\right)\vec{u}_z.$$

L'intégrale vaut : $a^2\int \cos^2\theta 2\pi \sin\theta d\theta = a^2\int_0^\pi 2\pi\cos^2\theta d(-\cos\theta) = 2\pi a^2\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi$

$$= 2\pi a^2\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}a^2$$

soit : $\vec{f}_p = -\frac{2\pi}{3}\rho a^3 \frac{dw}{dt}\vec{u}_z$.

Or $\mathcal{V} = \frac{4\pi a^3}{3}$, d'où : $\boxed{\vec{f}_p = -\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\frac{dw}{dt}}$ (7)

On retrouve bien le résultat précédent (*cf.* **2. a.**, commentaire).

Partie B

B. 1. Dans le référentiel $\mathcal{R}_g$, la vitesse de la boule est $w(t)\vec{u}_z$, celle du fluide à « l'infini » n'est plus nulle et vaut $\vec{v}_0(t) = v_0(t)\vec{u}_z$.

On a donc : $\lim_{r\to\infty} \vec{v}' = v_0(t)\vec{u}_z$ ($\vec{v}'$ champ des vitesses du fluide dans $\mathcal{R}_g$).

Le champ des vitesses $\vec{v}_0$ est associé à un potentiel : $\phi_0 = v_0(t)z = v_0(t)r\cos\theta$.

Le nouveau potentiel ϕ' des vitesses doit donc vérifier :

- $\Delta\phi' = 0$ dans tout le fluide (a)
- $\phi' \sim v_0(t)r\cos\theta$ quand $r \to \infty$ ($r \gg a$) (b)
- $\vec{v}' \cdot \vec{u}_r = \vec{w} \cdot \vec{u}_r)_{r=a} \Rightarrow \left.\frac{\partial\phi'}{\partial r}\right)_{r=a} = w\cos\theta$ (c)

Essayons donc la solution : $\phi'(r, \theta) = \phi_0(r, \theta) + \frac{A'\cos\theta}{r^2}$.

La propriété (a) est automatiquement réalisée ($\Delta\phi_0 = 0$ et $\Delta\left(\frac{A'\cos\theta}{r^2}\right) = 0$). Il en est de même de (b). Il reste à vérifier :

$$v_0(t)\cos\theta - \frac{2A'\cos\theta}{a^3} = w\cos\theta \Rightarrow \boxed{A' = -\frac{a^3}{2}(w - v_0)}$$

Finalement, on a : $\boxed{\phi' = v_0(t)r\cos\theta - \frac{a^3}{2}(w(t) - v_0(t))\frac{\cos\theta}{r^2}}$ (8)

Le même raisonnement qu'au **A. 2. b.** α) conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}[v_0(t)r\cos\theta] = \frac{dv_0}{dt}r\cos\theta + v_0(t)\frac{\partial}{\partial t}(r\cos\theta) = \frac{dv_0}{dt}r\cos\theta - v_0 w$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(w - v_0)\frac{\cos\theta}{r^2}\right] = \left(\frac{dw}{dt} - \frac{dv_0}{dt}\right)\frac{\cos\theta}{r^2} - (w - v_0)\frac{w}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)$$

Copyrighted material

d'où : $\dfrac{\partial\phi'}{\partial t} = \dfrac{dv_0}{dt} r\cos\theta - \dfrac{a^3}{2}\left(\dfrac{dw}{dt} - \dfrac{dv_0}{dt}\right)\dfrac{\cos\theta}{r^2} + \underbrace{f(\cos^2\theta)}_{\text{fonction de } \cos^2\theta}$.

Et le théorème de Bernoulli généralisé s'écrit ici :

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{v'^2}{2} = K(t) \Rightarrow P = \rho K(t) - \rho\frac{v'^2}{2} - \rho\frac{\partial\phi'}{\partial t}$$

et $P(a, \theta, t) = \rho K(t) - \dfrac{1}{2}\rho v'^2(a, \theta, t) - \rho\left(\dfrac{\partial\phi'}{\partial t}\right)_{(r=a,\theta)}$.

Or v'^2 varie en fonction de θ comme $\cos^2\theta$ car :

$$\vec{v}(a, \theta)\begin{vmatrix} v_0\cos\theta + (w - v_0)\cos\theta = w\cos\theta \\ -v_0\sin\theta + \dfrac{1}{2}(w - v_0)\sin\theta \end{vmatrix}$$

De plus conformément aux calculs menés au **A. 2. b. α** :

$$\left(\frac{\partial\phi'}{\partial t}\right)_{r=a,\theta} = \frac{dv_0}{dt} a\cos\theta - \frac{a}{2}\left(\frac{dw}{dt} - \frac{dv_0}{dt}\right)\cos\theta + F(\cos^2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} a\cos\theta\left[3\frac{dv_0}{dt} - \frac{dw}{dt}\right] + F(\cos^2\theta),$$

Finalement, il vient : $P(a, \theta) = -\dfrac{1}{2}\rho a\cos\theta\left[3\dfrac{dv_0}{dt} - \dfrac{dw}{dt}\right] + G(\cos^2\theta)$.

Conformément aux remarques faites au **A. 2. b. β)**, les termes contenus dans $G(\cos^2\theta)$ ne contribuent pas à la nouvelle résultante des forces de pression. Il suffit alors de reprendre le résultat (7) en substituant à $\dfrac{d\vec{w}}{dt}$ l'expression $\dfrac{d\vec{w}}{dt} - 3\dfrac{d\vec{v_0}}{dt}$.

D'où : $\boxed{\vec{f}_p' = -\dfrac{1}{2}\rho\mathcal{V}\left(\dfrac{d\vec{w}}{dt} - 3\dfrac{d\vec{v_0}}{dt}\right)}$

B. 2. La boule n'est ici soumise qu'aux forces de pressions (fluide parfait). Le théorème de la résultante dynamique appliqué à cette boule donne alors :

$$m\frac{d\vec{w}}{dt} = -\frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\left(\frac{d\vec{w}}{dt} - 3\frac{d\vec{v_0}}{dt}\right) \text{ soit encore : } \left(m + \frac{1}{2}\rho\mathcal{V}\right)\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{3}{2}\rho\mathcal{V}\frac{d\vec{v_0}}{dt};$$

et en introduisant la masse volumique μ de la boule ($m = \mu\mathcal{V}$) :

$$\left(\mu + \frac{1}{2}\rho\right)\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{3}{2}\rho\frac{d\vec{v_0}}{dt}.$$

Une simple intégration de cette équation conduit, avec $\vec{w}(0) = \vec{v}_0(0) = \vec{0}$, à :

$$\boxed{\vec{w}(t) = \frac{3\rho}{\rho + 2\mu}\vec{v}_0(t)}$$

Copyrighted material

Avec $\vec{w}(t) = w(t)\vec{u_z}$, $\vec{v_0} = v_0(t)\vec{u_z}$, $w(t) > 0$ et $v_0(t) > 0$, on peut remarquer que :

- $w(t) < v_0(t)$ pour $\mu > \rho$ (boule plus dense que le fluide) ;
- $w(t) > v_0(t)$ pour $\mu < \rho$ (boule moins dense que le fluide).

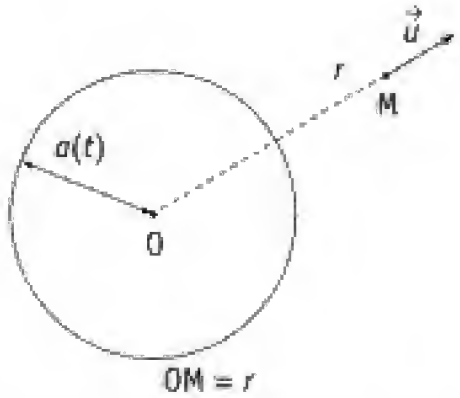
205 Cavité, bulle dans un fluide

1. On considère une cavité (assimilée à du vide) de rayon a_0, créée à l'instant $t = 0$ dans un fluide parfait, homogène, incompressible (de masse volumique ρ_0).

La pression à l'infini vaut P_0 et les forces de pesanteur sont négligées.

On cherche à déterminer le temps τ au bout duquel la cavité aura disparu.

Le centre O de la cavité est fixe dans le référentiel d'étude galiléen.



a. Justifier que le champ des vitesses $\vec{v}$ et le champ des pressions P sont de la forme :

$$\vec{v}(M, t) = v(r, t)\vec{u} \quad \text{et} \quad P(M, t) = P(r, t).$$

Préciser les conditions aux limites (on a négligé la pression de vapeur saturante du fluide devant P_0).

b. Déterminer de deux façons différentes la fonction $v(r, t)$: on exprimera le résultat en fonction de r, a et $\frac{da}{dt}$.

Montrer que cet écoulement est irrotationnel. En déduire que le potentiel des vitesses $\phi = -a^2\frac{da}{dt}\cdot\frac{1}{r}$ convient.

On rappelle que : $\text{div}[A(r, t)\vec{u}] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2 A(r, t)]$ (coordonnées sphériques).

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = \vec{0} \quad (\phi \text{ fonction scalaire}).$$

c. Exprimer la pression $P(r, t)$ en fonction de P_0, ρ_0, r, a et $\frac{da}{dt}$. À cet effet on établira la relation : $\frac{P}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = K(t)$.

d. En déduire une équation différentielle vérifiée par $a(t)$. L'intégrer en posant $z(a) = \left(\frac{da}{dt}\right)^2$ avec les conditions initiales : $a(0) = a_0$ et $\frac{da}{dt}(0) = 0$.

Copyrighted material

Déterminer le temps τ nécessaire pour résorber la cavité. On exprimera le résultat en fonction de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}}\,dx.$$

A.N. : calculer τ pour $\rho_0 = 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $P_0 = 10^5\ \text{Pa}$; $a_0 = 1\ \text{mm}$.

On donne : $J \approx 1{,}29$.

e. Retrouver à l'aide d'une simple analyse aux dimensions, et à une constante multiplicative près, l'expression de τ en fonction de P_0, ρ_0 et a_0.

2. Approche énergétique :

a. Déterminer l'énergie cinétique E_c du fluide ($a \ll r < \infty$).

b. Par application du théorème de la puissance cinétique, établir une équation différentielle vérifiée par $a(t)$. Montrer que ce résultat est conforme à ceux obtenus au **1. d.**

3. On étudie maintenant les oscillations radiales d'une bulle de gaz dans le fluide parfait. La bulle de rayon $a(t)$ présente une pression interne $P_b(t)$, supposée uniforme.

On fera l'hypothèse du gaz parfait en évolution adiabatique réversible.

a. En s'appuyant sur les résultats précédents (*cf.* **1.**), donner une équation définissant la pression $P_b(t)$ dans la bulle en fonction de P_0, ρ_0, $a(t)$ et $\dfrac{da}{dt}$.

b. On se limite aux petites oscillations en $a(t)$ autour de la valeur a_0. On pose donc :

$$a(t) = a_0(1+\varepsilon(t)) \quad \text{où} \quad |\varepsilon(t)| \ll 1.$$

En se limitant à une étude au premier ordre en $\varepsilon(t)$, montrer que l'on a :

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \Omega^2\varepsilon = 0.$$

On donnera l'expression de Ω en fonction de P_0, ρ_0, a_0 et du coefficient γ caractérisant le gaz parfait contenu dans la bulle $\left(\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}\right)$.

c. Proposer une approche énergétique. On pourra reprendre certains des résultats obtenus aux **2. a.** et **2. b.**

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Écoulement incompressible et irrotationnel (propriétés du champ des vitesses).
- Potentiel des vitesses.
- Équation d'Euler.
- Théorème de la puissance cinétique.
- Premier principe.

Copyrighted material

Outils mathématiques

• Relation $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$.

• Équation différentielle du premier ordre à variables séparables.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La cavité se résorbe tout en gardant sa forme (boule de rayon $a(t)$) : la symétrie sphérique est conservée lors de l'évolution du système.

L'écoulement du fluide étant instationnaire, le champ des pressions se déduira directement de l'équation d'Euler, connaissant le champ des vitesses.

Pour la question **1. e.**, on posera $\tau = k a_0^{\alpha}\rho_b^{\beta}P_0^{\gamma}$ ($k \equiv$ constante sans dimension).

2. On soulignera que la puissance des efforts intérieurs est nulle, le fluide étant parfait et l'écoulement incompressible.

3. a. Il suffit de reprendre les raisonnements précédents avec ici : $P(a(t), t) = P_b(t)$.

(pour la cavité, on avait : $P(a(t), t) = 0$).

b. Le gaz étant parfait en évolution isentropique, en lui appliquera la loi de Laplace ($P_b V_b^{\gamma} = \text{cste}$).

Il s'agit ensuite de linéariser l'équation différentielle régissant les variations de $a(t)$ en ne conservant que les termes du premier ordre en $\varepsilon(t)$ et $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

c. Il est possible d'appliquer le premier principe à l'ensemble {fluide + bulle de gaz}.

On considérera que l'énergie interne du fluide ne varie pas au cours du mouvement.

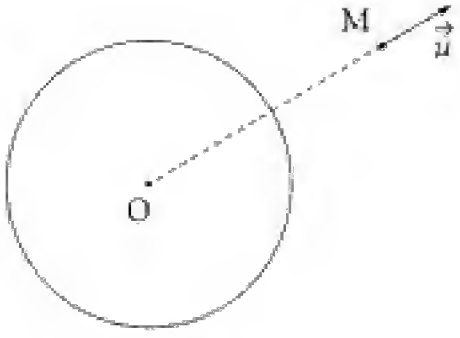
3. Solution

1. a. Le centre O de la cavité reste fixe.
L'évolution du système doit conserver la symétrie sphérique (coordonnées sphériques r, θ, ϕ).

Le champ des vitesses est donc radial et ne dépend que de r ($r = OM$). Il vient :

$$\vec{v} = v(r, t)\vec{u} \text{ et } \quad P = P(r, t).$$

L'écoulement n'est pas stationnaire.



Conditions aux limites :

Le fluide est au repos infiniment loin de la cavité : $\vec{v}(r \to \infty, t) = \vec{0}$.

De plus, P_0 désignant la pression du fluide au repos : $P(r \to \infty, t) = P_0$.

D'autre part, à l'interface fluide-cavité, les hypothèses de l'énoncé conduisent à admettre que l'on a : $P(a(t), t) = 0$ (on a négligé la pression de vapeur saturante, ainsi que les phénomènes de tension superficielle...).

Copyrighted material

1. b. ■ L'incompressibilité de l'écoulement se traduit par l'équation locale : $\text{div}\vec{v} = 0$, soit ici puisque $\vec{v} = v(r, t)\vec{u}$: $\text{div}\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2 v(r, t)] = 0 \Rightarrow v(r, t) = \frac{A(t)}{r^2}$.

Cette relation s'applique en tout point du fluide, et notamment à la surface de la cavité, c'est-à-dire en $r = a(t)$. On a donc :

$$v(a(t), t) = \frac{A(t)}{a^2(t)}.$$

Or $v(a(t), t) = \frac{da}{dt} \Rightarrow a^2\frac{da}{dt} = A(t) \Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}(r, t) = \frac{a^2}{r^2}\frac{da}{dt}\vec{u}}$

■ D'une autre façon, considérons la masse M (constante) de fluide située entre les surfaces **particulaires** constituées par les sphères de rayons $a(t)$ et $r(t)$. On a donc :

$$\frac{dr}{dt} = v(r, t).$$

La masse volumique étant uniforme et invariable dans le temps, il vient :

$$M = \rho_0\left[\frac{4}{3}\pi r^3(t) - \frac{4}{3}\pi a^3(t)\right] = \text{cste}$$

d'où : $\frac{dM}{dt} = 0 = 4\pi\rho_0\left[r^2\frac{dr(t)}{dt} - a^2\frac{da}{dt}\right]$.

Et finalement : $r^2 v(r, t) = a^2\frac{da}{dt} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}(r, t) = \frac{da}{dt}\frac{a^2(t)}{r^2}\vec{u}}$ (1)

■ Cet écoulement est irrotationnel, le champ des vitesses donné par l'expression (1) s'écrivant également :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi \text{ avec, par exemple, } \phi = -\frac{da}{dt}a^2\frac{1}{r} \quad (2)$$

On a bien : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \vec{0}$ puisque le rotationnel d'un gradient est nul.

1. c. Le mouvement du fluide obéit à l'équation d'Euler :

$$\rho_0\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P \quad \text{(pesanteur négligée)}$$

soit encore : $$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho_0(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P.$$

Or $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}\wedge\vec{v}$, et l'écoulement étant ici irrotationnel :

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right)\vec{u} \Rightarrow \rho_0\frac{\partial v}{\partial t}\vec{u} + \rho_0\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right)\vec{u} = -\frac{\partial P}{\partial r}\vec{u}$$

d'où : $-\frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]$ et avec $v = \frac{\partial\phi}{\partial r}$ $\left(\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{u} = v\vec{u}\right)$:

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}\right].$$

Intégrons cette équation par rapport à la variable r : $P(r, t) = -\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho_0\frac{v^2}{2} + K(t)$.

Copyrighted material

Point méthode

L'écoulement étant **instationnaire**, il n'était pas possible d'appliquer le théorème de Bernoulli sous la forme :

$\frac{P}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = \underset{\text{(dans tout le fluide)}}{\text{cste}}$ (fluide parfait, écoulement irrotationnel stationnaire, et incompressible avec ici, $\rho = \rho_0 = \text{cste}$; pas de forces extérieures)

$\frac{P}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = \underset{\text{(ligne de courant)}}{\text{cste}}$ (mêmes hypothèses sauf écoulement rotationnel).

On a bien obtenu une forme généralisée du théorème de Bernoulli :

$\frac{P}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} + \underset{\text{(dans tout le fluide)}}{\frac{\partial \phi}{\partial t}} = K(t)$ (écoulement instationnaire, incompressible (avec ρ_0) et irrotationnel d'un fluide parfait ; pas de forces extérieures).

Remplaçons v et ϕ par leur expression (1) et (2) :

$$P(r, t) = \underbrace{+\rho_0 \frac{d}{dt}\left[a^2 \frac{da}{dt}\right]\frac{1}{r}}_{\substack{\text{dérivée par rapport} \\ \text{au temps à } r \text{ fixé}}} - \rho_0 \left(a^2 \frac{da}{dt}\right)^2 \frac{1}{2r^4} + K(t).$$

La constante $K(t)$ se détermine en remarquant que $P(r \to \infty, t) = P_0$, d'où $K(t) = P_0$ et :

$$\boxed{P(r, t) = P_0 + \rho_0 \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(a^2 \frac{da}{dt}\right) - \rho_0 \frac{1}{2r^4} a^4 \left(\frac{da}{dt}\right)^2} \quad (3)$$

1. d. L'équation différentielle fixant l'évolution du rayon $a(t)$ de la cavité est obtenue en faisant, dans (3), $P(a(t)) = 0$ pour $r = a(t)$ (*cf.* conditions aux limites : **1. a.**)

soit : $\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(a^2 \frac{da}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = 0$ ou encore : $\frac{P_0}{\rho_0} + a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = 0$

d'où : $2a\frac{d^2a}{dt^2} + 3\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -\frac{2P_0}{\rho_0}$ (4)

Posons $z(a) = \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \Rightarrow \frac{dz}{da} = 2\frac{d^2a}{dt^2}\frac{da}{dt} \cdot \frac{dt}{da} = 2\frac{d^2a}{dt^2}$

(4) devient :

$$a\frac{dz}{da} + 3z = -\frac{2P_0}{\rho_0}.$$

Équation différentielle du premier ordre à variables séparables :

$$\frac{dz}{z + \frac{2P_0}{3\rho_0}} = -\frac{3da}{a}$$

dont l'intégration donne : $\mathrm{d}\left[\ln\left(z+\frac{2P_0}{3\rho_0}\right)\right] = -\mathrm{d}[\ln a^3]$

soit $\left(z+\frac{2P_0}{3\rho_0}\right)a^3 = \text{cste}$ (5)

Les conditions initiales sont : $a(0) = a_0$ et $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}(0) = 0$

et : $\text{cste} = \left(0+\frac{2P_0}{3\rho_0}\right)a_0^3 \Rightarrow \left(z+\frac{2P_0}{3\rho_0}\right)a^3 = \frac{2P_0}{3\rho_0}a_0^3$.

d'où : $$z = \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2P_0}{3\rho_0}\left(\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - 1\right) \quad (6)$$

$a(t)$ diminuant, il vient $\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} < 0\right)$: $$\boxed{\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2P_0}{3\rho_0}}\sqrt{\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - 1}}$$

La cavité aura disparu au bout d'un temps τ défini par :

$$\tau = \int_0^\tau \mathrm{d}t = -\int_{a_0}^0 \sqrt{\frac{3\rho_0}{2P_0}}\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - 1}}.$$

Posons $x = \frac{a}{a_0}$;

$$\tau = a_0\sqrt{\frac{3\rho_0}{2P_0}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{x^3} - 1}}.$$

Finalement : $\tau = a_0\sqrt{\frac{3\rho_0}{2P_0}}\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}}\mathrm{d}x \Rightarrow$ $$\boxed{\tau = a_0\sqrt{\frac{3\rho_0}{2P_0}}\cdot I}$$

Or $I \approx 1{,}29$ d'où : $$\boxed{\tau = 1{,}29a_0\sqrt{\frac{3\rho_0}{2P_0}}}$$

A.N. : $a_0 = 1$ mm ; $\rho_0 = 10^3$ kg · m^{-3} et $P_0 = 1$ bar $= 10^5$ Pa.

$$\tau = 1{,}29 \cdot 10^{-3}\sqrt{\frac{3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5}} ; \quad \boxed{\tau \approx 0{,}16 \text{ ms}}$$

1. e. Les grandeurs pertinentes définissant le problème sont :

$a_0 \equiv$ rayon initial de la cavité
$\rho_0 \equiv$ masse volumique du fluide
$P_0 \equiv$ pression très loin de la cavité

$\Big\}$ $\tau = f(a_0, \rho_0, P_0)$.

Supposons maintenant que l'on ait :

$$\tau = k a_0^\alpha \rho_0^\beta P_0^\gamma \quad (k : \text{constante sans dimension}).$$

Copyrighted Material

Montrons que l'on peut déterminer la valeur des coefficients α, β, γ par une simple analyse aux dimensions. Notons $[g]$ la dimension de la grandeur g :

$$[\tau] = [a_0]^{\alpha}[\rho_0]^{\beta}[P_0]^{\gamma}.$$

or $[a_0] = L$; $[\rho_0] = M \cdot L^{-3}$; $[P_0] = \dfrac{[F]}{[S]} = \dfrac{[mg]}{[S]} = \dfrac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2}$

(L ≡ longueur en mètre ; M ≡ masse en kg ; T ≡ temps en seconde) ;

d'où : $[\tau] = L^{\alpha}M^{\beta}L^{-3\beta}M^{\gamma}L^{-\gamma}T^{-2\gamma} = T$

soit : $-2\gamma = 1$; $\beta + \gamma = 0$; $\alpha - 3\beta - \gamma = 0$

$$\boxed{\gamma = -\frac{1}{2} \; ; \quad \beta = \frac{1}{2} \; ; \quad \alpha = 1}$$

Dès lors : $$\boxed{\tau = k a_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{P_0}}}$$

Les variations de τ avec les paramètres a_0, ρ_0 et P_0 correspondent bien à celles obtenues au **1. d.** où l'on a également démontré que :

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 1{,}29 \approx 1{,}6 \quad (k \text{ est de l'ordre de l'unité...}).$$

2. a. Déterminons l'énergie cinétique du fluide à l'instant t. Pour la tranche comprise entre r ($r > a(t)$) et $r + dr$, on a : $\delta E_c = \dfrac{1}{2}v^2(r, t)\rho_0 \delta\mathcal{V}$ où $\delta\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr$

d'où : $\delta E_c = \dfrac{1}{2}v^2(r, t)\rho_0 4\pi r^2 dr = 2\pi\rho_0 v^2(r, t)r^2 dr$

soit au total : $E_c = 2\pi\rho_0 \displaystyle\int_{a(t)}^{\infty} v^2(r, t)r^2 dr.$

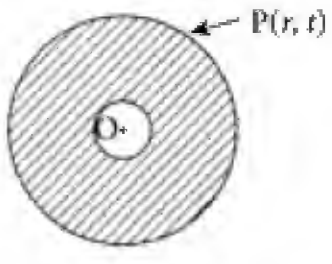
Remplaçant $v(r, t)$ par son expression déduite de (1) :

$$E_c = 2\pi\rho_0 a^4 \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \int_a^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2 dr,$$

l'intégrale vaut : $\left[-\dfrac{1}{r}\right]_a^{\infty} = \dfrac{1}{a}$, d'où : $$\boxed{E_c = 2\pi\rho_0 a^3 \left(\frac{da}{dt}\right)^2} \quad (7)$$

2. b. Appliquons à tout le fluide le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{int} \quad (8)$$



Or ici : $\mathcal{P}^{ext} = \underset{\text{absence de pesanteur...}}{0} + \underset{\text{pression nulle dans la cavité}}{0} + \mathcal{P}_p(\Sigma_{r \to \infty})$

Copyrighted material

$\mathcal{P}_p\ (\Sigma_{r\to\infty})$ représente la puissance développée par les forces de pression s'exerçant sur la surface sphérique de rayon r, à la limite où r est rejeté à l'infini.

Or $\delta\vec{f}_p = -P(r,t)\vec{u}\,\delta\Sigma_r$ et $\vec{v} = v(r,t)\vec{u}$

soit : $\delta\mathcal{P}_p = -P(r,t)v(r,t)\delta\Sigma_r$ et $\mathcal{P}_p = -P(r,t)v(r,t)4\pi r^2$.

Or $v(r,t) = \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\dfrac{a^2}{r^2} \Rightarrow \mathcal{P}_p = -4\pi a^2\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}P(r,t)$

et $\mathcal{P}_p\ (\Sigma_{r\to\infty}) = -4\pi a^2\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}P(r\to\infty,t) = -4\pi a^2\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}P_0$.

Enfin, notons que l'on a $\mathcal{P}_{int} = 0$ (viscosité négligée et écoulement incompressible).

L'égalité (7) s'écrit alors :

$$2\pi\rho_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a^3\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = -4\pi a^2P_0\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

soit encore :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a^3\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = -\frac{2P_0}{3\rho_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^3).$$

Une simple intégration donne : $\boxed{a^3\left(\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\dfrac{2P_0}{3\rho_0}a^3 + \text{cste}}$

On aboutit à l'équation (6) de la question **1. d**.

3. a. La cavité est maintenant remplacée par une bulle de gaz dont la pression prise uniforme est $P_b(t)$. L'équation (3) établie à la question **1. c.** reste valable. On a donc :

$$P(r,t) = P_0 + \rho_0\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right) - \rho_0\frac{1}{2r^4}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Mais la condition aux limites en $r = a(t)$ est modifiée. Elle devient si l'on néglige les phénomènes de tension superficielle : $P(a(t),t) = P_b(t)$.

Soit :

$$P_b(t) = P_0 + \frac{\rho_0}{2}\left[2a\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t} + 3\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \quad (9)$$

3. b. L'évolution du gaz est supposée adiabatique réversible. On a donc (loi de Laplace) :

$P_b(t)V_b^\gamma = \text{cste}$ (gaz assimilé à un gaz parfait)

d'où $P_b(t) = Ca^{-3\gamma}$ (C = constante).

L'équation d'évolution de la bulle s'écrit alors :

$$\frac{\rho_0}{2}\left\{2a\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2} + 3\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = Ca^{-3\gamma} - P_0 \quad (9)$$

On s'intéresse à de petites oscillations radiales autour du rayon d'équilibre a_0.

Posons alors $a(t) = a_0(1+\varepsilon(t))$ avec $|\varepsilon(t)| \ll 1$, et faisons une étude à l'ordre 1 par rapport à $\varepsilon(t)$.

À l'ordre 0, l'équation (9) s'écrit : $0 = Ca_0^{-3\gamma} - P_0 \Rightarrow C = P_0a_0^{3\gamma}$.

Copyrighted material

À l'ordre 1 en $\varepsilon(t)$, il vient (ε et $\frac{d\varepsilon}{dt}$ sont considérés du même ordre) :

$$\frac{\rho_0}{2}\left\{2a_0(1+\cancel{\varepsilon})\left(a_0\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\right)+0\right\} = P_0\left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma}-1\right]_{\text{à l'ordre 1}}$$

or $\left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma}-1\right] = [(1+\varepsilon)^{-3\gamma}-1] = -3\gamma\varepsilon$ (à l'ordre 1)

d'où : $\rho_0 a_0^2\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+3P_0\gamma\varepsilon = 0.$

Finalement : $\boxed{\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+\frac{3P_0\gamma}{\rho_0 a_0^2}\varepsilon = 0} \Rightarrow \boxed{\Omega = \left(\frac{3P_0\gamma}{\rho_0 a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$\varepsilon(t)$ varie sinusoïdalement avec une période : $\boxed{T = 2\pi a_0\sqrt{\frac{\rho_0}{3P_0\gamma}}}$

3. c. Approche énergétique : on va appliquer le premier principe au système particulaire $\mathcal{S}$ constitué par le gaz et le fluide contenu à l'instant t dans la boule de rayon $R > a(t)$, puis on fera tendre R vers l'infini. On a donc pour $\mathcal{S}$:

$$\frac{d}{dt}(E_c+U) = \mathcal{P}^{ext}+\mathcal{P}_{th} \quad (10)$$

or $\mathcal{P}_{th} = 0$ (pas d'échanges thermiques avec l'extérieur)

$\mathcal{P}^{ext} = -4\pi a^2\frac{da}{dt}P(R,t)$ (*cf.* **2. b.**)

$E_c)_{R\to\infty} = E_c(\text{fluide})+E_c(\text{gaz}) = 2\pi\rho_0 a^3\left(\frac{da}{dt}\right)^2+0.$

E_c du gaz négligée : en accord avec P_b uniforme

$U = U(\text{gaz})+U(\text{fluide})$ et $dU = dU(\text{gaz})+dU(\text{fluide})$

avec : $dU(\text{fluide}) = 0$ (état thermodynamique invariable)

$dU(\text{gaz}) = -P_b dV_b$ (évolution adiabatique réversible donc isentropique).

(10) devient alors avec $R\to+\infty$:

$$2\pi\rho_0\frac{d}{dt}\left(a^3\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right)-P_b\frac{dV_b}{dt} = -4\pi a^2\frac{da}{dt}P_0 \quad (P(R\to\infty,t)=P_0)$$

or $\frac{dV_b}{dt} = 4\pi a^2\frac{da}{dt}$, soit : $2\pi\rho_0\frac{d}{dt}\left[a^3\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right] = (P_b-P_0)4\pi a^2\frac{da}{dt}$ (11)

$$2\pi\rho_0\left[2a^3\frac{da}{dt}\frac{d^2a}{dt^2}+3a^2\left(\frac{da}{dt}\right)^3\right] = (P_b-P_0)4\pi a^2\frac{da}{dt}$$

et après simplification par $2\pi a^2\frac{da}{dt}$: $\frac{1}{2}\rho_0\left[2a\frac{d^2a}{dt^2}+3\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right] = P_b-P_0$; résultat conforme à (8).

Commentaires

• Il faudrait vérifier que l'évolution de la bulle est bien adiabatique (échanges d'énergie thermique négligeables sur une échelle de temps de l'ordre de T).

Copyrighted material

• On aurait pu proposer d'appliquer au fluide le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c(\text{fluide})}{dt} = \underbrace{\mathcal{P}^{int}}_{0} + \mathcal{P}^{ext}$$

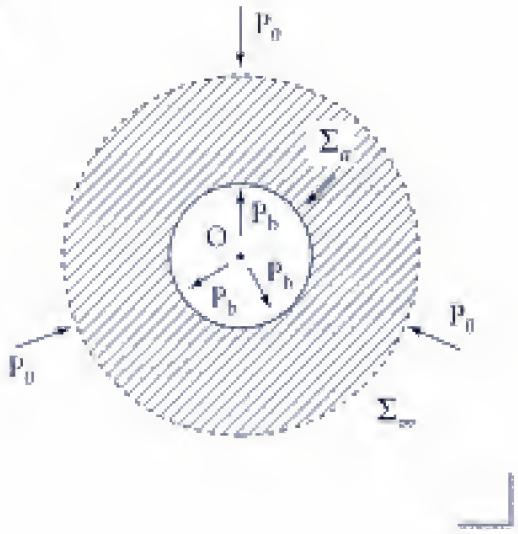
avec $\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}^{ext}(\to \Sigma_\infty) + \mathcal{P}^{ext}(\to \Sigma_a)$

où $\mathcal{P}^{ext}(\to \Sigma_\infty) = -4\pi a^2 \frac{da}{dt} P_0$

$$\mathcal{P}_{ext}(\to \Sigma_a) = 4\pi a^2 \frac{da}{dt} P_b(t)$$

soit $\boxed{\left(\frac{dE_c}{dt}\right)_a = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}[P_b(t) - P_0]}$

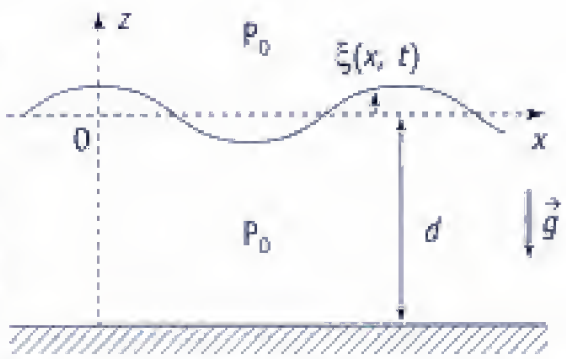
résultat conforme à l'équation (11).



206 Étude de la houle

1. On se propose d'étudier la propagation, selon Ox, de la houle (de longueur d'onde λ) dans un océan plan de profondeur d.

L'eau de mer sera assimilée à un fluide parfait incompressible (de masse volumique ρ_0). P_0 est la pression atmosphérique supposée uniforme et constante.



Au repos, la surface libre de l'océan est confondue avec le plan $z = 0$. En présence de la houle, la surface a pour équation : $z = \xi(x, t)$.

On note $\vec{v}(x, z, t) = v_x(x, z, t)\vec{u_x} + v_z(x, z, t)\vec{u_z}$ le champ des vitesses et $P(x, z, t) = P_0 - \rho_0 gz + p(x, z, t)$ le champ des pressions.

a. Donner les équations différentielles vérifiées par $\vec{v}$ et p.

b. La houle ayant une amplitude ξ_0, on fait l'hypothèse que les grandeurs p, v_x et v_z sont d'ordre un par rapport à ξ_0. **L'étude qui suit se limite à cet ordre.** Comment se simplifient les équations du **1. a.** ?

c. En déduire une équation différentielle en $p(x, z, t)$.

2. On cherche une solution au problème de la houle de la forme (en notation complexe : $g(t) = \text{Re}(\underline{g}(t)) = \text{Re}[\underline{G}(x, z)e^{j\omega t}]$) :

$$\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v_0}}(z)\exp[j(\omega t - qx)] \quad \text{et} \quad \underline{p} = \underline{p_0}(z)\exp[j(\omega t - qx)].$$

Copyrighted material

Il s'agit d'une onde progressive (selon $\vec{u_x}$), harmonique (pulsation $\omega > 0$). On prend $q > 0$ et on pose $q = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

a. Déterminer les fonctions $\underline{\vec{v}_0}(z)$ et $\underline{p_0}(z)$.

b. α) On assimile l'océan à un milieu de profondeur infinie. Que devient la solution précédente ? On montrera que l'on a, à l'approximation précédente (étude à l'ordre un en ξ_0) : $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t - qx)$

et on exprimera P et $\vec{v}$ à l'aide de ξ_0. (ξ_0 étant supposé petit devant λ on pourra confondre $p(x, \xi(x, t), t)$ avec $p(x, 0, t)$).

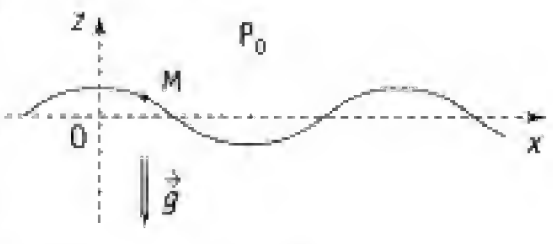
β) Déterminer la relation liant ω à q (relation de dispersion). La vitesse de déplacement de la houle est définie par $c = \dfrac{\omega}{q}$. Donner l'expression de c en fonction de λ.

A.N. : on a $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et une longueur d'onde $\lambda = 10$ m.

Calculer c, ν (fréquence de l'onde : $\omega = 2\pi\nu$). À quelle profondeur H l'amplitude est-elle réduite d'un facteur 1 000 ? Commenter ces résultats.

c. On désire tenir compte de la profondeur d finie de l'océan. Déterminer la nouvelle relation de dispersion $\omega = f(q)$. Commenter ces résultats.

d. On revient à un océan de profondeur infinie avec une houle
$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t - qx)$.
La prise en compte des phénomènes de tension superficielle impose une pression $P(M[x, \xi(x, t), t], t)$ à la « surface » du fluide différente de P_0.



On a ici (houle se propageant selon $\vec{u_x}$) : $P[x, \xi(x, t), t] = P_0 - \dfrac{\sigma}{R}$

σ = coefficient de tension superficielle ($\sigma > 0$) ;

R = rayon de courbure, algébrique, de la courbe $z = \xi(x, t)$: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$.

α) Reprendre rapidement l'étude faite au **2. b.** et montrer que l'on a :

$$\omega^2 = qg\left(1 + \frac{\sigma}{\rho_0 g} q^2\right).$$

β) Tracer la courbe $q \to c^2(q)$ (on rappelle que c représente la célérité avec laquelle la houle de longueur d'onde λ se propage : $q = \dfrac{2\pi}{\lambda}$). Montrer que c présente un minimum pour une longueur d'onde particulière λ_m.

Que peut-on dire pour $\lambda \gg \lambda_m$ puis pour $\lambda \ll \lambda_m$?

A.N. : $\rho_0 = 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\sigma = 7{,}25\ 10^{-2}\ \text{J} \cdot \text{m}^{-2}$.

Calculer λ_m. Commenter.

Copyrighted material

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Écoulement incompressible.
- Équation d'Euler.
- Conditions aux limites ; interface eau/air.

Outils mathématiques

- Étude au premier ordre → linéarisation des équations.
- Utilisation de la notation complexe.
- Fonction $\sinh X = \dfrac{e^X - e^{-X}}{2}$, $\cosh X = \dfrac{e^X + e^{-X}}{2}$ et $\tanh X = \dfrac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}}$.
- Rayon de courbure.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. b. L'étude envisagée suppose que les grandeurs ξ, v_x, v_z, p sont du même ordre. Ainsi, pour une houle sinusoïdale $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t - qx)$, toutes ces grandeurs seront proportionnelles à ξ_0 (ξ_0^1). On négligera donc, dans les équations, les termes faisant apparaître des puissances n de ξ_0 (ξ_0^n) supérieures à 1…

2. b. α) Pour $z \to -\infty$, il est nécessaire que les grandeurs physiques restent bornées. En fait, $d \to \infty$ doit être compris comme une modélisation d'une situation où $d \gg \lambda$.

On vérifiera que l'on a bien, à l'ordre considéré, $\xi = \xi_0 \cos(\omega t - qx)$, en assurant, à la surface, la relation de continuité relative à la pression.

β) Il s'agit ici de traduire la relation de continuité concernant la vitesse d'une particule fluide située en surface de l'océan.

2. c. On reprendra la solution plus générale établie au **2. a.**, ainsi que les relations de continuité des **2. b. α)** et **2. b. β)**. Une condition supplémentaire doit intervenir en $z = -d$.

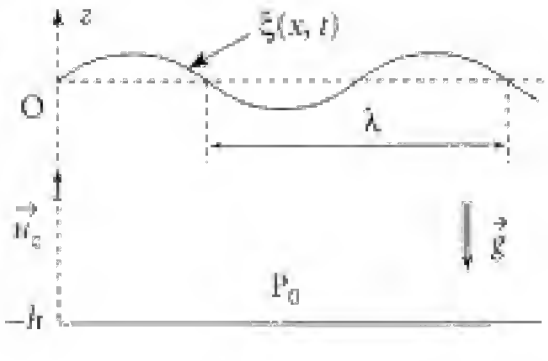
Dans la discussion, envisager le cas $d \gg \lambda$ et $d \ll \lambda$.

2. d. On n'a plus $P(x, \xi(x, t), t) = P_0$…

3. Solution

1. a. ■ Le fluide étant incompressible, le champ des vitesses $\vec{v}(x, z, t)$ doit vérifier l'équation :

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0} \quad (1)$$



Copyrighted material

■ Le mouvement du fluide est régi par l'équation d'Euler (fluide parfait) :

$$\rho_0\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}P + \rho_0\vec{g}.$$

Or $\rho_0\vec{g} = -\rho_0 g\vec{u}_z = -\vec{\nabla}(\rho_0 gz)$, d'où : $\rho_0\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}(P + \rho_0 gz)$.

Posons $P = P_0 - \rho_0 gz + p(x, z, t)$: $\boxed{\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_0(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p}$ (2)

1. b. L'état de référence (ordre zéro) correspond à une mer calme ($\vec{v} = \vec{0}$) et une surface plane ($\xi(x, t) = 0$). La houle en constitue une **perturbation**. On va donc faire l'hypothèse que les composantes v_x et v_z, ainsi que p sont des infiniment petits du premier ordre. Ainsi, si l'on envisage une déformation sinusoïdale de la surface, se propageant selon $\vec{u}_x$: $\xi(x, t) = \xi_0\cos(\omega t - qx)$ ($q > 0$ et $\omega > 0$).

L'hypothèse précédente suppose que ξ, v_x, v_z et p (et leurs dérivées) sont du même ordre.

$$\boxed{\xi,\ v_x,\ v_z,\ p \approx \xi_0}$$

Dans l'équation (2), comparons les termes $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ (accélération convective) et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ (accélération locale).

D'après l'hypothèse précédente, $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ est d'ordre 2 (la vitesse y apparaît deux fois) alors que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est d'ordre 1. On négligera donc l'accélération convective par rapport à l'accélération locale, et on écrira :

$$\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}p \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x}\\ \rho_0\frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}} \quad (3)$$

Commentaire

Évaluons les deux termes $((\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v})$ et $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)$ dans le cadre d'une solution de la forme $\xi = \xi_0\cos(\omega t - qx)$:

$$\left.\begin{aligned}\left\|(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right\| &\sim \frac{v_0^2}{\lambda}\\ \left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\| &\sim \frac{v_0}{T}\end{aligned}\right\} \eta = \frac{\left\|(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right\|}{\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|} \sim \frac{v_0 T}{\lambda}.$$

Or $v_0 \sim \frac{\xi_0}{T}$ d'où $\eta \approx \frac{\xi_0}{\lambda}$.

L'approximation considérée est celle des ondes de faible amplitude (en comparaison à la longueur d'onde)…

Copyrighted material

1. c. Reprenons les équations (1) et (3) :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \Rightarrow \rho_0 \mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\mathrm{div}(\vec{\nabla} p) = -\Delta p$$

d'où en commutant la dérivation temporelle et les dérivées spatiales :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\mathrm{div}\vec{v}}_{=0}) = -\Delta p \Rightarrow \boxed{\Delta p = 0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0} \quad (4)$$

2. a. On cherche maintenant une solution de la forme :

$$\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0}(z)\exp[j(\omega t - qx)] \quad \text{et} \quad \underline{p} = \underline{p_0}(z)\exp[j(\omega t - qx)].$$

L'équation (4) se traduit par :

$$-q^2 \underline{p_0}(z) + \frac{\mathrm{d}^2 \underline{p_0}}{\mathrm{d}z^2} = 0 \Rightarrow \underline{p_0}(z) = \underline{A}\exp(qz) + \underline{B}\exp(-qz).$$

(3) donne alors :

$$\begin{cases} \rho_0 j\omega \underline{v_x} = +jq\,\underline{p} \\ \rho_0 j\omega \underline{v_z} = -\dfrac{\mathrm{d}\underline{p_0}}{\mathrm{d}z}\exp[j(\omega t - qx)]. \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{p} &= (\underline{A}e^{+qz} + \underline{B}e^{-qz})\exp[j(\omega t - qx)] \\ \underline{v_x} &= \frac{q}{\omega\rho_0}(\underline{A}e^{+qz} + \underline{B}e^{-qz})\exp[j(\omega t - qx)] \\ \underline{v_z} &= \frac{jq}{\omega\rho_0}(\underline{A}e^{+qz} - \underline{B}e^{-qz})\exp[j(\omega t - qx)] \end{aligned}}$$

2. b. α) ■ On assimile l'océan à un milieu de profondeur infinie (en fait, il suffit que l'on ait $d \gg \lambda$, soit $qd \gg 1$). Cette approximation fixe la valeur de $\underline{B}$ à zéro :

$$\left.\begin{aligned} &\vec{v}(z \to -\infty) = \vec{0} \\ &p(z \to -\infty) = 0 \text{ et } P \to P_0 - \rho_0 g z \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{la perturbation ne se fait pas ressentir} \\ \text{au « fond » de la mer pour } d \gg \lambda. \end{array}$$

Dès lors :

$$\begin{cases} \underline{p} = \underline{A}e^{+qz}\exp[j(\omega t - qx)] \\ \underline{v_x} = \dfrac{q}{\omega\rho_0}\underline{A}e^{+qz}\exp[j(\omega t - qx)] \\ \underline{v_z} = \dfrac{jq}{\omega\rho_0}\underline{A}e^{+qz}\exp[j(\omega t - qx)]. \end{cases}$$

■ À la surface des vagues, la pression est P_0 (on a négligé les phénomènes de tension superficielle). On a donc :

$$P(x, z = \xi(x, t), t) = P_0$$

Copyrighted material

soit $P_0 = P_0 - \rho_0 g\xi(x, t) + p(x, \xi(x, t), t)$

d'où $\rho_0 g\xi(x, t) = p(x, \xi(x, t), t)$.

On travaille à l'ordre 1, on peut donc considérer que $|q\xi(x, t)| \ll 1$, ce qui revient à faire $\xi_0 \ll \lambda$ (*cf.* plus haut) : on confond ainsi $p(x, \xi, t)$ avec $p(x, 0, t)$

d'où $\xi(x, t) = \dfrac{\underline{A}}{\rho_0 g}\exp[j(\omega t - qx)]$,

expression de la forme $\xi_0 \exp[j(\omega t - qx)]$ avec $\underline{A} = \rho_0 g\xi_0$ (en prenant ξ_0 réel > 0).
La solution harmonique (pulsation ω) avec une houle d'amplitude ξ_0 est caractérisée par une pression :

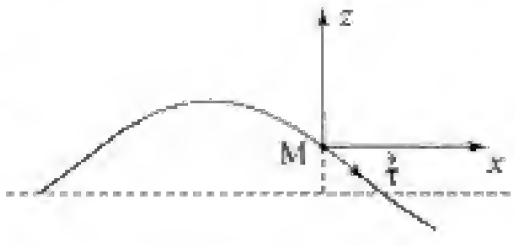
$$\boxed{P = P_0 - \rho_0 g \cdot \{z - e^{qz}\cos(\omega t - qx)\}} \quad (5)$$

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} \dfrac{q}{\omega} g\xi_0 e^{qz}\cos(\omega t - qx) \\ -\dfrac{q}{\omega} g\xi_0 e^{qz}\sin(\omega t - qx) \end{array}\right. \quad (6)$$

Commentaire

Comme il était prévu, p, v_x et v_z sont des quantités du premier ordre par rapport à ξ_0.

2. b. β) Une particule fluide située à la surface de l'eau doit avoir une vitesse tangente à celle-ci **dans le référentiel de la houle.** Considérons le référentiel $\mathcal{R}'(M, xyz)$ d'origine $M(x, z = \xi(x, t))$ lié à la surface de l'eau, pour une abscisse x fixée.



Dans ce référentiel, la vitesse de la particule est (v'_x, v'_z) avec $v'_x = v_x$ (x fixé) et $v'_z = v_z - \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ (composition des vitesses).

La condition cherchée s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v'} \,//\, \vec{\tau} \text{ (vecteur tangent à la surface)} \\ \text{or } \vec{\tau} \,//\, \left(dx, \dfrac{\partial \xi}{\partial x}dx\right) \,//\, \left(1, \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right) \end{array}\right\} (v'_x, v'_z) \,//\, \left(1, \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

soit $v'_x \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = v'_z \Rightarrow v_z = \dfrac{\partial \xi}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

$$\boxed{v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ au point } (x, z = \xi(x, t))} \quad (7)$$

À l'ordre 1, cette équation devient avec (6) ($v_x \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ est un terme d'ordre 2) :

$$-\frac{q}{\omega} g\xi_0 \cdot (-1) \cdot \sin(\omega t - qx) = -\xi_0 \omega \sin(\omega t - qx)$$

Copyrighted material

soit : $\boxed{\omega^2 = qg}$ (8)

C'est la relation de dispersion (liant ω à q). Elle permet de déterminer la pulsation de propagation ω de vagues de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{q}$, et d'en déduire la célérité de propagation de la houle sinusoïdale :

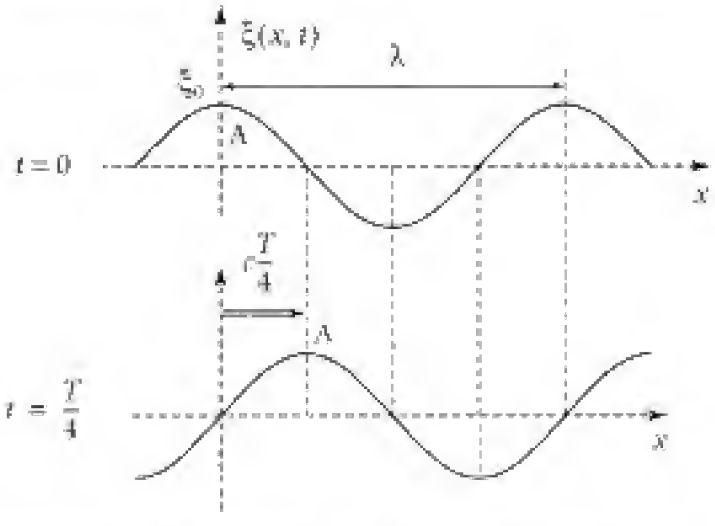
$$c = \frac{\omega}{q} = \frac{1}{q}\sqrt{qg} = \sqrt{\frac{g}{q}} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}} \quad (9)$$

c s'appelle encore vitesse de phase ($c = v_\varphi$) ;

A.N. : pour $\lambda = 10$ m, $c = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 10}{2\pi}} \Rightarrow c \approx 4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Commentaires

• Une solution telle que $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t - qx)$ correspond à une onde plane progressive de pulsation ω (périodicité dans le temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$) et de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{q}$ (périodicité spatiale selon Ox).



On a : $\xi(x + dx, t + dt) = \xi(x, t)$ pour $\omega \cdot (t + dt) - q \cdot (x + dx) = \omega t - qx$

soit $\omega dt = q dx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{q}$.

Cette quantité représente la célérité c avec laquelle la crête A, et donc l'onde considérée, se déplace : $c(\omega) = \frac{\omega}{q}$.

Or $\omega = 2\pi\nu$ (ν = fréquence $= \frac{1}{T}$) et $q = \frac{2\pi}{\lambda}$, soit : $\boxed{\lambda\nu = c}$

• La célérité c est d'autant plus grande que la distance entre les crêtes est importante.

• Fréquence : $\nu = \frac{c}{\lambda} = 0{,}4$ Hz.

Copyrighted material

• L'amplitude est réduite d'un facteur 1 000 à une profondeur H telle que :

$$e^{-qH} = 10^{-3} \Rightarrow H = \frac{1}{q} \cdot 3\ln 10 = \lambda\frac{3\ln 10}{2\pi}$$

$$H = 1{,}1\,\lambda \Rightarrow H \sim 11\ \text{m}.$$

Commentaires

• La perturbation engendrée par une houle de longueur d'onde λ ne pénètre l'océan que sur une profondeur de l'ordre de λ (« effet de peau »).

L'approximation d'un océan de profondeur infinie est donc réalisée dès que h (profondeur réelle) est grande par rapport à λ.

• Les équations (*cf.* (1) et (3)) traitant du problème de la houle sont linéaires (ce qui n'est pas le cas de l'équation d'Euler). **À cette approximation,** la solution générale est la superposition de telles ondes harmoniques d'amplitude, de célérité $c(q)$, et de directions de propagation « quelconques »…

2. c. ■ Pour tenir compte de la profondeur d, il faut adapter les résultats du **1. c.**

Le fluide étant parfait, la seule condition à imposer en $z = -d$ est : $v_z(x, -d, t) = 0$.

D'où : $\underline{A}e^{-qd} = \underline{B}e^{qd}$ $(= \underline{\alpha})$,

ce qui donne : $\underline{v_z} = \dfrac{jq}{\omega\rho_0}\underline{\alpha}(e^{q(z+d)} - e^{-q(z+d)})\exp[j(\omega t - qx)]$

soit : $\begin{cases} \underline{v_z} = 2j\underline{\alpha}\dfrac{q}{\omega\rho_0}\sinh[q(z+d)]\exp[j(\omega t - qx)] \\ \underline{p} = 2\underline{\alpha}\cosh[q(z+d)]\exp[j(\omega t - qx)]. \end{cases}$

■ Les conditions aux limites à la surface s'écrivent ici (*cf.* **2. b. α)**) :

• $\rho_0 g\underline{\xi}(x, t) \approx p(x, 0, t)$

soit encore : $\rho_0 g\underline{\xi}(x, t) = 2\underline{\alpha}\cosh(qd)\exp[j(\omega t - qx)]$

de la forme $\underline{\xi}(x, t) = \underline{\xi}_0\exp[j(\omega t - qx)]$ avec $\underline{\xi}_0 = \dfrac{2\underline{\alpha}}{\rho_0 g}\cosh(qd)$;

• et $v_z = \dfrac{\partial\xi}{\partial t}$ en $(x, \xi(x, t))$, ce qui donne à l'ordre 1 (*cf.* **2. b. β)**) : $\underline{v_z}(x, -0, t) = j\omega\underline{\xi}$

d'où : $2j\underline{\alpha}\dfrac{q}{\omega\rho_0}\sinh(qd) = j\omega\dfrac{2\underline{\alpha}}{\rho_0 g}\cosh(qd)$.

Et après simplifications : $\boxed{\omega^2 = gq\tanh(qd)}$ (10)

Commentaires

• On retrouve le résultat du **2. b.** pour $qd \gg 1$ (soit $d \gg \lambda$) : $\tanh(qd) \to 1$ et $\omega^2 \approx gq$.

• La célérité d'une telle onde harmonique est maintenant :

$$c = \frac{\omega}{q} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \cdot \sqrt{\tanh\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right)} = c_\infty(\lambda)\sqrt{\tanh\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right)}$$

Copyrighted material

où $c_\infty(\lambda)$ représente la célérité pour une longueur d'onde λ et une profondeur infinie.

On a donc $c(\lambda) < c_\infty(\lambda)$. Plus la profondeur est faible, plus la célérité diminue (à λ fixée).

• Pour un bassin peu profond (qd petit devant 1, soit $2\pi\frac{d}{\lambda} \ll 1$), on obtient

$$\omega^2 \approx gdq^2, \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega \approx \sqrt{gd}q}$$

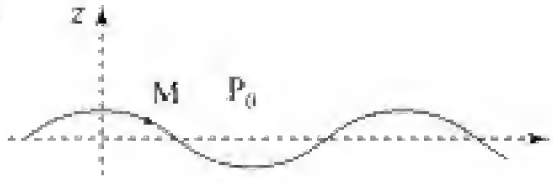
La célérité des ondes correspondantes devient indépendante de λ (il n'y a plus dispersion) :

$$\boxed{c = c_0 = \sqrt{gd}} \quad \boxed{d \ll \lambda}$$

2. d. α) ■ On revient à un océan de profondeur « infinie » et on désire tenir compte des phénomènes de tension superficielle.

La pression au point M situé à la surface du fluide est alors donnée par l'expression :

$$P(x, \xi(x, t), t) = P_0 - \sigma \cdot \frac{1}{R}$$



R est le rayon de courbure au point M.

On a : $\frac{1}{R} = \dfrac{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}{\left(1+\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)^2\right)^{3/2}}$, soit au premier ordre par rapport à ξ_0 : $\frac{1}{R} \approx \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

d'où $\boxed{P(x, \xi(x, t), t) = P_0 - \sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}$ (11)

■ La relation de continuité relative à la pression s'écrit maintenant :

$$P_0 - \rho_0 g\xi(x, t) + p(x, \xi(x, t), t) = P_0 - \sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

soit toujours au 1er ordre : $p(x, z=0, t) = \rho_0 g\xi(x, t) - \sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$.

Reprenant les notations du **2. a.**, il vient :

$$\underline{A}\exp[j(\omega t - qx)] = \rho_0 g\xi_0 \cdot \left[1 + \frac{\sigma}{\rho_0 g}q^2\right] \cdot \exp[j(\omega t - qx)]$$

d'où $\quad \underline{A} = \rho_0 g\xi_0 \cdot \left[1 + \dfrac{\sigma}{\rho_0 g}q^2\right]$ (12)

■ Enfin la relation de continuité concernant la vitesse (*cf.* **2. b. β)**) donne :

$$\underline{v_z}(x, z=0, t) = j\omega\underline{\xi} = j\omega\underline{\xi_0}\exp[j(\omega t - qx)]$$

avec (*cf.* **1. c.**) $\quad \underline{v_z} = \dfrac{jq}{\omega\rho_0}\underline{A}e^{qz}\exp[j(\omega t - qx)]$.

d'où : $\quad \dfrac{jq}{\omega\rho_0}\underline{A} = j\omega\underline{\xi_0} \Rightarrow q\underline{A} = \omega^2\rho_0\underline{\xi_0}$

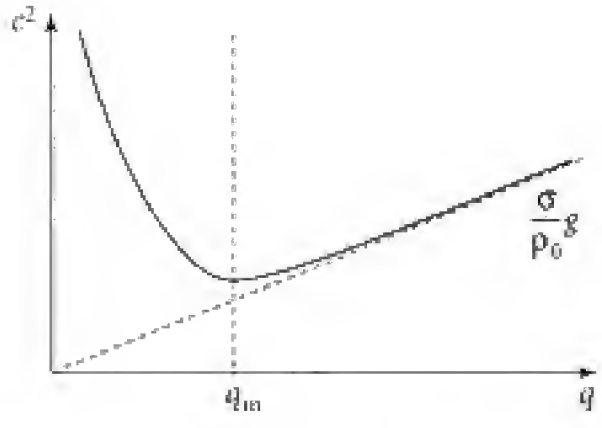
et avec (12) : $\quad q\rho_0 g\xi_0\left(1 + \dfrac{\sigma}{\rho_0 g}q^2\right) = \omega^2\rho_0\xi_0$.

Copyrighted material

Finalement : $\boxed{\omega^2 = qg \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho_0 g} q^2\right)}$

■ **β)** La célérité c des ondes harmoniques est donnée par :

$$c = \frac{\omega}{q} \Rightarrow c^2 = g \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{\sigma}{\rho_0 g} q\right).$$



Elle présente un minimum pour $q^2 = q_m^2 = \frac{\rho_0 g}{\sigma}$, d'où : $q_m = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\sigma}}$

et $c_m^2 = \frac{g}{q_m}\left(1 + \frac{\sigma}{\rho_0 g} \cdot q_m^2\right)$

$$c_m^2 = 2g\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 g}} \Rightarrow \boxed{c_m = \left[2\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho_0}}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Or $q_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}$, soit $\boxed{\lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 g}}}$

• Pour $\lambda \gg \lambda_m$, on a $q \ll q_m$ et donc $\frac{\sigma}{\rho_0 g} q^2 \ll 1$. Dès lors $\omega^2 = gq$ et ce sont les phénomènes dus à la pesanteur qui prédominent, ce qui semble normal aux « grandes » longueurs d'onde.

• Pour $\lambda \ll \lambda_m$, et donc $q \gg q_m$, $\omega^2 \approx gq\frac{\sigma}{\rho_0 g} q^2$, soit $\omega \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0}} q^{\frac{3}{2}}$. Le phénomène est commandé par la tension superficielle.

A.N. : $\lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{7{,}25 \cdot 10^{-2}}{10^3 \times 9{,}81}} \Rightarrow \lambda_m = 1{,}7$ cm.

Dans la première partie, on a pris $\lambda = 10$ m. On a donc eu raison de ne pas tenir compte des effets de tension superficielle ($\lambda \gg \lambda_m$).

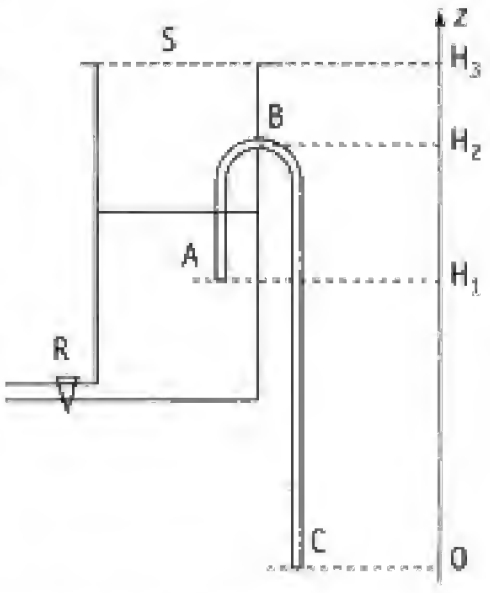
Copyrighted material

207 Vase de Tantale

Un récipient cylindrique d'axe vertical est alimenté en eau par l'intermédiaire d'un robinet R (débit volumique D supposé constant, mais réglable).

On lui adjoint un siphon de vidange représenté par le tube creux recourbé ABC (section du tube égale à s).

L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible (masse volumique ρ = cste).



1. Décrire qualitativement, selon les valeurs de D, l'évolution du système.

On posera : $D_1 = s\sqrt{2gH_1}$; $D_2 = s\sqrt{2gH_2}$ et $D_3 = s\sqrt{2gH_3}$.

2. a. Dans le cas d'un régime périodique, évaluer la période T des oscillations.

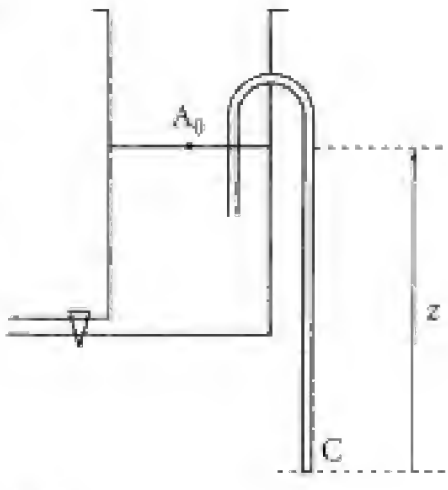
b. Que devient le résultat précédent pour D suffisamment petit par rapport à D_1 ?

A.N. : calculer T pour $\frac{S}{s} = 100$; $\frac{D_1}{D} = 10$; $H_2 = 20$ cm ; $H_1 = 15$ cm et $g = 9{,}8$ m · s^{-2}.

Solution

1. Étudions d'abord le fonctionnement du siphon lorsque celui-ci a été amorcé.

Nous nous placerons dans l'hypothèse où le rapport $\frac{s}{S}$ est suffisamment petit pour que la vitesse V du fluide dans le récipient soit très petite devant celle v du fluide dans le tube. Admettons, de plus, l'approximation qui consiste à appliquer le théorème de Bernoulli, en régime « quasi permanent », entre les points A_0 et C du fluide :



$$\frac{P_0}{\rho} + gz \# \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \text{ soit } v \# \sqrt{2gz}.$$

Soit un débit volumique de vidange : $D_{vid} = sv \# s\sqrt{2gz}$.

Ce débit présente trois valeurs caractéristiques :

– valeur minimale : $D_{vid})_{min} = D_1 \# s\sqrt{2gH_1}$;

– valeur intermédiaire correspondant au niveau d'amorçage du siphon :

$$D_{vid})_{int} = D_2 \# s\sqrt{2gH_2} ;$$

Copyright material

– valeur maximale : $D_{vid})_{max} = D_3 \# s\sqrt{2gH_3}$.

■ **1er cas : $D > D_3$:**

Le niveau du fluide va montrer dans le récipient. En atteignant l'altitude H_3, le siphon s'amorce mais le débit de ce dernier est insuffisant pour contrecarrer la montée du fluide qui n'est que ralentie. Le fluide va atteindre le niveau supérieur du récipient (puisque $D > D_3$) et donc débordera (avec un débit $D - D_3$ ...).

■ **2e cas : $D_2 < D < D_3$:**

Même description que précédemment jusqu'à ce que le fluide atteigne une altitude $H(D)$ telle que $H_2 < H(D) < H_3$ avec $D = s\sqrt{2gH(D)}$. Le niveau du fluide se stabilisera à cette altitude, les débits entrant (robinet) et sortant (siphon) étant alors égaux.

■ **3e cas : $D_1 < D < D_2$:**

Le fluide monte dans un premier temps, jusqu'à l'altitude H_2 puis le siphon s'amorce. Le débit de celui-ci étant alors supérieur à D ($D_2 > D$), le niveau se met à baisser jusqu'à une altitude H' telle que : $H_1 < H' < H_2$ avec $D = s\sqrt{2gH'}$.

Le niveau du fluide se stabilisera à cette altitude.

■ **4e cas : $0 < D < D_1$:**

Le fluide monte jusqu'à l'altitude H_2 puis redescend ($D < D_1 < D_2$). le siphon se désamorce alors en H_1 (cet état est effectivement atteint puisque $D < D_1$). Le robinet R assure alors la remontée du fluide jusqu'en H_2... Le système est le siège d'**oscillations de relaxation entretenues** (source de fluide) : vase de Tantale.

2. a. Nous supposons donc que le débit est suffisamment faible ($D < D_1$) pour assurer les oscillations. La surface du fluide oscille entre les niveaux d'altitude H_1 et H_2, et l'évolution du système, en régime permanent, se présente comme la succession de deux phases.

■ **1re phase :** le siphon est désamorcé, et l'eau dans le récipient monte de H_1 à H_2 pendant un intervalle de temps Δt_r tel que :

$$\Delta t_r = \frac{S(H_2 - H_1)}{D}.$$

■ **2e phase :** le siphon fonctionne et le niveau baisse de H_2 à H_1. On supposera que le temps nécessaire à l'établissement du régime quasi permanent dans le siphon est négligeable.

Dès lors, pendant dt, le niveau voit varier son altitude de dz ($dz < 0$) avec :

$$-S\,dz = (D_{siphon} - D)\,dt$$

soit encore :

$$-S\frac{dz}{dt} = s\sqrt{2gz} - D.$$

Or $D_1 = s\sqrt{2gH_1}$ d'où $-S\frac{dz}{dt} = D_1\sqrt{\frac{z}{H_1}} - D.$

Posons $u = \sqrt{\frac{z}{H_1}}$, soit $z = H_1u^2$ et $dz = 2H_1u\,du$

$$-2SH_1u\frac{du}{dt} = D_1u - D \quad \text{et} \quad \frac{-u\,du}{D_1u - D} = \frac{dt}{2SH_1}$$

Copyrighted material

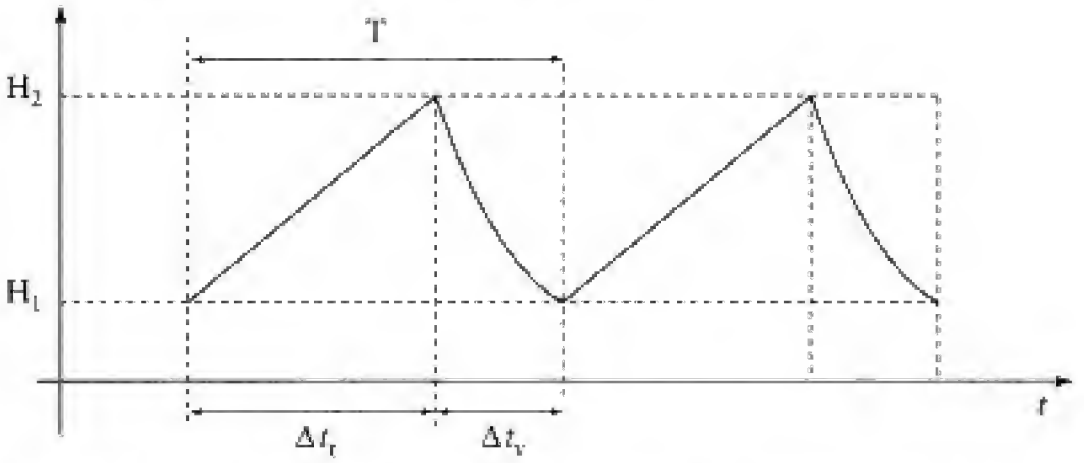
avec : $1 \leqslant u < \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}$ et $D_1 > D$. La durée associée à cette phase est alors :

$$\Delta t_v = \frac{2SH_1}{D_1}\int_{\sqrt{\frac{H_2}{H_1}}}^{1} \frac{u\,du}{\frac{D}{D_1} - u} = \frac{2SH_1}{D_1}\left[-u - \frac{D}{D_1}\ln\left(u - \frac{D}{D_1}\right)\right]_{\sqrt{\frac{H_2}{H_1}}}^{1}.$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta t_v = \frac{2SH_1}{D_1}\left[\left(\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} - 1\right) + \frac{D}{D_1}\ln\frac{\left(\frac{D_1}{D}\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} - 1\right)}{\left(\frac{D_1}{D} - 1\right)}\right]}$$

Les oscillations présentent une période $T = \Delta t_r + \Delta t_v$.



2. b. Dans le cas où D est petit devant D_1, la durée Δt_v de « vidange » se réduit à :

$$\Delta t_v \# \frac{2SH_1}{D_1}\cdot\left(\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} - 1\right)$$

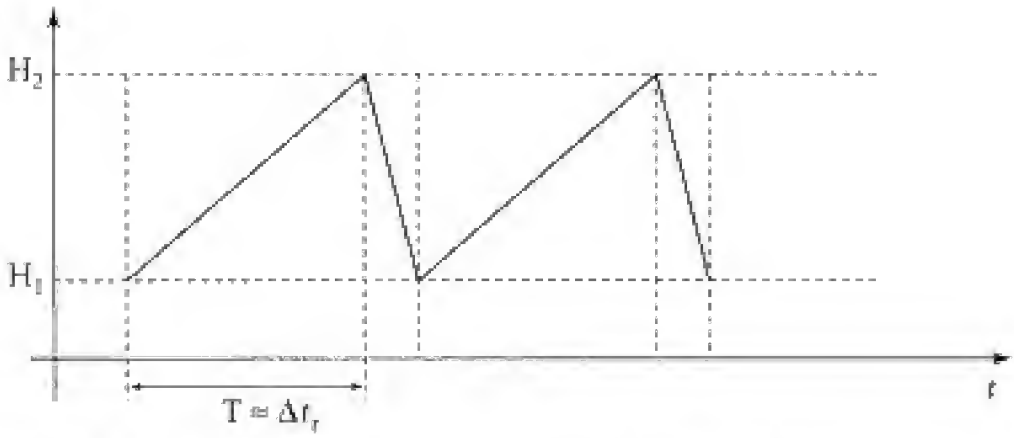
et : $\dfrac{\Delta t_v}{\Delta t_r} \# \dfrac{2H_1\left(\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} - 1\right)}{H_2 - H_1}\cdot\dfrac{D}{D_1} \# \dfrac{2}{1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}}\cdot\dfrac{D}{D_1} < \dfrac{D}{D_1}$.

Ainsi pour $H_1 = 15$ cm, $H_2 = 20$ cm et $D = \frac{1}{10}D_1$, il vient :

$$\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} - 1 = 0{,}155 \quad \text{et} \quad \frac{D}{D_1}\ln\frac{\left(\frac{D_1}{D}\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} - 1\right)}{\left(\frac{D_1}{D} - 1\right)} = 0{,}01586$$

et dans ce cas : $\dfrac{\Delta t_v}{\Delta t_r} = 0{,}09$.

Copyrighted material



La période T des oscillations peut s'évaluer à l'aide de l'expression :

$$T \# \Delta t_r \quad \text{c'est-à-dire} \quad T \# \frac{S(H_2 - H_1)}{D}.$$

L'amplitude des oscillations est réglée par la différence d'altitude $H_2 - H_1$. Leur période peut varier largement avec le débit D (période = $\frac{\text{volume}}{\text{débit}}$ ...)

A.N. : $T = \frac{S}{s}\frac{D_2}{D}\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{H_2 - H_1}{\sqrt{H_1}} \Rightarrow T \approx \mathbf{29\ s}.$

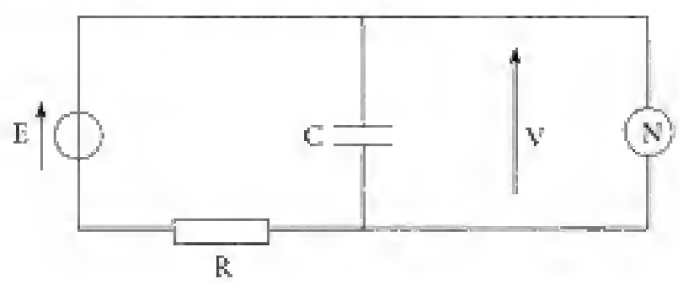
Commentaires

• La pression au point culminant B du siphon est donnée par le théorème de Bernoulli :

$$\frac{P_B}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gH_2 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 \quad \text{soit} \quad P_B = P_0 - \rho g H_2.$$

La pression en B est plus faible que la pression atmosphérique, et doit rester supérieure à la pression de vapeur saturante du fluide à la température considérée afin d'éviter le phénomène de cavitation (ce qui est assuré ici : $\rho = 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g \sim 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et H_2 raisonnable).

• Citons un dispositif analogue en électrocinétique.



C est une capacité et N une lampe à néon présentant une résistance R_c lorsqu'elle est éteinte et R_a lorsqu'elle est allumée, avec $R_a \ll R_c$. On peut alors choisir la résistance de charge R de telle manière que : $R_a \ll R \ll R_c$ soit encore $R_aC \ll RC \ll R_cC$.

Quand la lampe est éteinte (1re phase), le condensateur se charge à travers R ($RC \ll R_cC$) et le potentiel V croît de V_e à V_a. Quand il atteint V_a, la lampe s'allume et le condensateur se décharge à travers elle (2de phase, $R_aC \ll RC$), la tension V retombant à V_e.

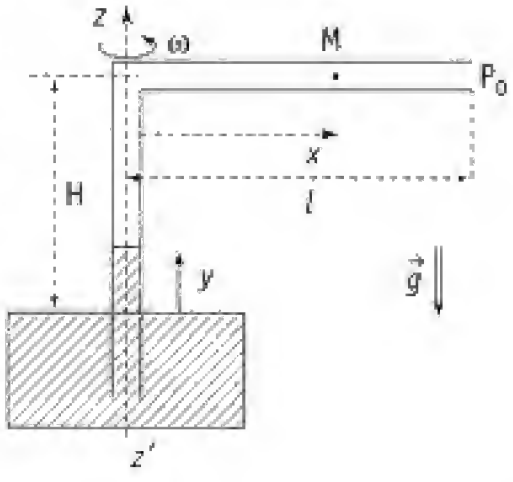
La lampe à néon joue le rôle du siphon, la capacité celui de récipient, et l'ensemble (E, R) celui de la source, la résistance R permettant de régler le débit.

Copyrighted material

208 Tube en rotation

Un tube coudé plonge dans un liquide de masse volumique μ. Il tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical $z'z$.

En régime établi, le niveau du liquide se situe dans la branche verticale du tube, à une distance y de celui de la cuve.



1. Calculer au point M, la pression $P(x)$ de l'air en fonction de P_0, ω, l, x et de la masse volumique ρ_0 de l'air (conditions P_0, T_0) dans les deux cas suivants :

– on suppose $\rho(\text{air}) = \text{cste} = \rho_0$;

– on prend en compte les variations de ρ avec P, la température étant supposée uniforme (T_0). P_0 est la pression de l'air ambiant à l'altitude de la branche horizontale.

2. Déterminer la dénivellation y du liquide.

A.N. : calculer y pour $\omega = 100\ \pi\ s^{-1}$; $l = 0{,}10$ m $(H \sim l)$; $\mu = 10^3\ kg \cdot m^{-3}$; $\rho_0 = 1{,}2\ kg \cdot m^{-3}$ et $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$.

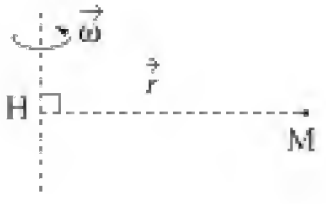
Solution

1. La rotation du tube va avoir pour effet de « chasser » de l'air du tube horizontal et d'y créer, en régime établi, une dépression. Le liquide monte donc dans le tube vertical. Considérons l'air contenu dans le tube horizontal et plaçons-nous, en régime établi, dans le référentiel tournant. L'air y est au repos. Les lois de l'hydrostatique donnent :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\vec{g} + \vec{f}_v \quad (1)$$

La densité de force volumique $\vec{f}_v$ est ici associée aux forces d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_v = \rho\omega^2\vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{HM}.$$



Projetons la relation (1) selon l'axe horizontal du tuyau.

Il vient : $-\dfrac{\partial P}{\partial x} + \rho\omega^2 x = 0$ soit $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x} = \rho\omega^2 x}$

■ **Premier cas : $\rho = \text{cste} = \rho_0$**

Par intégration, nous obtenons avec $P(l) = P_0$: $P_0 - P(x) = \dfrac{1}{2}\rho_0\omega^2(l^2 - x^2)$

soit $$\boxed{P(x) = P_0 - \frac{1}{2}\rho_0\omega^2(l^2 - x^2)} \quad (3)$$

La pression diminue bien quand on se rapproche de l'axe de rotation.

Copyrighted material

■ Deuxième cas : assimilons l'air à un gaz parfait : $PV = nRT_0$.

En notant M la masse molaire, nous avons $P = \rho\dfrac{RT_0}{M}$.

Soit $\rho = \dfrac{PM}{RT_0} = \rho_0\dfrac{P}{P_0}$ en posant $\rho_0 = \dfrac{P_0M}{RT_0}$. D'où, d'après (2) :

$$\frac{dP}{dx} = \rho_0\omega^2\frac{P}{P_0}x \quad \text{et} \quad \frac{dP}{P} = \frac{\rho_0}{P_0}\omega^2 x\,dx \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \ln\left(\frac{P(x)}{P_0}\right) = \frac{\rho_0\omega^2}{2P_0}(x^2 - l^2)$$

$$\boxed{P(x) = P_0 e^{-\frac{\rho_0\omega^2}{2P_0}(l^2 - x^2)}} \quad (4)$$

Commentaire

Pour $\left(\dfrac{\rho_0\omega^2}{2P_0}l^2\right)$ suffisamment petit devant l'unité, on peut linéariser l'exponentielle, ce qui permet de retrouver (3) :

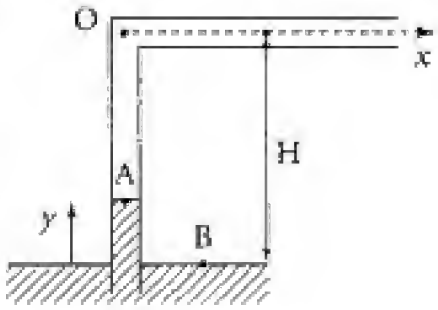
$$P(x) \approx P_0\left(1 - \frac{\rho_0\omega^2}{2P_0}(l^2 - x^2)\right) \Rightarrow P(x) \approx P_0 - \frac{1}{2}\rho_0\omega^2(l^2 - x^2).$$

2. On va négliger les variations de pression de l'air ΔP sur les hauteurs inférieures ou égales à H :

$$\Delta P \leqslant \rho_0 gH.$$

Comparons ΔP et $P_l - P(0) = P_0 - P(0)$ déduit de la formule (3) :

$$\frac{\Delta P}{P_l - P(0)} \leqslant \frac{\rho_0 gH}{\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 l^2} \leqslant \frac{2gH}{\omega^2 l^2}.$$



Or $\dfrac{2gH}{\omega^2 l^2} \approx \dfrac{2 \times 10 \cdot 0{,}1}{(100\pi)^2 0{,}1^2} = 2 \cdot 10^{-3}$ (pour $l \approx H = 10$ cm) $\Rightarrow \boxed{\Delta P \ll P_0 - P(0)}$

D'autre part : $\dfrac{\rho_0\omega^2 l^2}{2P_0} = 1 \cdot \dfrac{(100\pi)^2 \times 10^{-2}}{2 \cdot 10^5} \approx 5 \cdot 10^{-3}$, on a donc avec une bonne approximation : $P(0) = P_0 - \dfrac{1}{2}\rho_0\omega^2 l^2$.

En conséquence, il vient :

$$\left.\begin{aligned} P_B &= P_0 \\ P_A &= P(0) = P_0 - \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 l^2 \end{aligned}\right\} \boxed{P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 l^2} \quad (5)$$

Cette différence de pression doit permettre d'équilibrer le poids de la colonne de liquide de hauteur y, soit : $(P_B - P_A)s = \mu g y s$ ($s \equiv$ section du tube).

Finalement, nous obtenons :

$$\boxed{y \approx \frac{1}{2}\frac{\rho_0\omega^2 l^2}{\mu g}}$$

L'application numérique donne $y \approx 6$ cm.

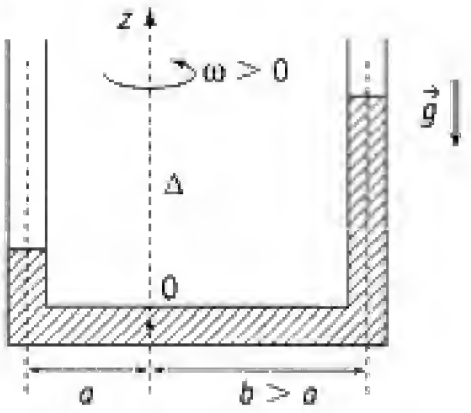
Copyrighted material

209 Tube en U en rotation

Un tube en U, vertical, de faible section contient un fluide parfait, homogène et incompressible (masse volumique ρ constante).

Le tube tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical Δ passant par le point O : on supposera qu'il y a toujours du fluide dans les deux branches verticales.

On note h la hauteur de fluide dans les branches verticales pour $\omega = 0$, et L désigne la longueur totale de tube remplie de fluide.



1. Définir l'état d'équilibre relatif. Montrer que la présence de fluide dans chaque branche verticale suppose que ω reste inférieure à une valeur ω_{max} que l'on déterminera.

2. Étudier, à l'aide d'arguments énergétiques, la stabilité d'un tel équilibre ($0 < \omega < \omega_{max}$). On se placera dans le référentiel tournant avec le tube, et on y définira une énergie potentielle (forces de peseanteur et forces d'inertie d'entraînement).

3. Déterminer la nature du mouvement du fluide par rapport à l'état d'équilibre précédemment défini.

Solution

1. On supposera les dimensions transversales du tube suffisamment faibles devant les distances à l'axe de rotation a et b. On admettra également que pour ω fixé, a et b ne sont pas trop grands. Ainsi, on pourra considérer que les surfaces libres du fluide dans chaque tube sont quasi planes (en toute rigueur, et pour un état d'équilibre, elles s'inscrivent sur un paraboloïde d'axe Oz).

Plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au tube. Les forces volumiques subies par le fluide se composent :

– des forces de pesanteur $\rho\vec{g}$;

– des forces d'inertie $\rho\omega^2\vec{r}$ ($\vec{r}$ est la distance vectorielle du point considéré à l'axe de rotation) ; on négligera, d'après les hypothèses faites plus haut, les variations de cette force sur une section donnée des branches verticales du tube en U.

À l'équilibre, on doit avoir (*cf.* hydrostatique) dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$:

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\vec{g} + \rho\omega^2\vec{r}.$$

Or $\rho\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z)$ et $\rho\omega^2\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\right)$

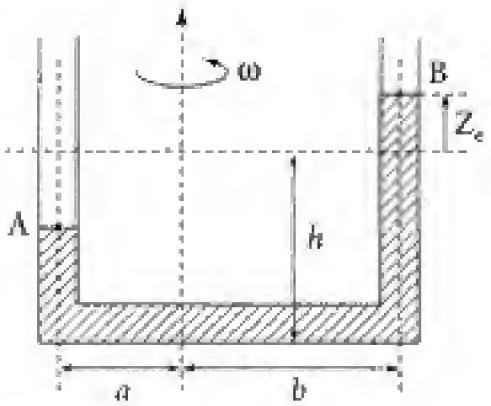
d'où $$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left[P + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\right].$$

Copyrighted material

L'équilibre est donc caractérisé par la relation (au sein du fluide) :

$$\boxed{P + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \text{cste}}$$

Soit en considérant les points A et B :



$z_B = h + Z_e$

$z_A = h - Z_e$

$$P_A + \rho g(h - Z_e) - \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 = P_B + \rho g(h + Z_e) - \frac{1}{2}\rho\omega^2 b^2.$$

Or $P_A = P_B = P_0$ d'où :

$$2\rho g Z_e = \frac{1}{2}\rho\omega^2(b^2 - a^2)$$

$$\boxed{Z_e = \frac{\omega^2}{4g}(b^2 - a^2)}$$

Conformément aux hypothèses, il reste du fluide dans le tube vertical (distant de « a » de l'axe de rotation) à la condition $Z_e < h$.

Il faut donc que : $\dfrac{\omega^2}{4g}(b^2 - a^2) < h \Rightarrow \omega^2 < \dfrac{4gh}{(b^2 - a^2)}$.

Ce qui implique une valeur limite à la vitesse de rotation du tube en U :

$$\omega < \omega_{max} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{4gh}{(b^2 - a^2)}}}$$

ce qui permet d'écrire $Z_e = \dfrac{\omega^2}{\omega_{max}^2} h$.

Commentaires

• La force d'inertie est plus grande dans le tube horizontal en $r = b$ qu'en $r = a$. Ceci implique que le niveau du liquide est plus haut dans le tube « b » que dans le tube « a ».

• Dans le tube horizontal, la pression est minimale au point O. Elle est définie par :

$$P(O) + 0 - 0 = P_0 + \rho g(h - Z_e) - \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2$$

$$P(O) = P_0 + \rho g\left[h - Z_e - \frac{2a^2 Z_e}{b^2 - a^2}\right]$$

$$P(O) = P_0 + \rho g\left[h - Z_e \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}\right].$$

La valeur la plus faible correspond, dans le cadre de nos hypothèses, à $Z_e = h$ soit :

$$P_{min}(O) = P_0 - \rho g h \frac{2a^2}{b^2 - a^2}.$$

Le problème étudié ici n'a de sens que si $P(O)$ n'est pas trop faible (sinon formation de bulles de vapeur…).

Copyrighted material

2. Étudions la stabilité d'un tel équilibre :

À cet effet, déterminons l'énergie potentielle associée au fluide :

$$E_p = E_p(\text{pesanteur}) + E_p(\text{inertie}).$$

Prenons l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au point O. Dès lors :

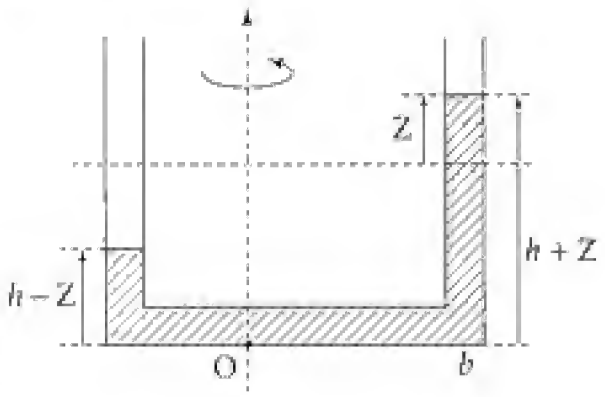
$E_p(\text{pesanteur}) = \underset{0}{\text{cste}} + E_{p_1} + E_{p_2}$

$E_{p_1} \Leftrightarrow$ tube vertical « a »

$E_{p_2} \Leftrightarrow$ tube vertical « b ».

Or $E_p(m) = mgz(G_m)$, d'où

$$E_{p_1} = m_1 g z_1 \text{ avec } \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(h - Z) \\ m_1 = \rho s(h - Z) \end{cases}$$



d'où $E_{p_1} = \frac{1}{2}\rho g s(h - Z)^2$; de même $E_{p_2} = \frac{1}{2}\rho g s(h + Z)^2$

soit $E_p(\text{pesanteur}) = \frac{1}{2}\rho g s[(h - Z)^2 + (h + Z)^2] = \rho g s(h^2 + Z^2)$.

Quant à l'énergie potentielle liée à la force d'inertie, elle est donnée, pour l'unité de volume, par :

$$\frac{\delta E_p(\text{inertie})}{\delta V} = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2.$$

La contribution du tube horizontal est constante tant que celui-ci est rempli (ce qui est le cas ici puisque l'on suppose $\omega < \omega_{max}$). Il reste donc celle des deux branches verticales, d'où :

$$E_p(\text{inertie}) = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 b^2 \cdot s(h + Z) - \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 \cdot s(h - Z)$$

et $$E_p(\text{inertie}) = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 s[h(b^2 + a^2) + Z(b^2 - a^2)].$$

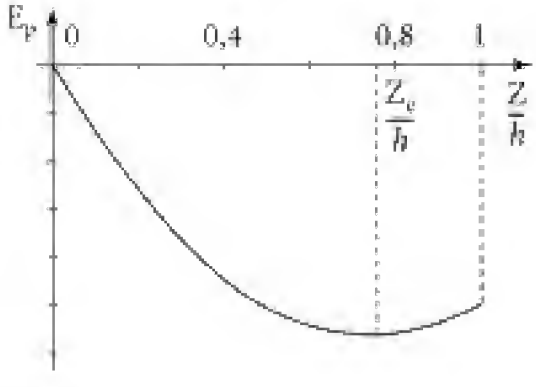
Au total :

$$E_p = \rho g s Z^2 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 s(b^2 - a^2)Z + \text{cste}.$$

Soit encore en faisant apparaître ω_{max} et h :

$$E_p = \rho s g\left[Z^2 - \frac{2\omega^2}{\omega_{max}^2} hZ\right] + \text{cste}$$

d'où $$E_p = \rho s g Z\left[Z - \frac{2\omega^2}{\omega_{max}^2} h\right] + \text{cste} \Rightarrow$$



$$\boxed{E_p = \rho s g\left(Z - \frac{\omega^2 h}{\omega_{max}^2}\right)^2 + \text{cste}}$$

Copyrighted material

ce qui s'écrit encore :

$$E_p = \rho s g (Z - Z_e)^2 + \text{cste.}$$

La courbe donnant $Z \to E_p(Z)$ est donc une parabole qui présente un minimum pour $Z = Z_e$.

La position d'équilibre est stable (minimum d'énergie potentielle).

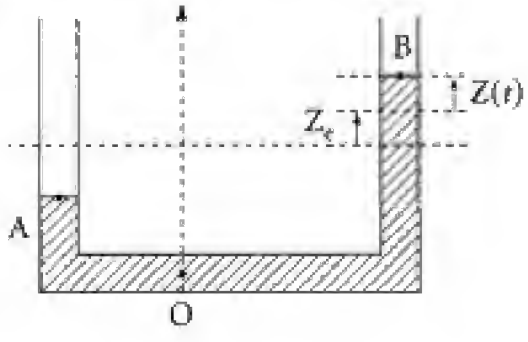
3. Utilisons l'équation d'Euler dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z - \rho \omega^2 \frac{r^2}{2}\right) = -\rho \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} + \vec{\varphi}_c.$$

$\vec{\varphi}_c$ désigne la densité volumique associée aux forces de Coriolis : $\vec{\varphi}_c = -2\rho\vec{\omega} \wedge \vec{v}$.

Projetons cette équation sur le « tube de courant », de A vers B.

La vitesse $\vec{v}$ étant colinéaire au tube, le second membre de l'équation précédente donne une contribution nulle, d'où :



$$\rho \int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = -\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z - \rho \omega^2 \frac{r^2}{2}\right) \cdot \vec{\delta l}$$

soit $\rho \int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = -\int_A^B \text{d}\left[\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z - \rho \omega^2 \frac{r^2}{2}\right] \cdot \vec{\delta l}$; d[ ] ≡ différentielle à t fixé

et $\rho \int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = -\left[\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z - \rho \omega^2 \frac{r^2}{2}\right]_A^B$.

Or à t donné, on a $v_A^2(t) = v_B^2(t)$ (fluide incompressible), $P_A = P_B = P_0$, $r_A = a$ et $r_B = b$, avec de plus : $z(B) = h + Z_e + Z'(t)$ et $z(A) = h - Z_e - Z'(t)$.

D'où : $$z(B) - z(A) = 2Z_e + 2Z'(t)$$

$$\rho \int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = \underbrace{\rho \frac{\omega^2}{2}(b^2 - a^2) - 2\rho g Z_e}_{0 \text{ (condition d'équilibre)}} - 2\rho g Z'(t).$$

De plus $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \delta l = \ddot{Z}' \delta l \Rightarrow \int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\delta l} = \ddot{Z}' L.$

Finalement, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho \ddot{Z}' L = -2\rho g Z'(t) \text{ et } \ddot{Z}' + \frac{2g}{L} Z' = 0.$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\Omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}.$$

Copyrighted material

Commentaire

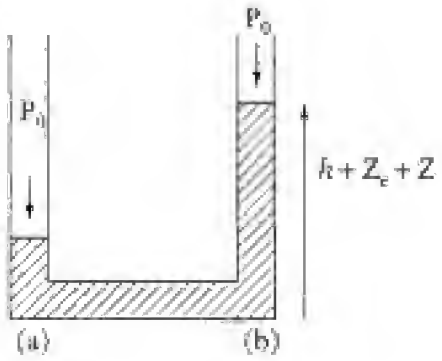
Une autre méthode consisterait à appliquer, au fluide parfait, le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}'(\text{forces d'inertie}).$$

Or $\mathcal{P}_{ext} = -\frac{dE_p}{dt}(\text{pesanteur}) + \underbrace{P_0 s\dot{Z}' - P_0 s\dot{Z}'}_{=0}$

$\mathcal{P}_{int} = 0$ (fluide parfait incompressible)

$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'(\text{entraînement}) + \underbrace{\mathcal{P}'(\text{Coriolis})}_{=0 \text{ (forces perpendiculaires à la vitesse)}}$.



Or $\mathcal{P}'(\text{entraînement}) = -\frac{dE_p}{dt}(\text{entraînement})$ (*cf.* **2.**)

d'où finalement : $\underbrace{E_c + E_p(\text{pesanteur}) + E_p(\text{entraînement})}_{E_p} = \text{cste}.$

D'après le **2.** : $E_p = \rho g s Z'^2 \quad (Z' = Z - Z_c)$.

Or la norme de la vitesse est la même en tout point du fluide à un instant t donné, soit :

$$E_c = \frac{1}{2} m_g v^2 \quad \text{avec} \quad m_g = \rho s l, \quad \text{et} \quad v^2 = \left(\frac{dZ'}{dt}\right)^2$$

d'où : $E_c = \frac{1}{2}\rho s L\left(\frac{dZ'}{dt}\right)^2$. La conservation de l'énergie se traduit alors par :

$$\frac{1}{2}\rho s L\left(\frac{dZ'}{dt}\right)^2 + \rho g s Z'^2 = \text{cste}.$$

Soit par simple dérivation et après simplification par $\rho s \frac{dZ'}{dt}$:

$$L\frac{d^2Z'}{dt^2} + 2gZ' = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2Z'}{dt^2} + \frac{2gZ'}{L} = 0}$$

conforme au résultat précédent $\left(\Omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}\right)$.

210 Modification de la largeur ou de la profondeur d'un canal

Partie A

De l'eau s'écoule dans un canal rectiligne (de direction $x'x$), à fond horizontal et de section droite rectangulaire de largeur $l(x)$, dont les variations sont supposées faibles en fonction de x. L'eau sera assimilée à un fluide parfait en écoulement incompressible et irrotationnel (masse volumique ρ = cste).

Copyrighted material

On note $h(x)$ la hauteur de liquide et $v(x)$ sa vitesse, supposée uniforme dans toute section ($\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$).

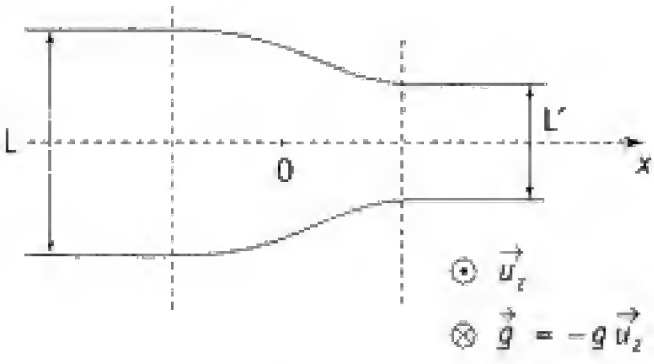
En amont, l'écoulement est caractérisé par :

$l = L, \quad h = H \quad \text{et} \quad v = U.$

En aval, on a : $l = L' < L$ (mais proche de L).

P_0 est la pression atmosphérique.

On pose $H_0 = H + \dfrac{U^2}{2g}$.



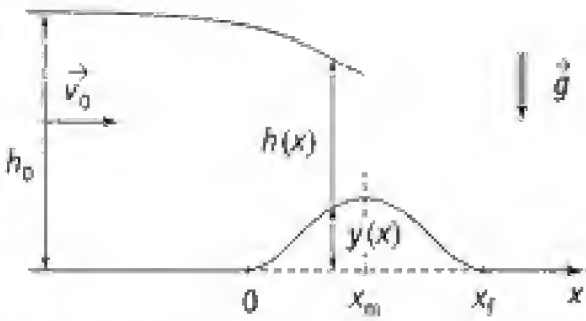
1. Donner l'expression du débit volumique rapporté à l'unité de largeur $q = \dfrac{D}{l}$ en fonction de g, h et H. En déduire la valeur maximale q_m de q et les valeurs correspondantes, v_m et h_m, de v et h.

Calculer la valeur du nombre de Froude : $F_m = \dfrac{v_m^2}{gh_m}$. Commenter.

2. La largeur du canal diminuant de L à L', indiquer comment varient h et v selon le régime d'écoulement (on a $q < q_m$).

Partie B

Un fluide incompressible (eau de masse volumique ρ) s'écoule avec une vitesse v_0, dans un canal rectangulaire. Le fond est plat, excepté sur l'intervalle $0 < x < x_f$ où il présente une bosse modélisée par la fonction $y(x)$, continue et dérivable (on a $y(0) = y(x_f) = 0$



et $\dfrac{dy}{dx}(0) = \dfrac{dy}{dx}(x_f) = 0$). Le régime est stationnaire et on néglige les effets de viscosité (fluide parfait).

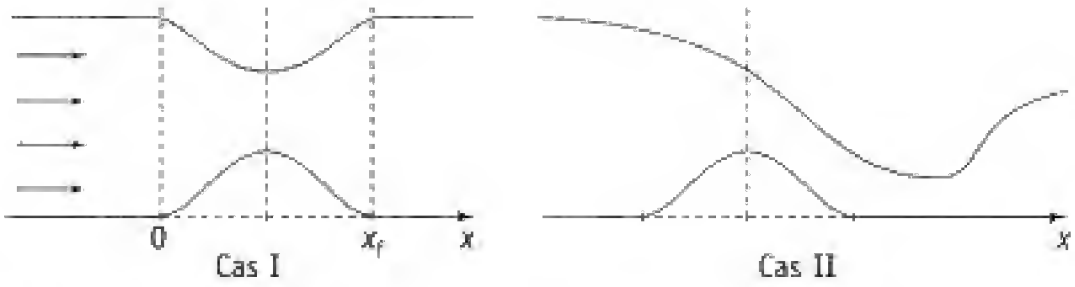
L'écoulement est caractérisé en amont de la bosse par un nombre de Froude :

$$F_0 = \frac{v_0^2}{gh_0} < 1.$$

Lors du franchissement de la bosse, la hauteur de fluide est notée $h(x)$ et sa vitesse $v(x)$ est prise parallèle à Ox et uniforme dans toute section verticale de l'écoulement. On note : $z(x) = y(x) + h(x)$.

1. L'expérience montre que deux cas peuvent se présenter associés aux configurations représentées ci-dessous :

Copyrighted material



a. Relier $\frac{dz}{dx}$ puis $\frac{dy}{dx}$ à $\frac{dh}{dx}$ et au nombre de Froude $F(x) = \frac{v^2(x)}{gh(x)}$.

b. Justifier qualitativement les deux profils d'écoulement envisagés plus haut (cas I et II).

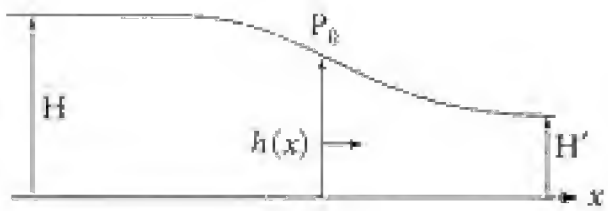
2. On prend : $h_0 = 0{,}50$ m et $v_0 = 0{,}60$ m · s^{-1}. La bosse présente une hauteur maximale $d = 5{,}0$ cm $(d = y(x_m))$. Tracer la fonction $h \to f(h) = h + \frac{v^2}{2g}$ et en déduire la nature de l'écoulement (faire un schéma).

On donne : $g = 9{,}81$ m · s^{-2}.

Solution

Partie A

A. 1. ■ D'après les hypothèses, la vitesse du fluide est pratiquement uniforme dans toute section verticale et l'écoulement s'éloigne très peu d'un écoulement parallèle de sorte que :



$$\vec{v} \approx v(x)\vec{u}_x$$

et d'après le théorème de Bernoulli :

$$\frac{v^2(x,z)}{2} + \frac{P(x,z)}{\rho} + gz = \text{cste dans tout le fluide (écoulement irrotationnel)} \quad (2)$$

d'où $\frac{v^2(x)}{2} + P(x, h(x)) + gh(x) = \text{cste}$

or $P(x, h(x)) = P_0$, soit : $\frac{v^2(x)}{2} + gh(x) = \text{cste} \Rightarrow h(x) + \frac{v^2(x)}{2g} = \text{cste} = K$

Or bien en amont $h = H$ et $v = U$ d'où : $K = H + \frac{U^2}{2g} = H_0$.

Finalement :

$$\boxed{h(x) + \frac{v^2(x)}{2g} = H + \frac{U^2}{2g} = H_0} \quad (3)$$

■ L'écoulement dans le canal constitue un tube de courant en régime stationnaire. Il y a donc conservation du débit volumique D, soit :

$$\boxed{D = \text{cste} = v(x)l(x)h(x) = ULH} \quad (4)$$

Copyrighted material

Or (3) implique : $v = \sqrt{2g}\cdot\sqrt{H_0 - h(x)}$

et avec (4) :

$$D = l(x)h(x)\sqrt{2g}\sqrt{H_0 - h(x)}$$

soit $$\boxed{q = \frac{D}{l(x)} = \sqrt{2g}\,h\sqrt{H_0 - h}} \quad 0 < h < H_0.$$

Étudions rapidement la fonction $q(h)$. On a $q(0) = 0$ et $q(H_0) = 0$

et $\dfrac{1}{q}\dfrac{dq}{dh} = \dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{2(H_0 - h)}$ (différentielle logarithmique).

Soit une dérivée nulle pour :

$$2(H_0 - h) = h \Rightarrow h = h_m = \frac{2}{3}H_0.$$

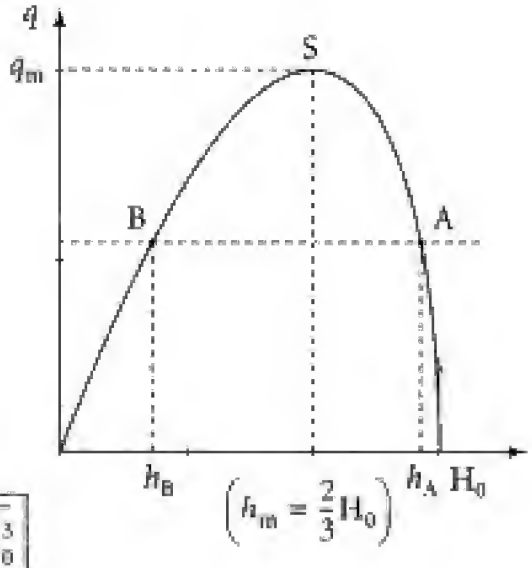
Dès lors $v_m = \sqrt{2g}\sqrt{H_0 - \dfrac{2}{3}H_0}$

$$v_m = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{3}H_0} \Rightarrow \sqrt{gh_m} = v_m$$

et $q_m = q(h_m) = \sqrt{2g}\dfrac{2}{3}H_0\sqrt{\dfrac{H_0}{3}}$.

D'où :

$$\boxed{h_m = \frac{2}{3}H_0\ ; \quad v_m = \sqrt{\frac{2}{3}gH_0}\ ; \quad q_m = \sqrt{\frac{8}{27}gH_0^3}}$$



■ Nombre de Froude : $F_m = \dfrac{v_m^2}{gh_m} \Rightarrow F_m = 1 \quad (v_m = \sqrt{gh_m})$.

Or $q = h(x)v(x)$. Ainsi pour un point tel que A du graphe précédent, on aura :

$$\left.\begin{array}{l} h_A > h_m \quad \text{et} \quad v_A = \sqrt{2g(H_0 - h_A)} < \sqrt{2g(H_0 - h_m)} \\ \text{d'où :} \qquad\qquad v_A < v_m \end{array}\right\} F_A = \frac{v_A^2}{gh_A} < F_m ;\ F_A < 1.$$

De même, pour le point figuratif B ($h_B < h_m$) :

$$h_B < h_m \quad \text{et} \quad v_B = \sqrt{2g(H_0 - h_B)} > v_m = \sqrt{2g(H_0 - h_m)}$$

d'où $$F_B = \frac{v_B^2}{gh_B} > \frac{v_m^2}{gh_m} = 1 \Rightarrow F_B > 1.$$

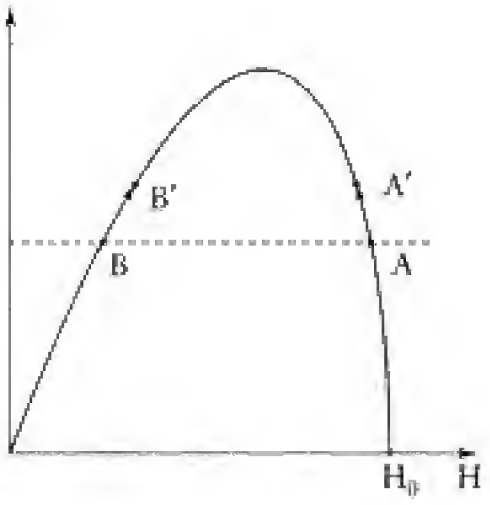
On peut alors distinguer deux types d'écoulement :

– l'écoulement fluvial (point A) : vitesses « faibles » et « grandes » profondeurs ;

– l'écoulement torrentiel (point B) : vitesses « importantes » et « faibles » profondeurs.

Copyrighted material

A. 2. La largeur $l(x)$ du canal diminue continûment de L à $L' < L$. L'écoulement se caractérise par la conservation du débit volumique $D = q(x)l(x)$.



■ Supposons que l'on soit dans le cas d'écoulement fluvial en amont (point A) :

$$q_A = \frac{D}{L} \quad \text{avec} \quad F_A = \frac{U^2}{gH} < 1$$

et $q(x) = \dfrac{D}{l(x)} = q_A \dfrac{L}{l(x)}$.

Le long de l'écoulement, l diminuant, $q(x)$ augmente. D'après le graphe précédent, on en déduit que h diminue et donc que v augmente (A → A').

■ Dans le cas contraire (écoulement torrentiel en amont : point B) :

$$q_B = \frac{D}{L} \quad \text{avec} \quad F_B = \frac{U^2}{gH} > 1 \quad \text{et} \quad q(x) = q_B \frac{L}{l(x)}.$$

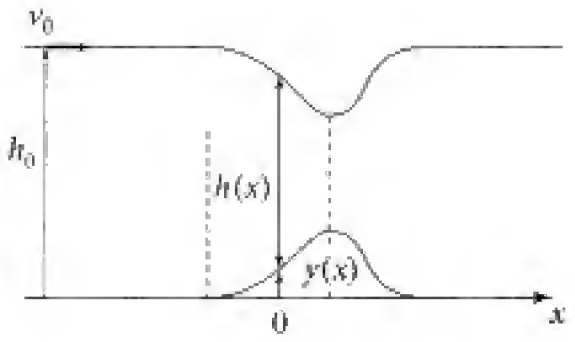
Le point figuratif se déplace de B à B', l diminuant. Il en résulte que h augmente et v diminue ($v = \sqrt{2g(H_0 - h)}$).

Partie B

B. 1. a. ■ L'écoulement est supposé unidimensionnel. La conservation du débit volumique implique :

$$h(x) \cdot v(x) = h_0 v_0 \quad (5)$$

Il en résulte que la vitesse du fluide augmente lorsque la hauteur d'eau diminue.



■ De plus, le fluide est supposé non visqueux. Le théorème de Bernoulli appliqué à la ligne de surface donne alors :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gh_0 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2(x)}{2} + g(h(x) + y(x)).$$

Soit en notant : $H = h_0 + \dfrac{v_0^2}{2g}$:

$$\boxed{H = h(x) + y(x) + \frac{v^2(x)}{2g}} \quad (6)$$

Étudions alors les variations de h et de v avec x. À cet effet, dérivons (5) et (6), nous obtenons :

$$h(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{dh}{dx} = 0 \quad (7)$$

Copyrighted material

$$\frac{dh}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{v(x)}{g}\frac{dv}{dx} = 0 \quad (8)$$

Éliminons $\frac{dv}{dx}$ entre ces deux dernières relations, il vient :

$$\frac{dh}{dx} + \frac{dy}{dx} = -\frac{v(x)}{g}\left(-\frac{v}{h}\frac{dh}{dx}\right) = \frac{v^2}{gh}\frac{dh}{dx}.$$

D'où en notant $z = h + y$ (cote du point de la surface libre de l'eau), et $F = \frac{v^2}{gh}$ le nombre de Froude en x :

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = F\frac{dh}{dx}} \quad (9) \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{dh}{dx}(1 - F) = -\frac{dy}{dx}} \quad (10)$$

La première équation traduit que **z et h varient dans le même sens.** La seconde indique, la quantité $\frac{dh}{dx}$ restant forcément finie, que F ne peut prendre la valeur 1 qu'en $x = x_m$ au sommet de la bosse.

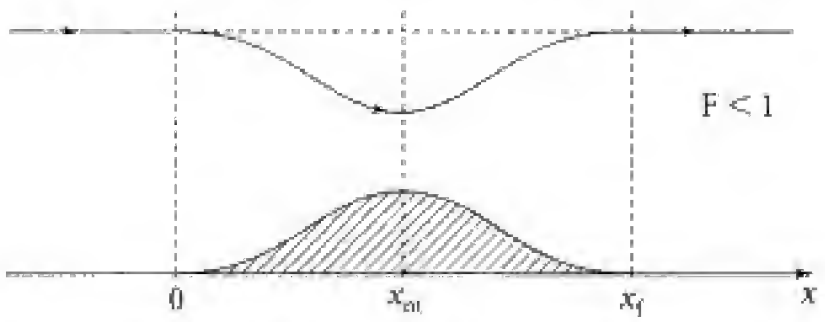
B. 1. b. On peut alors isoler deux cas de figure.

■ Cas 1 : puisque $F_0 < 1$, supposons que F n'atteint pas la valeur 1 en $x = x_m$. On a donc nécessairement $F < 1$ pour $x \leqslant x_m$. L'équation (10) précise, puisque $1 - F > 0$, que $\frac{dh}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ sont de signe contraire. Et d'après (9), **z diminue donc lorsque y augmente.**

En $x = x_m$, on a nécessairement $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = 0$ puisque $\frac{dy}{dx}$ y est nul et $1 - F > 0$.

Pour $x > x_m$, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ devient négative et $\frac{dh}{dx}$ positive, la quantité $1 - F$ restant positive puisqu'elle ne peut pas s'annuler dans ce cas : **z réaugmente donc.**

On obtient alors le profil suivant :



Ainsi quand le fluide passe de la section $x = 0$ à celle $x = x_m$, sa vitesse augmente (puisque h diminue) et le niveau de la surface baisse, alors que de $x = x_m$ à x_f, la vitesse diminue, le niveau de l'eau réaugmentant. On a donc :

– de 0 à x_m, v augmente et h diminue, soit F augmente pour atteindre en x_m une valeur maximale F_m toutefois inférieure à 1 ;

– de x_m à x_f, v diminue, h augmente et F diminue à partir de la valeur F_m ;

– pour $x > x_f$, l'écoulement a repris les mêmes caractéristiques qu'en amont ($x < 0$) : $h = h_0$ et $v = v_0$ (on a négligé les pertes d'énergie).

Copyrighted material

On a également : $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{F}{1-F}\dfrac{dy}{dx}$ $(F < 1)$

soit encore : $\int dy = y(x_f) - y(0) = 0 = -\int_{h_0}^{h_1} \dfrac{1-F}{F} dz$ $h_1 = h(x_f)$.

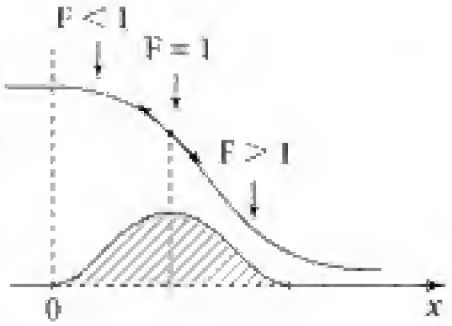
Or la fonction $\dfrac{1-F}{F}$ est continue et strictement positive sur l'intervalle considéré, donc $h_1 = h_0$.

■ **Cas II** : le nombre de Froude atteint la valeur 1, ce qui se produit nécessairement en $x = x_m$ (*cf.* (10)). $1 - F$ ne pouvant pas s'annuler avant, on a toujours h (et donc z) qui diminue quand on passe de $x = 0$ à $x = x_m$.

Dans ce cas, il est possible d'avoir $\dfrac{dh}{dx}$ non nul en $x = x_m$, et par là même, $\left(\dfrac{dh}{dx}\right)_{x_m} < 0$.

Par continuité, $\dfrac{dh}{dx}$ continue d'être négative quand on passe en $x = x_m$, et avec $\left(-\dfrac{dy}{dx}\right) > 0$ pour $x > x_m$, F devient supérieur à 1.

On peut donc observer la situation suivante :
$h(x)$ et $z(x)$ diminuent continûment au fur et à mesure que le fluide passe la bosse, sa vitesse augmentant. Le nombre de Froude, initialement inférieur à 1 croit en passant par la valeur 1 en $x = x_m$. Dans une telle configuration, l'écoulement est **subcritique** pour $x < x_m$ et supercritique pour $x > x_m$.

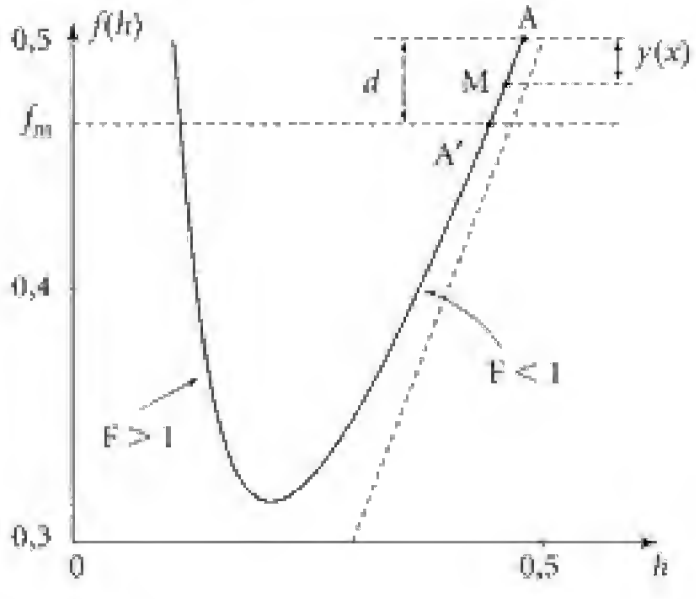


Commentaire

L'expérience confirme les résultats précédents. Dans le deuxième cas, l'écoulement supercritique redevient subcritique au-delà de x_f, la transition s'effectuant par un ressaut.

B. 2. La fonction $f(h) = h + \dfrac{v^2}{2g}$ s'écrit encore avec $v_0 h_0 = vh$: $f(h) = h + \dfrac{v_0^2 h_0^2}{2gh^2}$.

On a donc $f(h) = h + \dfrac{4{,}59 \cdot 10^{-3}}{2gh^2}$, d'où la courbe :



Copyrighted material

Le minimum s'obtient pour $\frac{df}{dh} = 0$, soit pour h' tel que :

$$1 - \frac{v_0^2 h_0^2}{g h'^3} = 0 \Rightarrow h'^3 = \frac{v_0^2 h_0^2}{g}.$$

Ce qui donne numériquement $h' = 0{,}209$ m et $f(h') = \frac{3}{2}h' = 0{,}314 = f'$.

Pour $x \ll 0$, la fonction $f(h)$ prend la valeur $f_0 = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$, soit $f_0 = 0{,}518$. En x_m, on doit avoir (conservation de l'énergie) :

$$d + h(x_m) + \frac{v_0^2 h_0^2}{2g h^2(x_m)} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

soit $\quad d + f_m = f_0 \quad$ où $\quad f_m = f[h(x_m)]$

d'où $\quad f_m = f_0 - d = 0{,}518 - 0{,}05 \Rightarrow f_m = 0{,}468.$

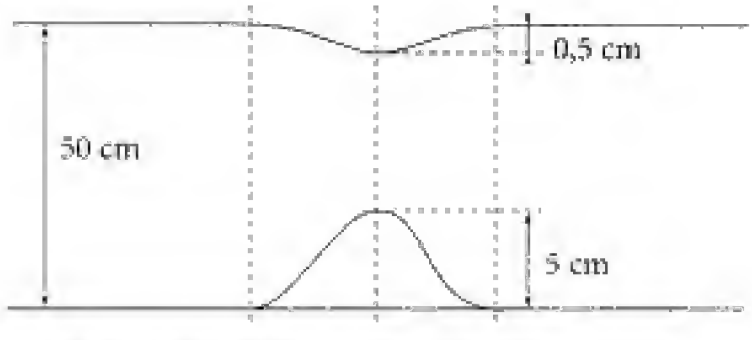
$y(x)$ variant continûment selon $0 \rightarrow d \rightarrow 0$, le point figuratif M décrit de façon continue le chemin $A \rightarrow A' \rightarrow A$ en suivant la courbe $h \rightarrow f(h)$.

Au sommet de la bosse, la surface libre présentera un creux de profondeur :

$\Delta h = h_0 - (d + h_m)$ avec $h_m + \frac{v_0^2 h_0^2}{2g h_m^2} = f_m = 0{,}468$ et $h_m > h'$ (point A' du graphe).

Un calcul numérique donne alors $h_m = 0{,}445$ m.

D'où : $\Delta h = 0{,}50 - 0{,}05 - 0{,}445 \Rightarrow \Delta h = 5$ mm.



On vérifie que l'on a bien dans ce cas $F_0 < 1$ puisque :

$$F_0 = \frac{v_0^2}{g h_0} = \frac{(0{,}6)^2}{9{,}81 \cdot 0{,}5} \Rightarrow F_0 \approx 0{,}07.$$

Copyrighted material

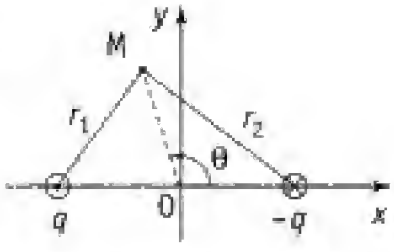
211 Force sur un hangar

Partie A

On étudie des écoulements bidimensionnels, stationnaires d'un fluide en écoulement parfait, homogène et incompressible (masse volumique ρ constante et uniforme), plans ($\vec{v}$ parallèle au plan xOy). Les effets de la pesanteur seront négligés.

1. a. On considère dans le fluide :

- une ligne source confondue avec la droite $x = -a$ et $y = 0$, de débit volumique q = cste par unité de longueur ;
- une ligne puits de même débit (en valeur absolue) sur la droite $x = a$, $y = 0$.



Déterminer le potentiel ϕ du champ des vitesses ($\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$) en fonction de q et des distances r_1 et r_2 aux lignes source et puits.

b. On fait tendre a vers 0 et q vers l'infini avec $2aq = p$ = cste non nulle.

Le potentiel précédent tend vers une expression limite donnée par :

$\phi = \dfrac{p}{2\pi}\dfrac{\cos\theta}{r}$ ($r = OM$ et $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$: coordonnées cylindriques d'axe Oz).

Commenter.

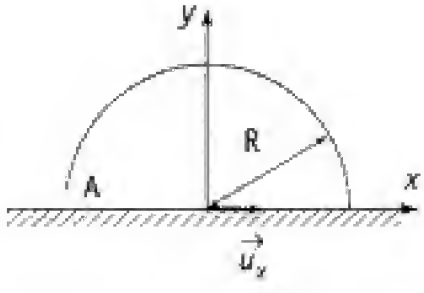
Déterminer les lignes de courant correspondantes et les représenter.

2. À l'écoulement du **1. b.** on superpose un écoulement uniforme et permanent de vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. Montrer qu'il existe pour $p > 0$, une ligne de courant circulaire d'axe Oz dont on précisera le rayon a.

Partie B

Un hangar demi-cylindrique, de rayon R et de longueur L, est soumis à l'action du vent dont la vitesse, à des distances grandes devant R, est donnée par $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

Une ouverture est aménagée en A au milieu du hangar.



Pour évaluer la force s'exerçant sur le hangar, on propose les approximations suivantes :

- l'air est un fluide parfait en écoulement incompressible et irrotationnel ;
- on néglige les effets de la pesanteur ;
- on suppose L très grand devant R ;
- l'air est au repos dans le hangar à une pression P_A.

Copyrighted material

1. Commenter brièvement les hypothèses précédentes.

2. Montrer que le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi \quad \text{avec} \quad \phi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right)\cos\theta.$$

Déterminer les expressions des constantes α et β en fonction de v_0 et R.

On rappelle que : $\Delta(r\cos\theta) = 0$ et $\left\{\Delta\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) = 0 \; ; \; r \neq 0\right\}$ en coordonnées cylindriques (Δ = laplacien).

3. Exprimer la force par unité de longueur que l'air exerce sur le hangar. On notera ρ la masse volumique, uniforme, de l'air.

Solution

Partie A

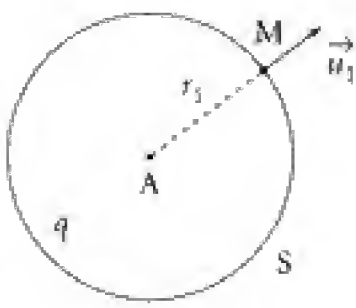
A. 1. a. Déterminons le champ des vitesses $\vec{v}_1$ créé par le fil source ($x = -a$, $y = 0$) de débit volumique q par unité de longueur ($q > 0$).

Le champ des vitesses est radial et isotrope, soit :

$\vec{v} = v(r_1)\vec{u}_1$ ($\vec{u}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$ dans le plan de la figure).

Considérons alors une surface S cylindrique passant par M ($AM = r_1$) d'axe Az et de hauteur h. Le flux sortant de $\vec{v}_1$ est le débit volumique délivré par la source pour une hauteur h (stationnarité), c'est-à-dire qh, d'où :

$$qh = \iint_S \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_{ext}\,\delta S.$$



Or $\vec{n}_{ext} = \vec{u}_1(M)$ et $\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_{ext} = v_1(r_1)$

soit $qh = v_1(r_1)2\pi r_1 h$

et $\boxed{\vec{v}_1(r_1) = \dfrac{q}{2\pi r_1}\vec{u}_1}$

Le potentiel ϕ_1 associé à ce champ des vitesses ($\vec{v}_1 = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_1$) est tel que :

$$\phi_1 = \frac{q}{2\pi}\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \quad (r_0 \neq 0 : \text{arbitraire}).$$

Commentaire

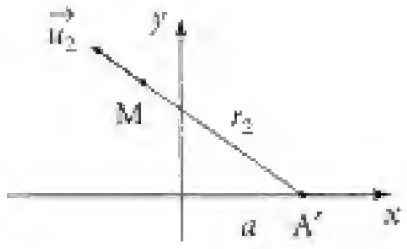
Ce champ des vitesses est l'analogue du champ électrostatique créé par un fil rectiligne illimité portant une densité linéique de charge uniforme.

Copyrighted material

• De même pour le puits, avec $A'M = r_2$ et $q \to -q$:

$$\vec{v}_2 = -\frac{q}{2\pi r_2}\vec{u}_2$$

et $\phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_0}\right)$ (on a choisi le même r_0).



• Par superposition, il vient :

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{v}(M) = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{\vec{u}_1}{r_1} - \frac{\vec{u}_2}{r_2}\right)} \quad (1)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \boxed{\phi(M) = \frac{q}{2\pi}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \quad (2)$$

ce qui revient à prendre $\phi = 0$ dans le plan yOz.

A. 1. b. En développant ϕ au premier ordre en $\frac{a}{r}$ on obtient $\phi(M) = \frac{p}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$.

Commentaire

Il s'agit de l'analogue, **bidimensionnel**, du dipôle électrostatique. De façon plus précise, on montre que l'on obtient un potentiel électrostatique équivalent pour le système constitué d'une ligne $z'z$ dipolaire (c'est-à-dire présentant un moment dipolaire par unité de longueur constant de la forme $\frac{d\vec{p}}{dz} = \lambda\vec{u}_z$).

Le champ des vitesses est alors $\left(\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta\right)$:

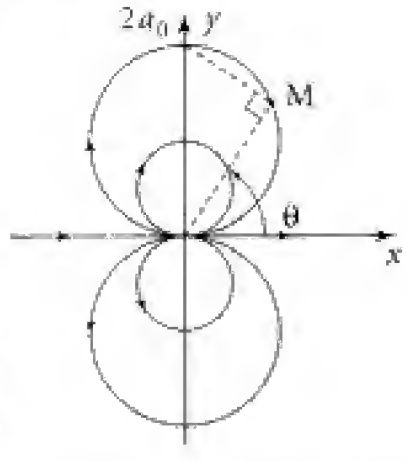
$$\boxed{v_r = -\frac{p}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r^2} \quad \text{et} \quad v_\theta = -\frac{p}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}}$$

Les lignes de courant sont données par les équations :

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r\,d\theta}{v_\theta},\ z = \text{cste}$$

soit : $\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta} = \frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$,

ce qui s'intègre en : $r = 2a_0\sin\theta$.



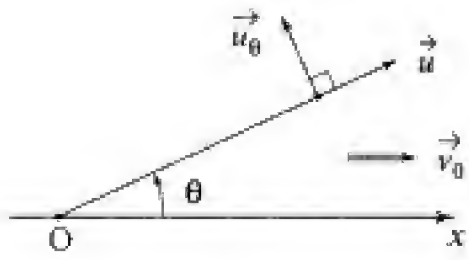
Ce sont des cercles tangents à l'axe Ox dans le plan $z = 0$ (et des cercles identiques dans tout plan z = cste). Ces cercles sont orthogonaux aux surfaces ϕ = cste (puisque $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$), d'équation $r = 2a_0'\cos\theta$ (cylindres tangents sur l'axe Oy au plan yOz).

A. 2. Par superposition de l'écoulement précédent et de l'écoulement uniforme $v_0\vec{u}_x$, on obtient un nouvel écoulement associé au champ des vitesses $\vec{v}'(M)$ tel que :

$$\vec{v}'(M) = \vec{v}(M) + v_0\vec{u}_x.$$

Copyrighted material

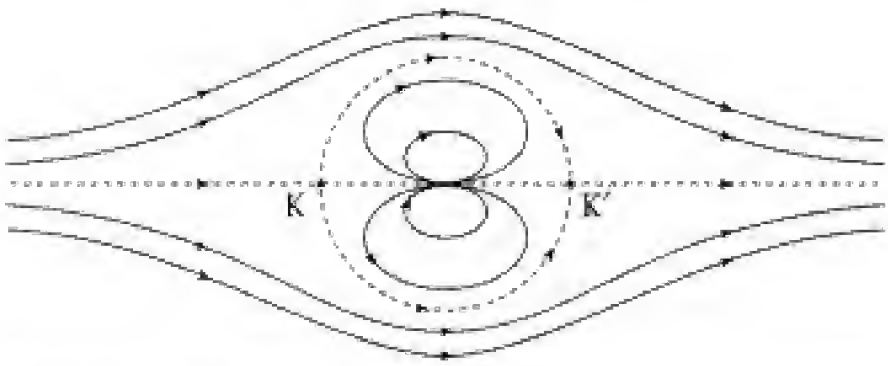
Or $\vec{v_0} = v_0\cos\theta\,\vec{u} - v_0\sin\theta\,\vec{u_\theta}$.



D'où
$$\boxed{\begin{aligned} v_r' &= \left(v_0 - \frac{p}{2\pi r^2}\right)\cos\theta \\ v_\theta' &= -\left(v_0 + \frac{p}{2\pi r^2}\right)\sin\theta \end{aligned}}$$

On obtient une ligne de courant circulaire d'axe Oz pour $v_r' = 0$ avec $r = \text{cste} = a$.
Les formules précédentes donnent alors :

$$v_0 = \frac{p}{2\pi a^2} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\frac{p}{2\pi v_0}}}$$



En K et K', la vitesse du fluide est nulle.

Le fluide émis par la source et absorbé par le puits ne franchit pas la surface cylindrique d'axe Oz et de rayon a. Inversement, celui qui arrive de l'infini avec la vitesse $\vec{v_0}$ ne rentre pas à l'intérieur de ce cylindre.

Partie B

B. 1. ■ L'air est supposé en écoulement incompressible. L'incompressibilité (de l'écoulement et pas du fluide !) tient à ce que les vitesses du fluide restent suffisamment faibles devant la vitesse c du son : plus précisément, on doit avoir $\left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \ll 1$...

■ On néglige les effets de la pesanteur :

– les variations de ρ avec l'altitude ne sont pas prises en compte et l'air sera caractérisé en tout point par une masse volumique uniforme ρ_0 ;

– d'autre part, on considère comme négligeable l'énergie potentielle gR (rapportée à l'unité de masse) devant l'énergie cinétique massique $\frac{1}{2}v_0^2$ ($v_0^2 \gg gR$).

■ L'écoulement « loin du hangar » est supposé uniforme et donc irrotationnel. On suppose qu'il en est de même (en ce qui concerne l'irrotationalité) en tout point de l'écoulement (en fait, problème de couche limite et de sillage en aval du hangar).

L'écoulement est incompressible : $\text{div}\,\vec{v} = 0$.

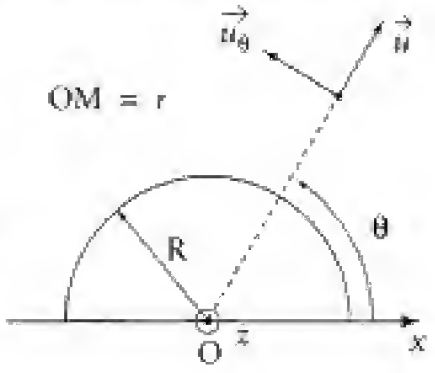
L'écoulement est irrotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$.

Copyrighted material

On peut donc poser $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ (un tel champ est bien irrotationnel), la fonction ϕ devant vérifier par ailleurs $\Delta\phi = 0$ ($\text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}} \equiv \Delta$).

ϕ est la fonction potentiel des vitesses. Puisque L est suffisamment grand devant R, nous allons modéliser le hangar par un demi-cylindre « infini » (effets de bord négligés, et on suppose de plus que la vitesse de l'air est peu différente de $v_0\vec{i}$ pour des distances grandes devant R mais qui restent faibles devant L…).

B. 2. Dans ces conditions, la fonction ϕ doit vérifier les conditions aux limites suivantes :



- $\lim\limits_{r \gg R} \vec{v} = v_0\vec{u}_x$;

$v_\theta(r > R, \theta = 0) = 0$ et $v_\theta(r > R, \theta = \pi) = 0$;

- à la surface du hangar : $(\vec{v} \cdot \vec{u})_{r=R} = 0$.

Notons alors qu'en coordonnées cylindriques r et θ, les fonctions $r\cos\theta$ et $\dfrac{\cos\theta}{r}$ sont à Laplacien nul.

Nous pouvons alors envisager la solution (*cf.* **A.**) :

$$\phi(r, \theta) = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right)\cos\theta \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_r = \left(\alpha - \dfrac{\beta}{r^2}\right)\cos\theta \\ v_\theta = -\left(\alpha + \dfrac{\beta}{r^2}\right)\sin\theta. \end{cases}$$

Les conditions aux limites se traduisent par :

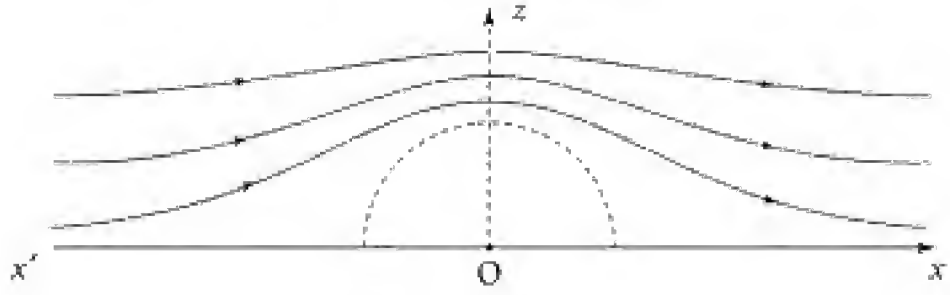
- $\lim \vec{v} = \vec{v}_0 = \alpha\cos\theta\,\vec{u} - \alpha\sin\theta\,\vec{u}_\theta = \alpha\,\vec{u}_x$, soit $\boxed{\alpha = v_0}$ « $r \to +\infty$ » ;

- $v_r(R, \theta) = 0$, soit $\beta = \alpha R^2$ $\boxed{\beta = v_0 R^2}$

- $v_0 = 0$ pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (ce qui est réalisé).

D'où $\phi(r, \theta) = v_0\left(r + \dfrac{R^2}{r}\right)\cos\theta$ et $\begin{cases} v_r = v_0\left(1 - \dfrac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta \\ v_\theta = -v_0\left(1 + \dfrac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta. \end{cases}$

Ainsi pour $r = R$, nous obtenons $\vec{v} = -2v_0\sin\theta\,\vec{u}_\theta$.



Copyrighted material

Commentaire

La fonction ϕ, qui a été déterminée ci-dessus, correspond en fait à la solution de l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ dans le domaine associé au demi-espace $y > 0$ auquel on a ôté un demi-cylindre infini : il y a alors unicité de la solution en relation avec les conditions aux limites fixées.

B. 3. Pour déterminer le champ des pressions, appliquons le théorème de Bernoulli (écoulement potentiel, stationnaire, irrotationnel d'un fluide en écoulement parfait, ici sans champ extérieur (pesanteur négligée)) :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{cste} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} \quad (\text{à « l'infini » } P = P_0 \text{ et } \vec{v} = \vec{v_0}).$$

D'où : $P(r, \theta) = P_0 + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2)$

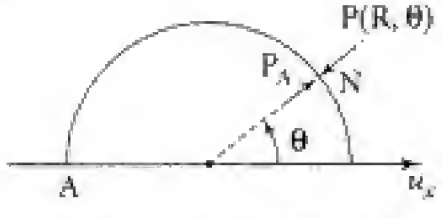
et $\quad P(R, \theta) = P_0 + \frac{1}{2}\rho[v_0^2 - 4v_0^2\sin^2\theta] = \left(P_0 + \rho\frac{v_0^2}{2}\right) - 2v_0^2\rho\sin^2\theta.$

Or pour « $\theta = \pi$ » (dimensions de l'ouverture faibles devant R), nous avons $P = P_A$ (qui représente aussi la pression à l'intérieur du hangar) d'où :

$$P(R, \theta) = P_A - 2v_0^2\rho\sin^2\theta.$$

En un point N de la paroi du hangar, l'air exerce, par unité de surface, une force élémentaire :

$$\boxed{\frac{\delta\vec{f'}}{\delta\Sigma} = [P_A - P(R, \theta)]\vec{u} = 2v_0^2\rho\sin^2\theta\,\vec{u}}$$



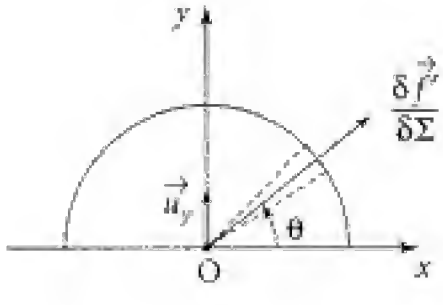
Cette répartition de forces admet (aux approximations considérées) le plan Oxy comme plan de symétrie : la résultante de ces efforts est donc contenue dans ce plan. Elle est dirigée selon $\vec{u_y}$.

Soit pour une longueur dL du demi-cylindre :

$$\delta\Sigma = R\,d\theta\,dL$$

et : $\delta\vec{f} = \left\{\iint\left(\frac{\delta\vec{f'}}{\delta\Sigma}\cdot\vec{u_y}\right)R\,d\theta\,dL\right\}\vec{u_y}.$

D'où : $\frac{\delta\vec{f}}{dL} = \vec{u_y}\int_0^\pi 2v_0^2\sin^2\theta(\vec{u}\cdot\vec{u_y})R\,d\theta.$



Or : $\vec{u}\cdot\vec{u_y} = \sin\theta$ et :

$$\frac{\delta\vec{f}}{dL} = 2v_0^2\rho R\,\vec{u_y}\int_0^\pi \sin^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

et :

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\sin\theta\,d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta)\,d(-\cos\theta) = \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = 2\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}.$$

Copyrighted material

Soit $\frac{\delta \vec{f}}{dL} = \frac{8}{3}\rho v_0^2 R \vec{u}_y$ et $\boxed{\vec{F} = \frac{8}{3}\rho v_0^2 RL \vec{u}_y}$

Cette force a tendance à arracher le hangar du sol. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse.

Commentaire

$\vec{F}$ n'a pas de composante selon $\vec{u}_x$. Ceci résulte de nos approximations (écoulement potentiel en tout point absence de « sillage » ...).

Copyrighted material

Copyrighted material

chapitre

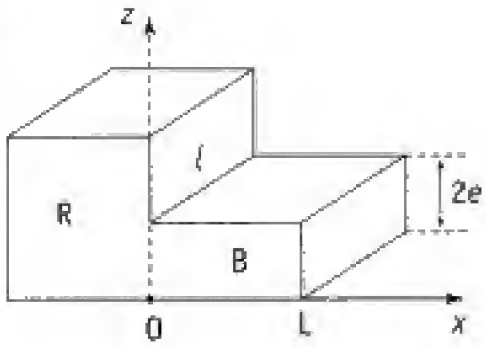
3

Fluides visqueux

301 Régulateur de débit

Un fluide visqueux newtonien (viscosité dynamique η) incompressible (masse volumique ρ_0) alimente un récipient R.

Il s'écoule par l'intermédiaire d'une buse B parallélépipédique (hauteur $2e$, longueur L et largeur l : $L \sim l \gg e$).



On étudie l'écoulement dans B en faisant les hypothèses suivantes :

- écoulement stationnaire laminaire avec un champ des vitesses $\vec{v} = v\vec{u}_x$ $(l \gg e)$;
- en $x = 0$ (entrée de la buse), la pression est uniforme et vaut P_e ;
- en $x = L$ (sortie de la buse), la pression est uniforme est vaut P_s ;
- les effets de la pesanteur seront négligés dans tout le volume de la buse.

Déterminer le débit volumique D_v, sachant que la vitesse maximale du fluide dans B vaut $v_0 = 1{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. On donne :

$$\rho = 880\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} ; \quad e = 2\ \text{mm} ; \quad L = 50\ \text{cm} ; \quad l = 30\ \text{cm} ; \quad \eta = 0{,}2\ \text{Pl}.$$

1. Ce qu'il faut savoir

- Écoulement incompressible.
- Équation de Navier-Stokes.
- Contrainte (force par unité de surface) visqueuse tangentielle dans un mouvement de cisaillement simple.
- Force visqueuse par unité de volume associée à l'écoulement $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$.
- Débit volumique.

2. Ce qu'il faut comprendre

On ne tient pas compte de la présence des parois verticales $(l \gg e)$: le champ des vitesses et celui des pressions ne dépend pas de y.

On traduira l'incompressibilité de l'écoulement et on rappellera l'expression de la densité volumique des forces visqueuses. Il suffira alors d'intégrer l'équation de Navier-Stokes : on tiendra compte des conditions aux limites sur les plans $z = 0$ et $z = e$.

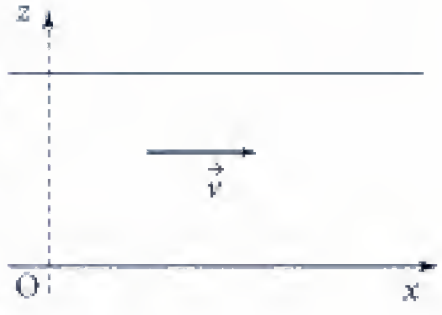
Copyrighted material

3. Solution

On a affaire à un écoulement unidimensionnel ($\vec{v}$ ne dépend que de z) et unidirectionnel ($\vec{v}$ reste parallèle à $\vec{u}_x$).

D'autre part, les variations de $\vec{v}$ avec y sont négligées ($l \gg e$). On a donc :

$$\vec{v} = v(x, z)\vec{u}_x.$$



L'écoulement étant incompressible, il vient $\text{div}\vec{v} = 0$, soit ici :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = v(z)\vec{u}_x.$$

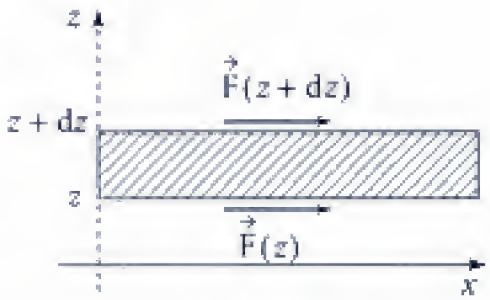
Commentaire

Un tel écoulement est rotationnel, de vorticité $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \frac{\text{d}v}{\text{d}z}\vec{u}_y$ et de vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{\text{d}v}{\text{d}z}\vec{u}_y$ (rotation de la particule fluide).

Le débit volumique à travers la buse s'écrit alors : $D_v = \int_0^{2e} v(z)\text{d}z\, l$.

Il nous faut maintenant déterminer le champ des vitesses $v(z)$. À cet effet, considérons la tranche de fluide contenue dans le parallélépipède de longueur L, de largeur l, et comprise entre z et $z + \text{d}z$.

Elle est soumise sur ses faces supérieure et inférieure à des forces résultantes de viscosité égales à :



$$\vec{F}(z+\text{d}z) = \eta\left(\frac{\text{d}v}{\text{d}z}\right)_{z+\text{d}z}\Sigma\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}(z) = -\eta\left(\frac{\text{d}v}{\text{d}z}\right)_z\Sigma\vec{u}_x \quad \text{où} \quad \Sigma = l\,\text{L}.$$

Soit une force totale : $\overrightarrow{\delta F_T} = \vec{F}(z+\text{d}z) + \vec{F}(z)$ d'où : $\overrightarrow{\delta F_T} = \eta\frac{\text{d}^2v}{\text{d}z^2}l\,\text{L}\text{d}z\vec{u}_x$.

Dans le cas étudié, on peut alors définir une densité volumique de force visqueuse selon :

$$\vec{\phi}_{vol}^{\text{viscosité}} = \frac{\overrightarrow{\delta F_T}}{\delta\tau} = \frac{\overrightarrow{\delta F_T}}{l\text{L}\text{d}z} \Rightarrow \boxed{\vec{\phi}_{vol}^{\text{viscosité}} = \eta\frac{\text{d}^2v}{\text{d}z^2}\vec{u}_x} \quad (1)$$

Commentaire

Pour un écoulement **incompressible**, on démontre, dans un cadre plus général :

$$\vec{\phi}_{vol}^{\text{viscosité}} = \eta\Delta\vec{v}$$

soit en coordonnées cartésiennes : $\vec{\phi}_{vol}^{\text{viscosité}} = \eta\left[\Delta v_x\vec{u}_x + \Delta v_y\vec{u}_y + \Delta v_z\vec{u}_z\right]$

où par exemple : $\Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$.

Copyrighted material

L'équation de Navier-Stokes s'écrit ici, négligeant la pesanteur et avec (1) :

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta \frac{d^2v}{dz^2}\vec{u}_x.$$

D'autre part, puisque $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$, une particule fluide élémentaire suit une trajectoire rectiligne parallèle à $\vec{u}_x$ avec une vitesse constante : son accélération est donc nulle, d'où :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}P = \eta \frac{d^2v}{dz^2}\vec{u}_x} \quad (2)$$

L'équation (2) donne alors par projection sur les axes Ox, Oy et Oz :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (3) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{d^2v}{dz^2} \quad (4)$$

On a donc : $P = P(x)$ d'après (3) et $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = \text{cste}$ d'après (4), le deuxième membre ne dépendant que de z.

Or $P(0) = P_e$ et $P(L) = P_s \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_s - P_e}{L}$

soit encore : $\frac{P_s - P_e}{L} = \eta \frac{d^2v}{dz^2} \Rightarrow \frac{d^2v}{dz^2} = -\left(\frac{P_e - P_s}{\eta L}\right)$. Une simple intégration donne :

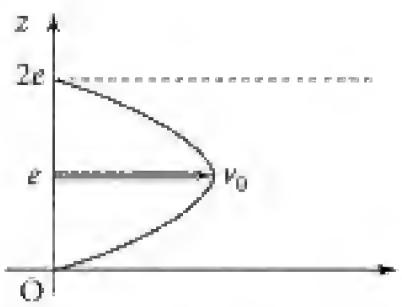
$$v(z) = -\left(\frac{P_e - P_s}{2\eta L}\right)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

Il reste à exprimer que la vitesse du fluide est nulle sur les parois $z = 0$ et $z = 2e$, ce qui donne : $\beta = 0$ et $(2e)^2 + \alpha(2e) = 0 \Rightarrow \alpha = -2e$.

Soit : $v(z) = \left(\frac{P_e - P_s}{2\eta L}\right)(2ez - z^2) \Rightarrow \boxed{v(z) = \left(\frac{P_e - P_s}{2\eta L}\right)z(2e - z)}$

On obtient un profil des vitesses paraboliques avec une vitesse maximale, en $z = e$, donnée par :

$$\boxed{v_0 = \frac{P_e - P_s}{2\eta L}e^2}$$



Cet écoulement nécessite bien évidemment $P_e - P_s > 0$, les forces de pression devant s'opposer aux forces de frottement visqueuses.

On peut alors remonter au débit volumique D_v selon : $D_v = l\int_0^{2e} v_0 \frac{z}{e}\left(2 - \frac{z}{e}\right)dz$

d'où : $D_v = le\int_0^{2e} v_0 z'(2 - z')dz'$ (on a noté $z' = \frac{z}{e}$)

et $D_v = lev_0\left[z'^2 - \frac{z'^3}{3}\right]_0^2 \Rightarrow \boxed{D_v = \frac{4}{3}lev_0}$

A.N. : $D_v = \frac{4}{3} \times 0{,}3 \times 2 \cdot 10^{-3} \times 1{,}5 \Rightarrow \mathbf{D_v = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^2 \cdot s^{-1}}$.

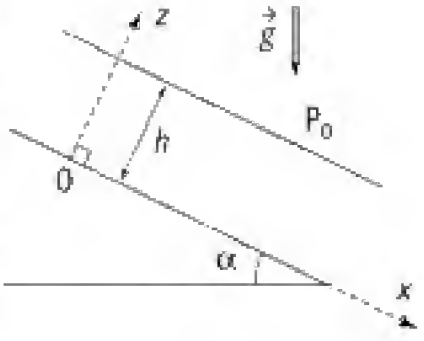
Copyrighted material

302 Film fluide sur plan incliné

Un fluide (liquide incompressible et visqueux) s'écoule sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale.

On désigne par h l'épaisseur constante du film fluide, η le coefficient de viscosité dynamique et ρ la masse volumique du fluide.

On étudie l'écoulement en régime stationnaire et on suppose que : $\vec{v} = v(x, z)\vec{u}_x$. On considérera que l'atmosphère surmontant le fluide n'exerce sur lui qu'une action associée à une pression uniforme P_0.



1. Déterminer le champ des pressions $P(x, y, z)$ au sein du fluide.

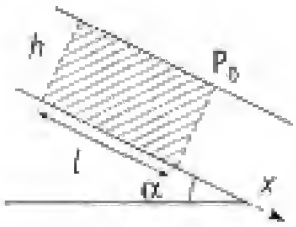
Établir l'expression du champ des vitesses $\vec{v}(x, z)$.

2. Déterminer le débit volumique Q pour une largeur L du film fluide.

3. Calculer la force par unité de surface $\frac{\delta\vec{f}}{\delta\Sigma}$ exercée par le plan incliné sur le fluide. Commenter.

4. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_{\text{viscosité}}$ développée par les forces visqueuses dans le volume $\mathcal{V} = h \cdot l \cdot L$.

On exprimera le résultat en fonction de l, Q, g et α.



1. Ce qu'il faut savoir

- Écoulement incompressible.
- Forces visqueuses pour un écoulement du type $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$.
- Équation de Navier-Stokes
- Relations de continuité.
- Théorème de la puissance cinétique.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. À partir de l'incompressibilité de l'écoulement, on montrera que le champ des vitesses ne dépend pas de x. Le champ des pressions et celui des vitesses se déduisent de l'équation de Navier-Stokes. On tiendra compte des conditions aux limites en $z = 0$ (fond du canal) et $z = h$ (surface libre) : l'air est supposé n'exercer aucune contrainte tangentielle sur la surface libre du liquide.

3. Un calcul direct donne la force exercée sur une surface $\delta\Sigma$ de fluide parallèle au fond, et donc par extrapolation, sur celle située en $z = 0$. La force cherchée se déduit alors du principe de l'action et de la réaction.

On cherchera à retrouver ce résultat en considérant l'ensemble des forces extérieures s'appliquant sur un volume $\mathcal{V} = h \cdot l \cdot L$ de liquide d'épaisseur h.

Copyrighted material

4. On appliquera le théorème de la puissance cinétique au volume particulaire qui se confond avec $\mathcal{V}$ à l'instant t : les forces visqueuses y développent une puissance intérieure non nulle.

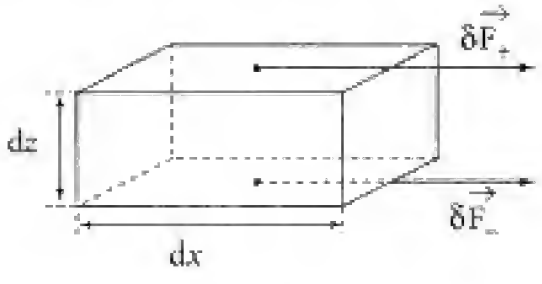
3. Solution

1. ■ Le fluide étant incompressible, et les lignes de courant étant des droites parallèles à l'axe Ox, on a nécessairement : $v(x, z) = v(z)$ (1)

Commentaire

On aurait pu directement traduire l'incompressibilité par $\text{div}\vec{v} = 0$ qui donne (1). ⌋

Considérons maintenant un élément de fluide $\delta\tau = dxdydz$. Il est soumis sur ses faces supérieure et inférieure aux forces visqueuses :



$$\delta\vec{F}_+ = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z+dz} dxdy\vec{u}_x$$

$$\delta\vec{F}_- = -\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z} dxdy\vec{u}_x.$$

Soit au total : $\delta\vec{F} = \delta\vec{F}_+ + \delta\vec{F}_- = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}dxdydz\vec{u}_x = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\delta\tau\vec{u}_x$.

Il en résulte une force volumique de viscosité $\vec{\phi}$ telle que : $\boxed{\vec{\phi} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\vec{u}_x}$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\rho\vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\vec{g} + \vec{\phi} \quad (2)$$

Mais l'accélération d'une particule fluide est nulle puisque $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$ (la particule garde au cours de son mouvement le même z et donc la même vitesse). (2) devient :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\vec{g} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\vec{u}_x = \vec{0}.$$

Projetons sur les axes Ox et Oz :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \rho g\sin\alpha + \eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 & (3) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \rho g\cos\alpha = 0 & (4) \end{cases}$$

L'équation (4) s'intègre aisément selon :

$$P(x, z) = -\rho gz\cos\alpha + f(x) \quad \text{(la « constante » est fonction de } x\text{)},$$

Or à la surface, c'est-à-dire pour $z = h$, la pression est uniforme et vaut P_0, d'où :

$$P_0 = -\rho gh\cos\alpha + f(x)$$

Dès lors : $\boxed{P(x, z) = P_0 + \rho g(h - z)\cos\alpha}$ (5)

Copyrighted material

La pression ne dépendant pas de x, le gradient de pression dans cette direction est donc nul. C'est le champ de pesanteur qui est ici « moteur ».

(3) donne alors : $\eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho g\sin\alpha = 0$.

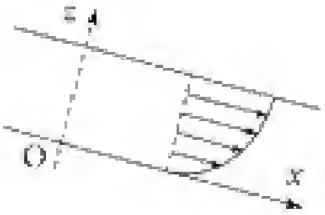
Et en intégrant deux fois :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}z + K \Rightarrow \boxed{v(z) = -\frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}z^2 + Kz + K'}$$

On obtient un profil parabolique des vitesses.
Utilisons maintenant les conditions aux limites :
– en $z = 0$, la vitesse doit être nulle, d'où $K' = 0$;
– en $z = h$, on va considérer que l'air n'exerce pas de contrainte tangentielle.

Ce qui implique : $\eta\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=h} = 0 \Rightarrow \left(-\dfrac{\rho g\sin\alpha}{\eta}\right)h + K = 0$.

Finalement, nous obtenons : $\boxed{v(z) = \dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}(2h - z)z}$ (6)



La vitesse est maximale en $z = h$.

2. Le débit volumique se calcule selon :

$$Q = L\int_0^h v(z)\mathrm{d}z = \frac{\rho g\sin\alpha L}{2\eta}\int_0^h (2h - z)z\mathrm{d}z.$$

D'où : $Q = \dfrac{1}{2\eta}\rho g\sin\alpha L\left[hz^2 - \dfrac{z^3}{3}\right]_0^h \Rightarrow \boxed{Q = \dfrac{1}{3\eta}\rho gLh^3\sin\alpha}$ (7)

Et en faisant intervenir le coefficient de **viscosité cinématique** $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$:

$$\boxed{Q = \frac{1}{3\nu}Lh^3 g\sin\alpha}$$

Ce débit est bien proportionnel à la composante $g\sin\alpha$ de la pesanteur sur la pente de l'écoulement. Il est d'autant plus faible que la viscosité cinématique est importante, ce qui est normal.

3. ■ La force exercée par le fluide sur l'élément de surface $\delta\Sigma$ du plan est :

$$\vec{\delta F} = -P(x, z = 0)\delta\Sigma\vec{u_z} + \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)_{0^+}\delta\Sigma\vec{u_x}.$$

La force cherchée (action du plan sur le fluide) est $(\vec{\delta F'} = -\vec{\delta F})$:

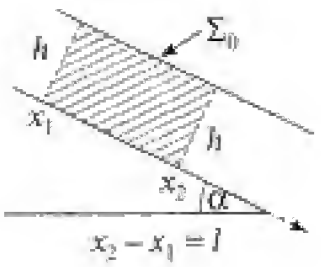
$$\frac{\vec{\delta F'}}{\delta\Sigma} = -\frac{\vec{\delta F}}{\delta\Sigma} \Rightarrow \frac{\vec{\delta F'}}{\delta\Sigma} = P(x, z = 0)\vec{u_z} - \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)_{0^+}\vec{u_x}.$$

Or en $z = 0$: $\left|\begin{array}{l} P(x, z = 0) = P_0 + \rho gh\cos\alpha \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)_{0^+} = \dfrac{\rho g\sin\alpha}{\eta}\cdot(h - 0) \end{array}\right.$

d'où : $\boxed{\dfrac{\vec{\delta F'}}{\delta\Sigma} = (P_0 + \rho gh\cos\alpha)\vec{u_z} - \rho gh\sin\alpha\vec{u_x}}$ (8)

Copyrighted material

■ On peut retrouver ce résultat en considérant le volume de fluide $\mathcal{V}$ contenu, à l'instant t, dans le parallélépipède rectangle de hauteur h et de surface de base $\Sigma = Ll$ (l selon Ox). Les accélérations étant nulles, la résultante des forces extérieures appliquées à $\mathcal{V}$ l'est également (théorème de la résultante dynamique).

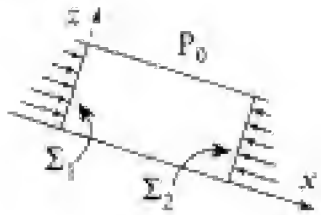


D'où : $\vec{F}^{ext} = \vec{0}$.

Or $\vec{F}^{ext} = \vec{F}_p(\to \Sigma_1) + \vec{F}_p(\to \Sigma_2) + \vec{F}_p(\to \Sigma_0) + \frac{\delta\vec{F}'}{\delta\Sigma} \cdot lL + M\vec{g}$ (9)

avec $\vec{F}_p(\to \Sigma_1) + \vec{F}_p(\to \Sigma_2) = \int_0^h [P(x_1, z) - P(x_2, z)] \cdot L dz \vec{u}_x$

soit $\vec{F}_p(\to \Sigma_1) + \vec{F}_p(\to \Sigma_2) = \vec{0}$ car $P(x_1, z) = P(x_2, z)$, la pression étant indépendante de x (*cf.* (5)). D'autre part : $\vec{F}_p(\to \Sigma_0) = -P_0 lL\vec{u}_z$.

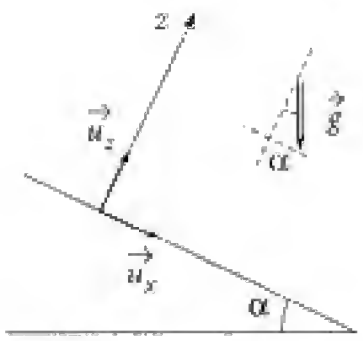


L'équation (9) s'écrit alors : $\frac{\delta\vec{F}'}{\delta\Sigma} lL = -M\vec{g} + P_0 lL\vec{u}_z$

$$M\vec{g} = \rho h l L(g\sin\alpha\vec{u}_x - g\cos\alpha\vec{u}_z).$$

Finalement, après simplification par lL :

$$\boxed{\frac{\delta\vec{F}'}{\delta\Sigma} = (P_0 + \rho g h\cos\alpha)\vec{u}_z - \rho g h\sin\alpha\vec{u}_x}$$



résultat identique à (8).

4. Appliquons le théorème de la puissance cinétique au volume particulaire coïncidant, à t, avec le volume de contrôle parallélépipédique ($h \times L \times l$) décrit à la question **3.** :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{int}.$$

Or $\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}_p(\to \Sigma_1) + \mathcal{P}_p(\to \Sigma_2) + \mathcal{P}_p(\to \Sigma_0) + \mathcal{P}_{fond} + \mathcal{P}_{pesanteur}$ (9)

$\mathcal{P}^{int} = 0 + \mathcal{P}_{viscosité}$

↖ fluide incompressible donc pas de travail intérieur des forces de pression

Or $\frac{DE_c}{Dt} = 0$ (une particule fluide garde sa vitesse $\vec{v}$ et donc son énergie cinétique).

$\mathcal{P}_p(\to \Sigma_0) = 0$ (les forces de pression dues à P_0 s'exercent perpendiculairement à la vitesse).

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P}_p(\to \Sigma_1) &= \int_0^h (P(z)L dz)v(z)\\ \mathcal{P}_p(\to \Sigma_2) &= \int_0^h (-P(z)L dz)v(z)\end{aligned}\right\} \mathcal{P}_p(\to \Sigma_1) + \mathcal{P}_p(\to \Sigma_2) = 0$$

$\mathcal{P}_{fond} = 0$ (la vitesse du fluide est nulle sur le plan incliné)

Copyrighted material

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{pesanteur}} &= \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{g}\rho\delta\tau)\cdot\vec{v}) \\ \text{or}\quad \vec{g}\cdot\vec{v} &= g\sin\alpha v(z)\end{aligned}\right\} \mathcal{P}_{\text{pesanteur}} = \rho g\sin\alpha \iiint v(z)\delta\tau$$

$$\text{avec}\quad \iiint_{\mathcal{V}} v(z)\delta\tau = \left(\int_0^h v(z)\mathrm{d}z\right)\cdot lL = Ql \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}_{\text{pesanteur}} = gl\sin\alpha Q.$$

Commentaire

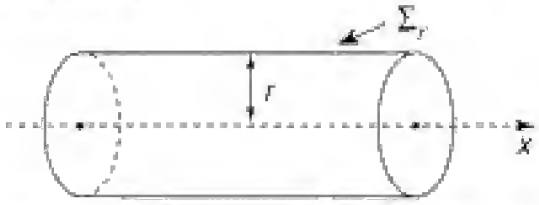
Les forces de pression sur les faces fluides parallèles au plan de la figure ne travaillent pas (elles sont orthogonales aux vitesses).

L'équation (9) devient : $0 = gl\sin\alpha Q + \mathcal{P}_{\text{viscosité}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{viscosité}} = -Qgl\sin\alpha}$

305 Mesure du coefficient de viscosité dynamique de l'eau liquide

Un fluide visqueux incompressible (coefficient de viscosité dynamique η, masse volumique ρ) s'écoule dans une conduite droite cylindrique de rayon a et d'axe Ox.

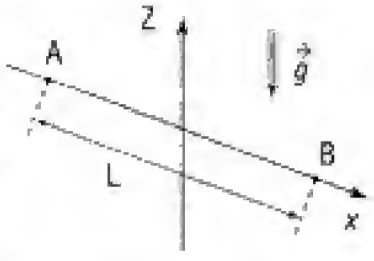
Le champ des vitesses et de la forme $\vec{v} = v(x, r)\vec{u}_x$ où r représente la distance à l'axe. Le régime est stationnaire.



En plus des forces de pression, l'élément de fluide contenu dans le cylindre d'axe Ox et de surface latérale Σ_r est soumis de la part du reste du fluide à une force de viscosité de la forme :

$$\vec{f} = +\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\Sigma_r\vec{u}_x.$$

1. a. On pose $P^* = P + \rho gZ$; P est la pression au sein du fluide et Z repère la verticale ascendante. Montrer que P^* ne dépend que de x. Déterminer le champ des vitesses en fonction de a, r, η et $\dfrac{P_A^* - P_B^*}{L}$ (les points A et B étant distants de L sur l'axe de la conduite).



b. En déduire l'expression du débit volumique Q à travers toute section droite Σ de la conduite. Commenter. Calculer la vitesse moyenne $\langle v\rangle$, et la relier à la vitesse maximale v_{max}. Calculer de même le débit d'énergie cinétique D_{e_c} à travers Σ : on exprimera le résultat en fonction de ρ, Q et $\langle v\rangle$.

Copyrighted material

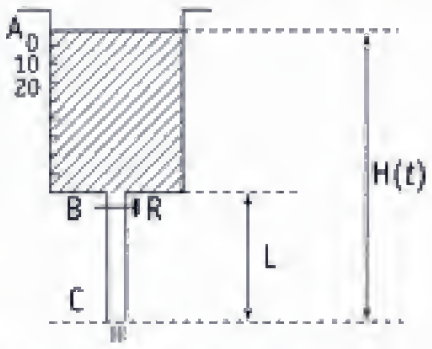
2. Montrer que les forces visqueuses développent dans une portion de conduite de longueur L, une puissance : $\mathcal{P}_{\text{viscosité}} = -R_h \cdot Q^2$.

Donner l'expression de R_h en fonction de η, L et σ. Commenter.

3. Mesure du coefficient de viscosité dynamique de l'eau liquide (masse volumique ρ = cste).

Une burette graduée de 100 mL et de diamètre $\phi_b = 1{,}1$ cm est prolongée par un tube « capillaire » de diamètre $\phi_c = 1$ mm.

On ouvre le robinet R et on relève les instants t_i pour lesquels la surface libre du fluide passe par les niveaux $v_i = \{0, 10, 20, \ldots, 90\ \text{mL}\}$: v_i mesure le volume écoulé entre l'instant 0 et l'instant t ($t = 0$ pour $v = 0$).



On pose $V_0 = SH_0$ où $H_0 = H(t = 0)$ et $S = \frac{\pi}{4}\phi_b^2$ (section de la burette).

a. Montrer que l'on a $\ln\left(1 - \frac{v}{V_0}\right) = -\frac{t}{\tau}$ où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de η, L, S, ρ, g, ϕ_c.

b. L'expérience donne les résultats suivants :

t (s)	0	34	69	105	143	181	220	261	302	346
v_i	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90

En déduire la valeur du coefficient de viscosité η.

Données : $H_0 = 194$ cm ; $L = 121$ cm ; $\rho = 10^3$ kg · m^{-3} ; $g = 9{,}81$ m · s^{-2}.

1. Ce qu'il faut savoir

- Écoulement incompressible.
- « Équation d'Euler avec viscosité ».
- Débit volumique.
- Théorème de la puissance cinétique (théorème de l'énergie cinétique) appliqué à un volume particulaire de fluide.
- Théorème de Bernoulli.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'écoulement étant unidirectionnel selon $x'x$, la densité volumique de forces visqueuses est portée par $\vec{u}_x$. On ne cherchera pas à l'exprimer, la seule connaissance de sa direction étant suffisante pour montrer que la pression suit un comportement hydrostatique à x fixé, c'est-à-dire perpendiculairement à l'écoulement (en d'autres termes, on a $P + \rho gZ = $ cste à x fixé, d'où l'introduction de la grandeur $P^* = P + \rho gZ$).

Copyrighted material

Pour déterminer le champ des vitesses, on s'intéressera au système fluide défini par un cylindre d'axe $x'x$, de longueur dx et de rayon $r < a$. On montrera que la résultante des forces extérieures appliquées à ce système est nulle, ce qui permet d'aboutir à une équation différentielle définissant $v(r)$ connaissant $P^*(x)$.

2. On appliquera le théorème de la puissance cinétique au volume particulaire fluide correspondant, à l'instant t, à un cylindre d'axe Ox de rayon a et de longueur L.

On montrera que la puissance cherchée est proportionnelle au carré du débit volumique ce qui conduit à faire un parallèle avec l'électrocinétique (courant dans un fil ohmique).

3. On a $\phi_c \ll \phi_b$ ($\phi_c \sim 10^{-2}\phi_b$) : les pertes de charge (dissipation par effet de viscosité) seront donc essentiellement concentrées dans le tube capillaire.

On supposera que le régime est quasistationnaire avec une vitesse d'écoulement suffisamment faible pour que l'on puisse appliquer, à chaque instant :

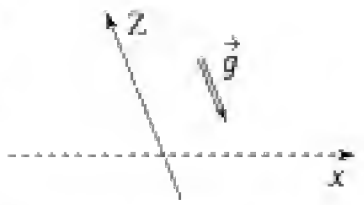
– la loi de l'hydrostatique dans la burette ;

– la loi de Poiseuille établie au **1.** et **2.** pour le tube capillaire.

D'autre part, ce tube doit avoir une longueur L suffisante pour que, à rayon a fixé, la transition de régime en B entre la burette et le tube n'ait pas d'importance (ce qui revient à considérer un écoulement de Poiseuille sur toute la longueur L…).

3. Solution

1. a. Désignons par P la pression au sein du fluide, et Z la cote d'un point M comptée sur la verticale ascendante ; l'équation d'Euler « corrigée » des effets de viscosité s'écrit :



$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\nabla}(P + \rho g Z) + \vec{\phi}_{vol}^{\,viscosité} \qquad (1)$$

On peut donc introduire une pression « apparente » $P^* = P + \rho g Z$ de sorte que :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\nabla}(P^*) + \vec{\phi}_{vol}^{\,viscosité}.$$

Commentaire

En notant $P_1 = P_0 - \rho g Z$ la pression hydrostatique en l'absence d'écoulement ($\vec{v} = \vec{0}$), la pression P avec écoulement peut s'écrire : $P = P_1 + p = P_0 - \rho g Z + p$

d'où : $P + \rho g Z = P_0 + p$ et $\overrightarrow{\text{grad}}(P^*) = \overrightarrow{\text{grad}}(P_0 + p) = \overrightarrow{\text{grad}}\, p$.

Une particule élémentaire de fluide possède une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe de la conduite. On a donc *a priori* :

$$\vec{v} = v(x, r)\vec{u}_x \text{ (coordonnées cylindriques d'axe } Ox).$$

L'incompressibilité du fluide implique que cette vitesse ne peut pas dépendre de x. Dès lors :

$$\vec{v} = v(r)\vec{u}_x.$$

Copyrighted material

Il en résulte que le mouvement rectiligne de la particule s'effectue à vitesse constante (r fixé) son accélération est donc nulle, c'est-à-dire : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$. On en déduit que les forces de « pression » P^* doivent équilibrer les forces de viscosité. Enfin, rappelons que si l'on considère un cylindre de fluide d'axe Ox, de longueur dx et de rayon r, le reste du fluide exerce sur sa surface latérale $\delta\Sigma_r = 2\pi r dx$ une force visqueuse $\delta\vec{f}$ telle que : $\delta\vec{f} = \eta\frac{\partial v}{\partial r}\delta\Sigma_r\vec{u}_x$. On aura donc $\vec{\phi}_{vol}^{viscosité} // \vec{u}_x$, de sorte que en projetant (1) perpendiculairement à $\vec{u}_x$ selon une direction quelconque $\vec{u}_\perp$: $\vec{0}\cdot\vec{u}_\perp = \vec{\nabla}(P^*)\cdot\vec{u}_\perp + 0$.

Commentaire

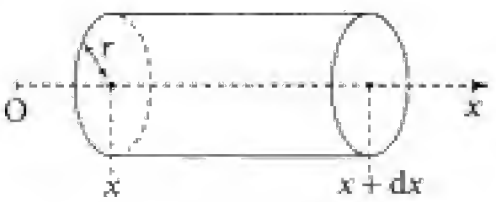
Ici, la forme exacte de $\vec{\phi}_{vol}^{viscosité}$ n'est pas utile. On montre pour l'écoulement $\vec{v} = v(r)\vec{u}_x$:

$$\vec{\phi}_{vol}^{viscosité} = \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)\vec{u}_x = \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\vec{u}_x.$$

D'où $\vec{\nabla}_\perp(P^*) = \vec{0} \Rightarrow P^*$ ne peut dépendre que de x, et il est constant dans une section de la conduite : $P^* = P^*(x)$.

Écrivons maintenant que le cylindre (r, dx) n'est pas accéléré, ce qui donne :

$$[P^*(x) - P^*(x+dx)]\pi r^2 + \eta\frac{\partial v}{\partial r}2\pi r dx = 0.$$



Soit encore :

$$\underbrace{\frac{1}{\eta}\frac{\partial P^*}{\partial x}}_{\text{fonction que de } x} = \underbrace{\frac{2}{r}\frac{dv}{dr}}_{\text{fonction que de } r} \quad (2)$$

$$f(x) = g(r)$$

Ces deux fonctions sont donc des constantes. On en déduit que le gradient de pression est indépendant de x et s'identifie à $-\frac{\Delta P^*}{L}$ où $\Delta P^* = (P_A^* - P_B^*)$ (A et B désignent deux sections séparées d'une distance L, on passe de A à B en suivant l'écoulement).

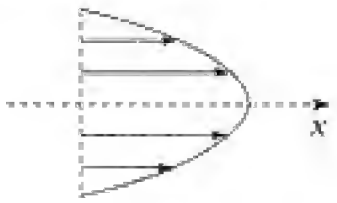
$$P^*(x) = P^*(x_A) + \frac{P_B^* - P_A^*}{L}x.$$

Intégrons l'équation (2) : $\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_A^* - P_B^*)}{2\eta L}\cdot r$

$$v(r) = -\frac{1}{4\eta}\frac{P_A^* - P_B^*}{L}(r^2 - a^2) \text{ puisque l'on doit avoir } v(a) = 0.$$

D'où : $$\boxed{v(r) = \frac{a^2}{4\eta}\frac{P_A^* - P_B^*}{L}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)} \quad (3)$$

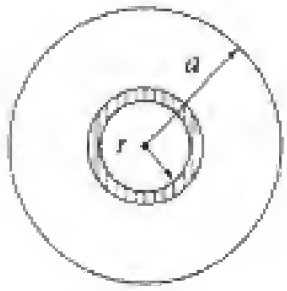
(**Loi de Poiseuille** : profil parabolique).



Copyrighted material

1. b. ■ Le débit volumique s'obtient alors selon :

$$Q = \iint v(r)\delta\Sigma \quad \text{avec} \quad \delta\Sigma = 2\pi r dr$$



d'où : $Q = \int_0^a 2\pi r v(r)dr = \frac{\pi a^2}{4\eta} \cdot \frac{P_A^* - P_B^*}{L} \cdot \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr^2$

$$Q = \frac{\pi a^4}{4\eta} \frac{P_A^* - P_B^*}{L} \int_0^1 (1 - X)dX \quad \text{avec} \quad X = \left(\frac{r}{a}\right)^2.$$

L'intégrale vaut $-\left[\frac{(1-X)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{Q = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{P_A^* - P_B^*}{L}} \quad (4) \text{ (formule de Poiseuille)}$$

Commentaires

• Ces résultats correspondant en fait à un régime appelé « régime laminaire », associé à de « faibles » vitesses, à de « petits » diamètres de tuyau et plus précisément à un nombre de Reynolds R_e pas trop grand (R_e est défini par $R_e = \frac{\rho R V}{\eta}$, V = vitesse en $r = 0$ par exemple).

• La loi établie en (4) traduit la linéarité entre le débit volumique Q et le « gradient de pression », ce que l'on peut écrire :

$$Q = \left(\frac{S^2}{8\eta\pi}\right) \cdot \frac{\Delta P^*}{L} \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{S} = k\frac{k\Delta P^*}{L} \quad \text{avec} \quad \Delta P^* = P_A^* - P_B^*.$$

$\frac{Q}{S}$ est l'équivalent d'une densité volumique j de courant de fluide et $\frac{-\Delta P^*}{L}$ d'un gradient de pression (*cf.* $\vec{j} = -k\vec{\nabla}P$).

■ La vitesse moyenne $\langle v \rangle$ sur une section est définie par la relation :

$$\langle v \rangle \cdot \pi a^2 = \int_0^a v(r)2\pi r dr = Q \quad (5)$$

d'où $\langle v \rangle = \frac{Q}{\pi a^2} \Rightarrow \boxed{\langle v \rangle = \frac{P_A^* - P_B^*}{8L\eta} a^2}$ (6)

La vitesse maximale vaut $v_{max} = v(0) = \frac{a^2}{4\eta} \frac{P_A^* - P_B^*}{L}$.

Donc : $\langle v \rangle = \frac{1}{2} v_{max}$ (7)

■ Quant au débit d'énergie cinétique à travers toute section (x fixé), il s'écrit :

$$D_{e_c} = \iint \frac{1}{2} v^2(r)\rho\delta Q \quad \text{où} \quad \delta Q = v(r)\delta\Sigma = v(r)2\pi r dr$$

$$D_{e_c} = \frac{1}{2}\rho 2\pi \int_0^a v^3(r) r dr = \frac{\rho\pi}{2} \int_0^{a^2} v_{max}^3 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 dr^2$$

et $$D_{e_c} = \frac{\pi a^2}{2} \rho v_{max}^3 \int_0^1 (1 - X)^3 dX \quad \left(X = \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Copyrighted material

L'intégrale vaut $\left[\frac{-(1-X)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

soit $D_{v_z} = \frac{1}{8}\pi a^2 \rho v_{max}^3$ et avec $\langle v \rangle = \frac{1}{2} v_{max}$ $D_{v_z} = \rho \pi a^2 \langle v \rangle^3$

or $Q = \pi a^2 \langle v \rangle$ d'où : $\boxed{D_{v_z} = \rho Q \langle v \rangle^2}$ (8)

Commentaires

On a par définition $Q = \pi a^2 \langle v \rangle$. On n'a pas cependant $D_{v_z} = \rho Q \cdot \left(\frac{1}{2}\langle v \rangle^2\right)$.

2. Le fluide contenu, à l'instant t, dans le cylindre délimité par la conduite et les sections centrées en A et B garde son énergie cinétique (le fluide n'est pas accéléré). Ainsi, si on lui applique le théorème de l'énergie cinétique, on peut écrire :

$$\frac{DE_c}{Dt} = 0 = \mathcal{P}_{\text{pression + pesanteur}} + \mathcal{P}_{\text{viscosité}}$$

D'où : $\mathcal{P}_{\text{viscosité}} = -\mathcal{P}_{\text{pression + pesanteur}} = -\mathcal{P}(P^*)$.

Or $\mathcal{P}(P^*) = \mathcal{P}(P^* \to S_A) + \mathcal{P}(P^* \to S_B)$, avec :

$\mathcal{P}(P^* \to S_A) = P_A^* \int_0^a v(r)\delta S$ puisque P^* est uniforme sur toute section de la conduite.

Or l'intégrale représente le débit volumique Q à travers la section S_A. Il en sera évidemment de même à travers S_B. D'où : $\mathcal{P}(P^* \to S_A) = P_A^* Q$.

De même (puissance résistante) : $\mathcal{P}(P^* \to S_B) = -P_B^* Q$.

Finalement, il vient : $\mathcal{P}_{\text{viscosité}} = -(P_A^* - P_B^*) \cdot Q$

d'où avec (4) : $\boxed{\mathcal{P}_{\text{viscosité}} = -\frac{8\eta L}{\pi a^4} Q^2 = -R_h Q^2}$ (9)

où $R_h = \frac{8\eta L}{\pi a^4}$ est la **résistance hydraulique** de l'élément de conduite de longueur L.

Commentaire

On peut mettre en évidence une analogie avec l'électrocinétique :

Q	$\longleftrightarrow$	i
$P_A^* - P_B^*$	$\longleftrightarrow$	$V_A - V_B$
$P_A^* - P_B^* = R_h q$	$\longleftrightarrow$	$V_A - V_B = Ri$
$-\mathcal{P}_{\text{viscosité}} = R_h q^2$	$\longleftrightarrow$	$P_J = Ri^2$
$R_h = \frac{8\eta L}{\pi a^4}$	$\longleftrightarrow$	$R = \rho \frac{L}{\pi a^2} \cdots$

Copyrighted material

3. a. On fera l'hypothèse que les pertes de charge par frottement visqueux (dissipation d'énergie associée à $\mathcal{P}_{\text{viscosité}}$) sont essentiellement concentrées dans la capillaire (BC est en effet de longueur suffisamment grande, et le diamètre du tuyau est très inférieur à celui de la burette $\phi_c \ll \phi_b$). Le débit volumique est donné par :

$$Q = \langle v \rangle \frac{\pi \phi_c^2}{4} \quad (cf.\ (5))$$

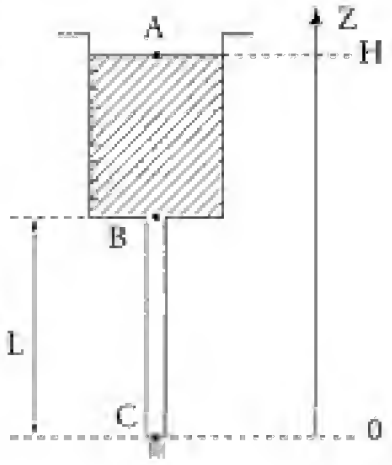
où $\langle v \rangle$ est la vitesse moyenne sur une section (la même à chaque instant pour toute section du tuyau : régime quasistationnaire). Cette vitesse $\langle v \rangle$ est donnée par la loi de Poiseuille (*cf.* (6))

$$\langle v \rangle = \frac{1}{32\eta} \frac{\phi_c^2}{L} \Delta P^*$$

où $\Delta P^* = P_B^* - P_C^*$ et $P^* = P + \rho g Z$.

Ici $P_C^* = P_0 + \rho g \cdot 0 = P_0$ $\quad P_B^* = P_B + \rho g L$.

Il reste à évaluer P_B. À cet effet, on appliquera le théorème de Bernoulli au fluide contenu dans la burette (où on néglige les forces visqueuses).



$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gH = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gL \text{ avec } \begin{cases} V_A \cdot S = vs \\ P_A = P_0. \end{cases}$$

Les vitesses sont faibles, on a donc avec une bonne approximation :

$$\frac{P_0}{\rho} + gH \approx \frac{P_B}{\rho} + gL \Rightarrow P_B + \rho g L \approx P_0 + \rho g H.$$

Commentaire

Comparons l'énergie cinétique volumique moyenne $\frac{1}{2}\rho \langle v \rangle^2$ à la chute de pression $\rho g H$:

$$K = \frac{\frac{1}{2}\rho \langle v \rangle^2}{\rho g H} = \frac{\langle v \rangle^2}{2gH} = \frac{\phi_c^4 (\rho g H)^2}{2 \times 32^2 \eta^2 L^2 g H} = \frac{\phi_c^4 \rho^2 g H}{2 \times 32^2 L^2 \eta^2}$$

$$K = \frac{10^{-12} \times 10 \times 1{,}9}{2 \times 32^2 \times 1{,}2^2} \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2 \approx 6{,}4 \cdot 10^{-15} \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2 \quad (H = 1{,}9 \text{ m et } L \sim 1{,}2 \text{ m}).$$

Pour l'eau ($\rho \sim 10^3$ et $\eta \sim 10^{-3}$) : $K \sim 6{,}4 \cdot 10^{-3}$ et l'approximation semble justifiée.

D'où : $P_B^* - P_C^* = (P_B + \rho g L) - P_0 = (P_0 + \rho g H) - P_0 = \rho g H$

et $\langle v \rangle = \frac{1}{32\eta} \frac{\phi_c^2}{L} \rho g H \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\pi \rho g}{128 \eta} \phi_c^4 \frac{H}{L}}$ (10)

• La conservation du volume de fluide donne : $Q = -S \frac{dH}{dt}$.

Soit avec (10) : $-S \frac{dH}{dt} = \frac{\pi \rho g}{128 \eta L} \phi_c^4 H$

Copyrighted material

d'où : $-\frac{dH}{H} = \frac{dt}{\tau}$ avec $\boxed{\tau = \frac{128\eta LS}{\pi\rho g\phi_c^4}}$ (11) et $H = H_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

Le volume écoulé est $v = S(H_0 - H)$, d'où : $v = SH_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

et en posant $V_0 = SH_0$ (ce n'est pas le volume initial du fluide !)

$$\frac{v}{V_0} - 1 = -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow \boxed{t = -\tau\ln\left(1 - \frac{v}{V_0}\right)}$$

La courbe $t \to -\ln\left(1 - \frac{v}{V_0}\right)$ doit être une droite de pente $\frac{1}{\tau}$.

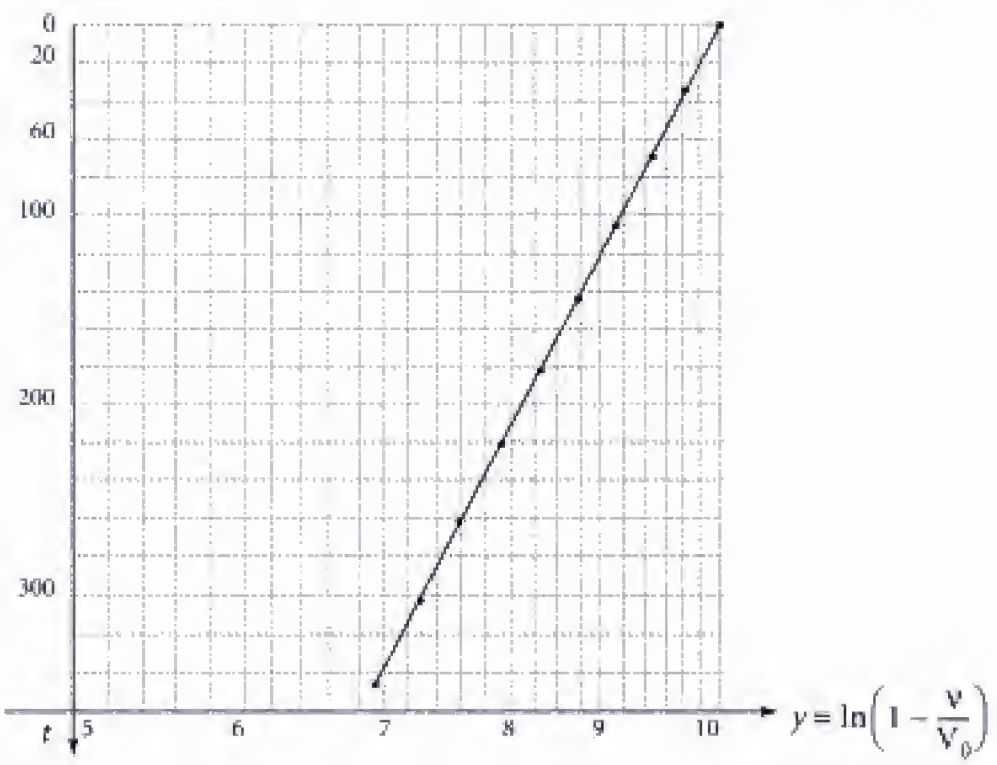
La détermination de cette pente permet d'en déduire la valeur de la constante de temps τ, et par là même celle du coefficient de viscosité η, toutes les autres grandeurs étant connues ou mesurables.

3. b. On trace la courbe (échelle semi-logarithmique) $\ln\left(1 - \frac{v}{V_0}\right) \to t$.

On a $H_0 = 194$ cm ; $L = 121$ cm et $\phi_b = 11$ mm d'où : $S = \frac{\pi\phi_b^2}{4}$ et $V_0 = SH_0 = \frac{\pi}{4}\phi_b^2 H_0$

soit $V_0 = \frac{\pi}{4}(1{,}1)^2 \times 194$ mL $\Rightarrow V_0 = 184{,}4$ mL.

v (mL)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$1 - \frac{v}{V_0}$	1	0,946	0,892	0,837	0,783	0,729	0,675	0,620	0,566	0,512
t (s)	0	34	69	105	143	181	220	261	302	346



Copyrighted material

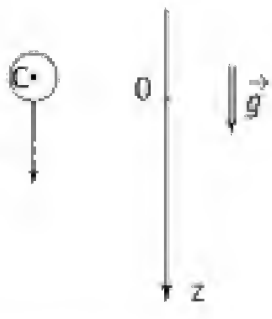
Soit une pente $\tau = \dfrac{\Delta t}{\Delta y} = \dfrac{302 - 34}{\ln\left(\dfrac{0{,}946}{0{,}566}\right)} = 522\ s$ et d'après (11) : $\eta = \dfrac{\tau\pi\rho g\phi_c^3}{128LS}$

soit $\eta = \dfrac{522 \times \pi \times 10^3 \times 9{,}81 \times 10^{-12}}{128 \times 1{,}21 \times \dfrac{\pi}{4}(1{,}1 \cdot 10^{-2})^2}$ $(\phi_c = 1\ \text{mm} = 10^{-3}\ \text{m})$

$\eta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s}$ (valeur tout à fait cohérente pour l'eau liquide).

304 Viscosimètre à billes

Une bille de rayon a et de masse volumique ρ_b se déplace à la vitesse $\vec{U} = U\vec{u}_z$ dans un fluide incompressible (masse volumique ρ) de vitesse nulle à des distances de C grandes devant a.



On note $P(M, t)$ et $\vec{v}(M, t)$ la pression et le champ des vitesses au sein du fluide.

La densité volumique de forces visqueuses est donnée par :

$\vec{\phi}_{vol}^{\text{viscosité}} = \eta\Delta\vec{v}$ (écoulement incompressible).

On fera les hypothèses suivantes :

- H1 : la vitesse de déplacement de la bille est supposée suffisamment faible ;
- H2 : le nombre de Reynolds R_e est petit devant l'unité.

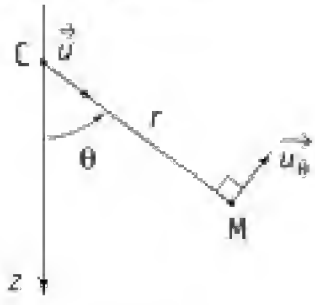
1. Après avoir commenté les hypothèses H1 et H2, montrer que l'on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}p = \eta\Delta\vec{v}$$

p désigne la « surpression » due au mouvement de la bille dans le fluide visqueux.

2. Les calculs donnent, en coordonnées sphériques d'axe Cz et d'origine C :

- $\vec{v} = v_r\vec{u} + v_\theta\vec{u}_\theta$ avec $\begin{cases} v_r = U\cos\theta\left(\dfrac{3a}{2r} - \dfrac{a^3}{2r^3}\right) \\ v_\phi = -U\sin\theta\left(\dfrac{3a}{4r} + \dfrac{a^3}{4r^3}\right) \end{cases}$
- $p = \dfrac{3}{2}\eta a\dfrac{U \cdot \cos\theta}{r^2}$.



a. Commenter succinctement les expressions de v_r, v_θ et p.

On pourra vérifier que l'expression de p est en accord avec la relation $\Delta p = 0$.

On rappelle les formules d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} \ ; \quad \text{div}(\text{rot}\,\vec{E}) = 0.$$

Copyrighted material

b. La contrainte tangentielle (force par unité de surface) exercée par le fluide sur la bille s'exprime sous la forme :

$$\frac{\delta\overrightarrow{f_{tang}}}{\delta\Sigma} = \frac{3}{2}\eta\frac{U\sin\theta}{a}\overrightarrow{u_\theta}.$$

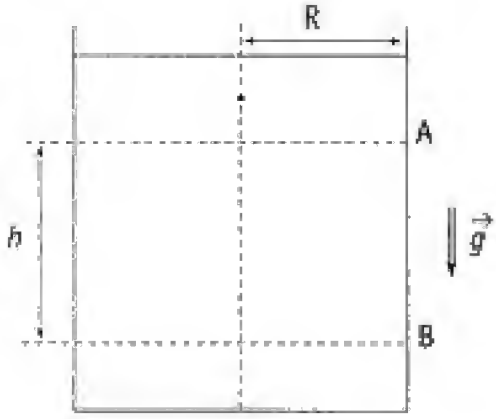
En déduire l'expression de la force de traînée $\vec{T}$, puis du coefficient de traînée défini selon :

$$C_x = \frac{\|\vec{T}\|}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2}.$$

3. Application : viscosimètre à bille

On laisse tomber une bille de verre dans un récipient gradué de rayon R (suffisamment grand devant le rayon a de la bille) contenant de l'huile de silicone de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ.

On mesure le temps de chute Δt entre les repères A et B distants de h.



a. Déterminer la vitesse limite $\overrightarrow{U_{lim}}$ de la bille dans sa chute.

On donnera en particulier la valeur du nombre de Reynolds associé à cette vitesse limite pour : $\rho = 960\ kg \cdot m^{-3}$; $\rho_b = 2{,}24\ g \cdot cm^{-3}$; $\eta = 0{,}1\ Pa \cdot s$ et $2a \sim 2\ mm$. Commenter.

b. L'expérience donne pour $h = 17{,}2\ cm$:

$\phi_b = 2a = 2\ mm \Rightarrow \langle \Delta t \rangle = 6''$ (moyenne sur un « grand » nombre d'expériences) ;

$\phi_b = 2a = 1{,}5\ mm \Rightarrow \langle \Delta t \rangle = 10{,}5''$ (moyenne sur un « grand » nombre d'expériences).

Commenter ces résultats et calculer la valeur du coefficient de viscosité dynamique η de l'huile considérée (huile 47 v 100).

1. Ce qu'il faut savoir

- Nombre de Reynolds.
- Conditions aux limites avec un fluide visqueux.
- Notion de contrainte (force par unité de surface) normale, contrainte tangentielle.
- Loi de l'hydrostatique – poussée d'Archimède.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Il faut montrer que les termes d'accélération locale $\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)$ et d'accélération convectives $((\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v})$ sont négligeables devant le terme lié à la viscosité $\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$ (*cf.* H1 et H2).

Copyrighted material

2. a. On vérifiera les conditions aux limites (à « l'infini » et sur la surface de la bille).

Il est également possible de vérifier que la fonction $p(r, \theta)$, proposée dans l'énoncé, est bien solution du problème. Il suffit pour cela de transformer l'équation du **1.** à l'aide de l'identité vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ et d'en déduire que l'on a $\Delta p = 0$.

b. Dans le calcul de $\vec{T}$, il faudra tenir compte des forces normales (dues à la surpression p liée à la viscosité) et des forces tangentielles (contraintes tangentielles visqueuses).

On exprimera tout d'abord la force $\delta\vec{T}$ associée à un élément de surface $\delta\Sigma$ de la bille.

Le nombre de Reynolds peut être défini ici par $R_e = \dfrac{U \cdot (2a)}{(\eta/\rho)}$ (U vitesse caractéristique = vitesse de la bille par rapport au fluide ; L = 2a = la longueur caractéristique = diamètre de la bille).

3. a. On supposera les conditions H1 et H2 réalisées. On adoptera donc l'expression obtenue au **2. b.** de la force de trainée. Il est également nécessaire de tenir compte de la poussée d'Archimède (pression statique modifiée par la pesanteur).

b. La vitesse limite $\overrightarrow{v_{\text{lim}}}$ est « atteinte » au bout d'un temps τ suffisamment petit pour que la bille ait cette vitesse quand elle passe en A et la conserve au moins jusqu'en B. On calculera les grandeurs v_{lim}, τ et R_e.

3. Solution

1. ■ Le mouvement de la particule fluide, dans le cas d'un écoulement incompressible visqueux, est régi par l'équation (équation de Navier-Stokes) :

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\vec{g} + \vec{\Phi}_{\text{vol}}^{\text{viscosité}}$$

or $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$, d'où avec ρ = cste ici et $\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P - \rho gz) + \eta\Delta\vec{v} \quad (1)$$

Examinons maintenant les hypothèses H1 et H2 :

• H2 : nombre de Reynolds petit devant l'unité.

L'hypothèse H2 permet de négliger, dans (1), le terme correctif $\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ par rapport à la force visqueuse volumique $\eta\Delta\vec{v}$. D'où :

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P - \rho gz) + \eta\Delta\vec{v}.$$

• H1 : la vitesse de la bille restant faible, on pourra supposer que l'on a affaire à un **écoulement quasi stationnaire** (les variations de vitesse peuvent rapidement se « propager » dans tout le fluide par diffusion visqueuse). Il revient au même de considérer que l'on a :

$$T = \frac{L}{U} \gg \tau_d \quad (L \sim 2a)$$

Copyrighted material

or $\left\|\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \sim \rho\dfrac{U}{T}$, que l'on va encore comparer à $\eta\Delta\vec{v}$:

$$\frac{\left\|\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\|}{\left\|\eta\Delta\vec{v}\right\|} \sim \frac{\rho\dfrac{U}{T}}{\eta\dfrac{U}{L^2}} \sim \frac{\dfrac{L^2}{\nu'}}{T} = \frac{\tau_d}{T} \ll 1.$$

Ainsi, avec cette approximation et pour une bille se déplaçant dans un fluide visqueux avec une vitesse $\vec{U}(t)$, la vitesse en tout point du fluide – à l'instant t – est celle que l'on obtiendrait pour une vitesse constante $\vec{U_0}$ de la bille s'identifiant à la vitesse $\vec{U}(t)$ qu'elle possède à cet instant.

■ On a donc avec H1 et H2 : $\overrightarrow{\text{grad}}(P - \rho gz) = \eta\Delta\vec{v}$ (2)

Écrivons alors la pression dans le fluide sous la forme :

$$P = P_{hyd} + p, \quad P_{hyd} \equiv \text{ pression hydrostatique telle que :}$$

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}P_{hyd}(M) + \rho\vec{g} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(P_{hyd} - \rho gz) = \vec{0}.$$

Donc l'équation (2) devient :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}p = \eta\Delta\vec{v}} \quad (3)$$

2. a. Champ des vitesses $\vec{v} = v_r\vec{u} + v_\theta\vec{u}_\theta$.

■ Le fluide est au repos à « l'infini » (très loin de la bille). On doit donc avoir :

$\lim\limits_{\infty}\vec{v} = \vec{0}$, ce qui est en accord avec les expressions données dans l'énoncé.

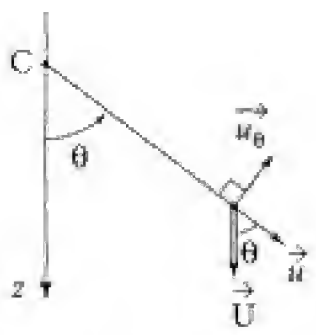
De plus $\lim\limits_{\infty} p \to 0$ comme il se doit.

• D'autre part, la viscosité implique que la vitesse du fluide, au contact du solide, doit s'identifier à celle du point correspondant du solide (ici $\vec{U} = U\vec{u}_z$).

Il faut donc vérifier que l'on a $\vec{v}(r = a, \theta) = U\vec{u}_z$ pour tout θ.

Or $\begin{cases} v_r = U\cos\theta\left(\dfrac{3a}{2r} - \dfrac{a^3}{2r^3}\right) \Rightarrow v_r(a, \theta) = U\cos\theta \\ v_\theta = -U\sin\theta\left(\dfrac{3a}{4r} + \dfrac{a^3}{4r^3}\right) \Rightarrow v_\theta(a, \theta) = -U\sin\theta \end{cases}$

d'où $\vec{v}(a, \theta) = U\underbrace{\left(\cos\theta\vec{u} - \sin\theta\vec{u}_\theta\right)}_{\vec{u}_z} = U\vec{u}_z$.



• Transformons la relation (3) à l'aide de la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$. L'écoulement étant incompressible, il vient $\text{div}\vec{v} = 0$, soit : $\Delta\vec{v} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}p = -\eta\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v})$

Copyrighted material

soit encore avec le vecteur vorticité $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$:

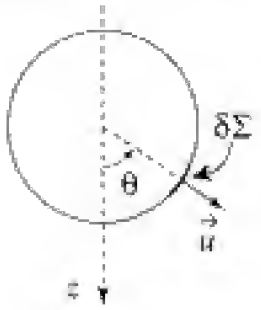
$$\overrightarrow{\text{grad}}p = -\eta\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\omega} \quad (4)$$

Prenons alors la divergence des deux nombres (avec $\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}(\ ) \equiv 0$):

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}p) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta p = 0} \quad (5)$$

Le champ des surpressions est une fonction harmonique, ce qui est bien le cas, en coordonnées sphériques, de la fonction $\frac{\cos\theta}{r^2}$ (*cf.* dipôle électrostatique).

2. b. La force de traînée $\vec{T}$ est directement liée à la viscosité. Une première contribution résulte de l'effet dû à la « surpression visqueuse » p.



$$\delta\vec{T}_1 = -p(a,\theta)\vec{u}\,\delta\Sigma$$

or $\quad p(a,\theta) = \frac{3}{2}\eta\frac{U}{a}\cos\theta$

d'où : $\boxed{\delta\vec{T}_1 = -\frac{3\eta}{2a}U\cos\theta\delta\Sigma\vec{u}} \quad (6)$

Une seconde provient de la contrainte visqueuse tangentielle :

$$\delta\vec{T}_2 = \frac{3\eta}{2a}U\sin\theta\vec{u}_\theta\delta\Sigma \quad (cf.\ \text{énoncé}).$$

Au total $\delta\vec{T} = \delta\vec{T}_1 + \delta\vec{T}_2$, soit :

$$\delta\vec{T} = -\frac{3\eta}{2a}\cdot U\underbrace{\left(\cos\theta\vec{u} - \sin\theta\vec{u}_\theta\right)}_{\vec{u}_z}\delta\Sigma = -\frac{3\eta}{2a}\vec{U}\delta\Sigma$$

et pour toute la surface de la bille : $\vec{T} = -\frac{3\eta}{2a}\vec{U}4\pi a^2$

$$\boxed{\vec{T} = -6\eta\pi a\cdot\vec{U}} \quad (7) \quad \text{(formule de Stokes)}$$

Commentaire

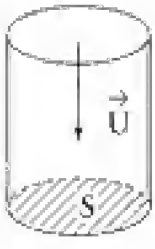
Dans le cas d'une bille descendant dans un récipient rempli d'un liquide visqueux, l'application de la formule (7) suppose en outre, que les distances entre la bille et les parois restent suffisamment grandes devant le rayon a de la bille…

Le coefficient de traînée C_x est défini selon $\vec{T} = -C_x\cdot S\cdot\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\vec{u}_z$

où $S = \pi a^2$, d'où d'après (7) :

$$C_x\pi a^2\frac{1}{2}\rho U^2 = 6\eta\pi aU$$

et $\quad C_x = \frac{12\eta}{\rho aU} = \frac{24}{\frac{U\cdot(2a)}{\nu'}}$, avec $\nu' = \frac{\eta}{\rho}$



Copyrighted material

soit finalement en introduisant le nombre de Reynolds $R_e = \frac{UL}{\nu'} = \frac{U \cdot 2a}{\nu'}$ (L ≡ diamètre de la bille) :

$$\boxed{C_x = \frac{24}{R_e}} \quad (R_e \ll 1).$$

3. a. ■ D'après ce qui précède, et en supposant les hypothèses réalisées (*cf.* H1, H2), la bille est soumise :

• à son poids : $m\vec{g} = \rho_b \frac{4}{3}\pi a^3 g \vec{u}_z$;

• à l'action des forces pressantes $P = P_{hyd} + p$:

– celles associées à P_{hyd} redonnent la poussée d'Archimède $\Rightarrow \vec{f}_A = -\rho \frac{4}{3}\pi a^3 g \vec{u}_z$;

– celles dues à p sont comptabilisées dans la force de trainée $\vec{T}$;

– à des contraintes visqueuses tangentielles comptées dans $\vec{T}$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la bille s'écrit alors :

$$m\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho_b - \rho)\vec{u}_z - 6\pi\eta a\vec{U} \quad \text{avec ici } \vec{U} = U(t)\vec{u}_z$$

d'où :

$$\frac{m}{6\pi\eta a}\frac{dU}{dt} = \frac{2(\rho_b - \rho)a^2 g}{9\eta} - U.$$

Posons $\tau = \frac{m}{6\pi\eta a} \Rightarrow \tau\frac{dU}{dt} + U = \frac{2}{9}\frac{(\rho_b - \rho)a^2 g}{\eta}$.

Il apparaît une vitesse limite $\left(\frac{dU}{dt} = 0\right)$ obtenue pour $t \gg \tau$ telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{U_{lim}} = \frac{2}{9}\frac{(\rho_b - \rho)}{\eta} g a^2 \vec{u}_z} \quad (8)$$

■ Calculons cette vitesse limite pour $\rho = 960\ kg \cdot m^{-3}$ $\rho_b = 2{,}24 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$ $\eta \sim 0{,}1\ Pa \cdot s$ $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$ et $a \sim 1\ mm$, d'où :

$$U_{lim} = \frac{2 \cdot (2\,240 - 960) \cdot 9{,}81 \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2}{9 \times 0{,}1} \Rightarrow U_{lim} = 28\ mm \cdot s^{-1}.$$

Le temps caractéristique vaut $\tau = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_b}{6\pi\eta a} = \frac{2}{9}\frac{a^2\rho_b}{\eta}$

soit

$$\tau = \frac{2 \cdot (10^{-3})^2 \cdot 2\,240}{9 \cdot 0{,}1} \Rightarrow \tau = 5\ ms.$$

■ Nombre de Reynolds associé à cette vitesse limite : $R_e = \frac{U_{lim} \cdot (2a)}{\nu'} = \frac{\rho U_{lim} \cdot (2a)}{\eta}$

soit

$$R_e = \frac{960 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}5 < 1.$$

Copyrighted material

Commentaire

Le nombre de Reynolds, inférieur à l'unité, n'est pas très petit devant 1 pour un diamètre de bille égal à 2 mm (il prend la valeur 0,2 pour $\phi = 1{,}5$ mm). Bien que l'hypothèse H2 semble ici assez limite, on continuera, par la suite, à adopter l'expression de Stokes de la force de traînée (vérification expérimentale).

3. b. ■ On admettra que le niveau A est tel que la vitesse de la bille est peu différente de U_{lim}, vitesse qu'elle garde jusqu'en B (effets des parois et du fond négligés…). On a donc dans ce cas :

$$\Delta t = \frac{h}{U_{lim}} = \frac{9h\eta}{2(\rho_b - \rho)ga^2} \quad (9)$$

Soit encore $a^2 \cdot \Delta t = \text{cste}$ pour des billes de diamètres différents, ce que confirme l'expérience :

$\phi_b = 2a$ (mm)	$\langle \Delta t \rangle$	$\phi_b^2 \cdot \langle \Delta t \rangle$
2	6	24
1,5	10,5	23,6

L'accord est satisfaisant…

■ Calcul de η : $\eta = \dfrac{2 \cdot (\rho_b - \rho)ga^2}{9h} \Delta t$ d'après (9)

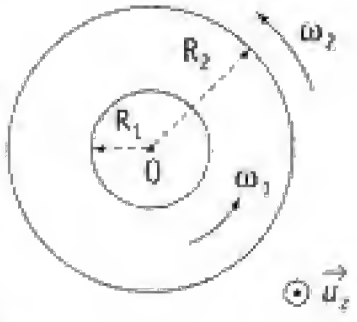
soit pour $\phi_b = 2$ mm : $\eta = \dfrac{2 \cdot (2\,240 - 960) \cdot 9{,}81 \cdot (10^{-6}) \cdot 6}{9 \cdot 17{,}2 \cdot 10^{-2}}$

d'où : $\eta = 0{,}097$ Pa · s

en bon accord avec la valeur donnée par le fabriquant ($\eta = 0{,}1$ Pa · s).

305 Viscosimètre de Couette

Un fluide visqueux (coefficient de viscosité η) incompressible (masse volumique ρ_0) remplit, sur une hauteur h, l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux (axe commun **vertical** Oz) de rayons R_1 et R_2.



On désire étudier le régime stationnaire où les vitesses respectives de rotation, par rapport à Oz, des deux cylindres sont ω_1 et ω_2.

Un point M du fluide est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z.

On fait les hypothèses suivantes :

- le champ des vitesses dans le fluide est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta$:

Copyrighted material

– le champ des pressions dépend de r, distance à l'axe, et de z ;

– on néglige les effets de bord (h grand devant R_1 et R_2).

1. Étude du champ des vitesses :

a. Que dire du champ des vitesses lorsque $\omega_1 = \omega_2$?

b. Même question lorsque $\omega_2 = 0$ et $R_2 \to \infty$.

c. Qu'en est-il pour $R_2 - R_1 = e \ll R_1$?

d. On suppose que la solution exacte est donnée par :

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}.$$

Commenter et donner les valeurs de A et de B.

2. On s'intéresse à une tranche de fluide située entre les cylindres de rayon r et $r + dr$. On admet que les contraintes visqueuses s'exerçant sur la surface fluide cylindrique de rayon r sont ici réductibles à des forces de densité surfacique :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \Sigma} = \eta\left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right]\vec{u}_\theta.$$

a. Commenter cette expression.

b. En déduire l'équation différentielle vérifiée par le champ des vitesses $v(r)$, et retrouver le résultat avancé au **1. d**.

3. On fait maintenant $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = \omega_0 > 0$. On veut déterminer le couple $\overrightarrow{\Gamma_{op}} = \Gamma_{op}\vec{u}_z$ qu'il faut appliquer au cylindre $\mathscr{C}_1$ pour le maintenir fixe.

a. Établir une expression approchée de ce couple dans le cas où $e = R_2 - R_1 \ll R_1$. On utilisera le résultat de **1. c**.

b. Établir une expression « plus exacte » de $\overrightarrow{\Gamma_{op}}$ dans le cas où l'inégalité précédente n'est pas réalisée (voir l'étude faite au **2. a.** et **2. b.**).

1. Ce qu'il faut savoir

- Rotation en bloc d'un fluide.
- Écoulement associé à un vortex.
- Force visqueuse de cisaillement pour un écoulement du type $\vec{v} = v(x)\vec{u}_y$.
- Théorème du moment cinétique scalaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Il s'agit de reconnaître des écoulements particuliers (rotation en bloc, vortex, écoulement plan $\vec{v} = v(x)\vec{u}_y$). On montrera que la solution « générale » proposée au **1. d.** est compatible avec les écoulements **1. a.**, **1. b.** et **1. c.**

2. a. On vérifiera que cette force est nulle pour un écoulement tel que $\omega(r) = \omega_0 = \text{cste}$ ($v(r) = \omega_0 \cdot r$), et qu'elle s'identifie à l'expression usuelle $\frac{\delta \vec{f}}{\delta \Sigma} = \eta\frac{\partial v}{\partial x}\vec{u}_y$ dans l'approximation du **1. c**.

Copyrighted material

b. On s'intéressera au volume particulaire situé entre les cylindres de rayons r et $r + dr$ auquel on appliquera le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz du système.

3. L'opérateur doit compenser le couple produit sur $\mathscr{C}_1$ par les contraintes tangentielles.

3. Solution

1. a. Lorsque les vitesses angulaires des deux cylindres sont égales ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$), la solution cherchée doit physiquement correspondre à une rotation en bloc du fluide.

Autrement dit, on doit avoir $\omega(r) = \omega_0$, ce qui correspond à un champ des vitesses tel que :

$$v(r) = \omega(r)r \Rightarrow v(r) = \omega_0 r \quad (1)$$

Il s'agit bien évidemment d'un écoulement rotationnel.

1. b. Lorsque $\omega_2 = 0$ et R_2 tend vers l'infini, on doit retenir une solution telle que :

- $v = v(r)$;
- $v(R_1) = \omega_1 R_1$ (absence de discontinuité de vitesse relative cylindre-fluide) ;
- $v \to 0$ à l'infini ($r \to \infty$).

Une solution adaptée semble correspondre à un vortex d'axe Oz. Il en résulte que :

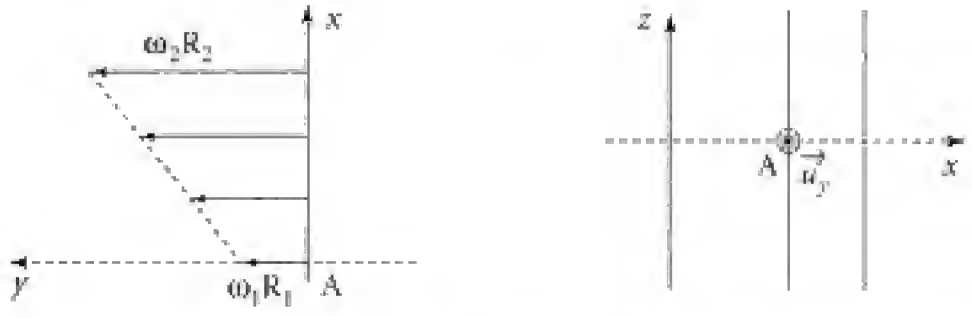
$$v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \text{ avec } \frac{\Gamma}{2\pi R_1} = \omega_1 R_1.$$

Soit finalement : $v(r) = \omega_1 R_1 \cdot \dfrac{R_1}{r}$ (2)

Cet écoulement est irrotationnel ($r > R_1$). Il vérifie $rv(r) = \text{cste} = \dfrac{\Gamma}{2\pi}$ (Γ circulation du champ des vitesses). On a ainsi en notant $v(r) = r\omega(r)$:

$$r^2\omega(r) = R_1^2\omega_1^2.$$

1. c. Pour $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, on peut retenir, localement, la modélisation d'un écoulement visqueux entre deux plaques planes selon la géométrie représentée ci-dessous :



Il s'agit d'un écoulement de Couette plan pour lequel la vitesse varie linéairement. On a ainsi en notant ε la distance à la plaque inférieure ($\varepsilon = r - R_1$) :

$$v(\varepsilon) = \omega_1 R_1 + (\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1) \cdot \frac{\varepsilon}{e} \quad \begin{cases} v(0) = \omega_1 R_1 \\ v(e) = \omega_2 R_2 \end{cases} \quad (3)$$

Copyrighted material

Soit en fonction de r :

$$\boxed{v(r) \# \omega_1 R_1 + (\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1)\frac{r - R_1}{R_2 - R_1}}$$

1. d. ■ On envisage une solution au problème posé de la forme :

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r} \quad (4)$$

Or A et B sont des fonctions de R_1, R_2, ω_1 et ω_2.

On retrouve les champs des vitesses $\frac{B}{r}$ associé à un vortex et Ar correspondant à une rotation en bloc. On doit donc s'attendre à ce que :

• $B = 0$ pour $\omega_1 = \omega_2$;

• $A = 0$ pour $\omega_2 = 0$ et $R_2 \to +\infty$, mais également (*cf.* remarque faite en fin de **1. b.**) pour $\omega_1 R_1^2 = \omega_2 R_2^2$.

■ Les coefficients A et B se déterminent en écrivant que la vitesse relative du fluide par rapport aux corps solides doit être nulle (fluide visqueux). Soit :

$$v(R_1) = \omega_1 R_1 \quad \text{et} \quad v(R_2) = \omega_2 R_2.$$

D'où le système en A et B : $AR_1 + \frac{B}{R_1} = \omega_1 R_1$ et $AR_2 + \frac{B}{R_2} = \omega_2 R_2$ (5)

Soit encore : $AR_1^2 + B = \omega_1 R_1^2$ et $AR_2^2 + B = \omega_2 R_2^2$.

Et par élimination de B : $A = \dfrac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

Puis : $A + \dfrac{B}{R_1^2} = \omega_1$ et $A + \dfrac{B}{R_2^2} = \omega_2 \Rightarrow B\left(\dfrac{1}{R_2^2} - \dfrac{1}{R_1^2}\right) = \omega_2 - \omega_1$.

Soit $B = \dfrac{R_1^2 R_2^2(\omega_2 - \omega_1)}{R_1^2 - R_2^2}$.

Finalement, nous obtenons :

$$\boxed{v(r) = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{R_1^2 R_2^2(\omega_2 - \omega_1)}{R_1^2 - R_2^2} \cdot \frac{1}{r}} \quad (6)$$

Les propriétés des coefficients A et B suggérées au début de cette question sont bien vérifiées.

■ Il reste à montrer qu'il y a accord également avec l'expression (3) obtenue pour $R_2 - R_1 = e \ll R_1$. Posons alors $r = R_1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll R_1$) et développons l'expression (4) jusqu'au premier ordre en ε :

$$v(r) = A(R_1 + \varepsilon) + \frac{B}{R_1\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{R_1}\right)} \approx A(R_1 + \varepsilon) + \frac{B}{R_1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{R_1}\right).$$

Copyrighted material

D'où $v(r) = \left(AR_1 + \frac{B}{R_1}\right) + \left(A - \frac{B}{R_1^2}\right)\varepsilon.$

Soit avec $\omega_1 R_1 = v_1 = AR_1 + \frac{B}{R_1}$: $v(r) = v_1 + \left(A - \frac{B}{R_1^2}\right)\varepsilon.$

Cherchons alors un équivalent de $A - \frac{B}{R_1^2}$ en fonction de l'infiniment petit e.

Les équations (5) impliquent, avec $v_2 = \omega_2 R_2$:

$$v_2 - v_1 = A(R_2 - R_1) + B\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$v_2 - v_1 = (R_1 - R_2)\left[A - \frac{B}{R_1 R_2}\right] = e\left[A - \frac{B}{R_1^2}\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)^{-1}\right].$$

D'où : $v_2 - v_1 = e\left[A - \frac{B}{R_1^2}\right] + o(e).$

Donc à la limite envisagée ($e \ll R_1$), on a : $A - \frac{B}{R_1^2} = \frac{v_2 - v_1}{e}$.

Et $v(r) \approx v_1 + \frac{v_2 - v_1}{e}\varepsilon$ comme il se doit.

2. a. ■ Lorsque le fluide tourne en bloc autour de Oz, les forces visqueuses considérées doivent être nulles (il n'y a plus de glissement des couches fluides les unes par rapport aux autres).

On doit donc avoir :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \Sigma} = \vec{0} \qquad \text{pour } v = \omega_0 r.$$

Soit : $\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = 0$ pour $v = \omega_0 r$, ce qui est évident.

Cette remarque peut suggérer d'écrire cette force autrement, c'est-à-dire avec :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{f}}{\partial \Sigma} = \eta r \frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right)\vec{u}_\theta}$$

■ D'autre part, dans le cas où les cylindres sont très proches ($R_1 - R_2 = e \ll R_1$), posons $r = R_1 + x$ et comparons les deux termes $\frac{dv}{dr}$ et $\frac{v}{r}$:

on a $\left|\frac{dv}{dr}\right| \approx \frac{v_2 - v_1}{e}$ et $\frac{v}{r} < \frac{\max(v_1, v_2)}{R_1}$.

Ainsi dès que $e \ll R_1$ (et pour $\frac{v_2 - v_1}{v_1}$ pas trop petit), on peut faire l'approximation

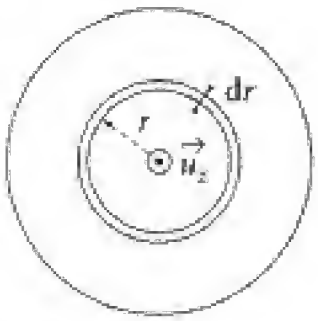
$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \Sigma} = \eta \frac{dv}{dx}\vec{u}_y$ ce qui revient à la limite à prendre en compte un écoulement plan $(\vec{u}_\theta \to \vec{u}_y)$.

Copyrighted Material

2. b. Intéressons-nous au fluide contenu entre les cylindres de rayon r et $r + dr$, et de hauteur Δz.

Le régime est stationnaire, et le moment cinétique σ_Δ par rapport à Oz de ce système particulaire est invariable dans le temps. On a donc :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = 0.$$



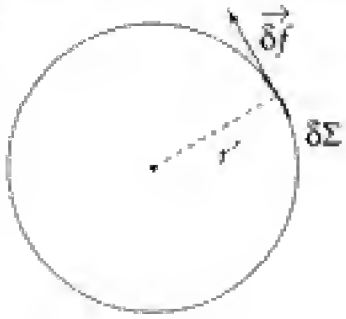
Or d'après le théorème du moment cinétique scalaire, il vient (référentiel d'étude galiléen) :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta^{ext} = \mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{pression}) + \mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{pesanteur}) + \mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{viscosité}).$$

Les efforts de pression ne créent pas de moment selon Δ, les forces correspondantes étant soit parallèles à l'axe (faces inférieures et supérieures), soit rencontrant l'axe (faces latérales).

Il en de même des forces de pesanteur (elles sont parallèles à Δ). Quant aux forces de viscosité, elles n'interviennent (d'après l'énoncé) que sur les faces latérales en r et $r + dr$ (ceci est en accord avec une modélisation ne faisant pas intervenir la coordonnée z pour le champ des vitesses : on néglige notamment les effets de bord en $z = 0$, fond du récipient et en $z = h\ldots$).

Calculons alors le moment de ces forces sur une surface fluide cylindrique de rayon r' (moment dû au fluide extérieur à ce cylindre).



Pour un élément de surface $\delta\Sigma$, on a :

$$\delta\mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{viscosité}) = r'\frac{\delta f}{\delta\Sigma}(r')\delta\Sigma.$$

Soit au total, et puisque $\frac{\delta f}{\delta\Sigma}$ est constant à r' fixé :

$$\mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{viscosité}) = r'\frac{\delta f}{\delta\Sigma}(r') \cdot \Sigma(r') \quad \text{avec } \Sigma(r') = 2\pi r'\Delta z.$$

D'où : $\mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{viscosité}) = 2\pi r'^2 \eta r' \frac{d}{dr'}\left(\frac{v}{r'}\right)\Delta z.$

La conservation du moment cinétique se traduit alors par :

$$\mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{viscosité}, r) = \mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{viscosité}, r + dr).$$

Soit encore par $\mathcal{M}_\Delta^{ext}(\text{viscosité}, r) = \text{cste}$, d'où :

$$\boxed{r^3\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) = \text{cste}} \quad \left(\text{ou } \frac{d}{dr}\left[r^3\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right)\right] = 0\right).$$

Intégrons cette équation. Nous obtenons :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{b}{r^3} \Rightarrow \frac{v}{r} = -\frac{b}{2r^2} + a \Rightarrow v = -\frac{b}{2r} + ar.$$

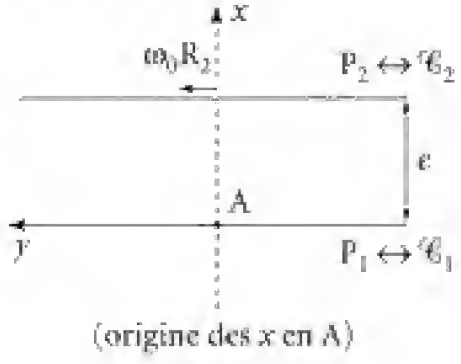
Copyrighted material

Posons : $a = A$ et $B = -\frac{b}{2} \Rightarrow$ $\boxed{v(r) = Ar + \frac{B}{r}}$

On retrouve bien la solution proposée au **1. d.**

3. a. On se place ici dans le cas où $e = R_2 - R_1 \ll R_1$; on peut alors adopter la modélisation « plane » envisagée au **1. c.** avec, puisque $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = \omega_0$:

$$\vec{v}(x) = \omega_0 \frac{R_2}{e}(r - R_1)\vec{u_y} = \omega_0 \frac{R_2}{e} x \vec{u_y}.$$



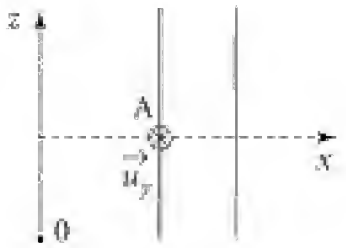
La force visqueuse par unité de surface qui s'applique sur la « plaque P_1 » (cylindre $\mathscr{C}_1$) est classiquement (géométrie cartésienne) :

$$\frac{\delta\vec{F}_1}{\delta\Sigma_1} = \eta \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=0} \vec{u_y}.$$

Elle a tendance à mettre la plaque P_1 en mouvement dans le sens de l'écoulement.

Revenant au cylindre, on écrira $(\vec{u_y} \to \vec{u_\theta})$:

$$\delta\vec{F}_1 = \eta \frac{\omega_0 R_1}{e} \delta\Sigma_1 \vec{u_\theta}.$$



Cette force développe, par rapport à l'axe Oz, un couple élémentaire $\delta\vec{\Gamma} = \delta\Gamma\vec{u_z}$ avec : $\delta\Gamma = \delta F_1 \cdot R_1 = \eta \frac{\omega_0 R_1^2}{e} \delta\Sigma_1$.

Soit au total en intégrant sur tout le cylindre : $\vec{\Gamma} = \eta \frac{\omega_0 R_1^2}{e} 2\pi R_1 h \vec{u_z}$.

$\mathscr{C}_1$ restant au repos, l'opérateur doit exercer le couple opposé, soit :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{op} = -\eta \frac{\omega_0 R_1^3 h}{e} \vec{u_z}}$$

Commentaires

Le cylindre extérieur est soumis au couple opposé $-\vec{\Gamma}$ (ce couple aurait pour effet, s'il était seul, de diminuer la vitesse de rotation ω_2).

- Un tel dispositif peut être utilisé pour réaliser des mesures de coefficients de viscosité des liquides (viscosimètre de Couette pour des fluides newtoniens).
- Le régime d'écoulement étudié ici suppose que l'on reste dans le cadre des régimes laminaires (pour une géométrie donnée, il faut donc que ω_0 reste suffisamment faible. Ainsi pour des nombres de Reynolds supérieurs à une certaine valeur critique, le régime laminaire devient instable → turbulence).

3. b. Le moment des forces visqueuses s'exerçant sur le cylindre $\mathscr{C}_1$ est donné par :

$$\Gamma_1 = \mathcal{M}_\Delta^{(ext)}(\text{viscosité}, r \to R_1) \text{ (cf. 2. b.)}.$$

Copyrighted material

D'où : $\Gamma_1 = 2\pi R_1^3 \eta \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right)\right]_{r=R_1} \cdot h$ (on fait $\Delta z = h$).

Or : $v = Ar + \frac{B}{r}$ et $\frac{v}{r} = A + \frac{B}{r^2}$.

Soit : $\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right)\right]_{r=R_1} = -\frac{2B}{R_1^3}$.

Il vient alors : $\Gamma_1 = 2\pi r_1^3 \eta h\left(-\frac{2B}{R_1^3}\right) \Rightarrow \Gamma_1 = -4\pi\eta h B$.

On a maintenant : $B = \frac{(0-\omega_0)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = -\omega_0 \frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

Finalement : $\Gamma_1 = 4\pi\eta h\omega_0 \frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

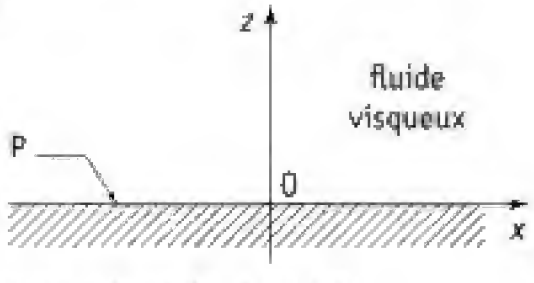
Pour que $\mathcal{C}_1$ reste immobile, il faudra alors lui appliquer le couple Γ_{op} tel que :

$$\Gamma_{op} = -\Gamma_1 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\Gamma_{op}} = -4\pi\eta h\omega_0 \frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\vec{u}_z}$$

Il est ainsi possible de mesurer le coefficient de viscosité dynamique η en mesurant Γ_{op} connaissant la géométrie (h, R_1, R_2) et la vitesse angulaire imposée au deuxième cylindre.

306 Oscillations d'une plaque dans un fluide visqueux

Une plaque P est animée dans son plan d'un mouvement oscillatoire sinusoïdal de pulsation ω. Elle est surmontée d'un fluide visqueux (coefficient de viscosité η) supposé incompressible (masse volumique ρ).



On limite notre étude à un voisinage du point O, centre de la plaque (on s'intéresse au mouvement du fluide suffisamment loin des extrémités de la plaque).

On suppose que le champ des vitesses ne dépend que des variables z et t et que le champ des pressions ne dépend pas de x. Les effets de la pesanteur seront négligés.

1. Montrer que l'on peut se ramener à un problème à une dimension avec un écoulement associé au champ des vitesses : $\vec{v} = v(z, t)\vec{u}_x$.

2. a. Établir l'équation différentielle en $v(z, t)$. Quelle en est la nature ?

b. Les vibrations de la plaque se transmettent au liquide avec une distance caractéristique δ fonction des paramètres du problème ρ, ω et η. On suppose :

Copyrighted material

$\delta = A \cdot \rho^{\alpha}\omega^{\beta}\eta^{\gamma}$ (A constante sans dimension de l'ordre de l'unité).

Donner les valeurs des coefficients α, β, γ.

c. Déterminer, en régime sinusoïdal établi, la solution physique en $v(z, t)$. Commenter.

On posera $\delta = \sqrt{\dfrac{2\eta}{\omega\rho}}$.

A.N. : calculer δ pour une fréquence f_0 de 500 Hz, avec :

	η (kg · m^{-1} · s^{-1})	ρ (kg · m^{-3})
eau	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$	10^3
glycérine	2,33	$1{,}26 \cdot 10^3$

3. En déduire la puissance moyenne (par unité de surface) que doit fournir l'opérateur pour entretenir le mouvement de la plaque.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Écoulement incompressible.
- Densité volumique de forces visqueuses pour un écoulement de la forme $\vec{v} = v(z, t)\vec{u_x}$.
- Analyse aux dimensions – Équation de la diffusion.

Outil mathématique

- Utilisation de la notation complexe.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On se ramène à un problème unidimensionnel (z) avec une modélisation infinie selon z (ce qui sera justifié par la faible valeur de la longueur caractéristique δ sur laquelle s'effectue la diffusion visqueuse).

2. a. La pression ne dépend pas de x : la composante selon Ox des forces volumiques se réduit à celle de viscosité.

b. On fera une analyse aux dimensions.

c. On cherchera une solution sinusoïdale de même pulsion ω que celle associée aux vibrations de la planche (régime sinusoïdal forcé) ; on pourra utiliser la notation complexe.

3. Solution

1. On étudie le phénomène de diffusion au voisinage du centre de la plaque (effets de bord négligés). On pourra donc assimiler la plaque à un plan infini, et ne pas prendre en compte les limites selon la direction $x'x$, pas plus que celles selon $y'y$. Par ailleurs, on suppose que la diffusion s'effectuant sur une longueur caractéristique δ selon Oz, cette longueur est suffisamment faible par rapport aux autres dimensions.

Copyrighted material

La modélisation infinie du système implique alors que les grandeurs définissant le système ne dépendent que de z et de t. Le champ des vitesses s'écrit ainsi :

$$\vec{v} = v_x(z, t)\vec{u}_x + v_y(z, t)\vec{u}_y + v_z(z, t)\vec{u}_z.$$

Or tout plan parallèle à xOz devient plan de symétrie, et en un point M d'un tel plan, on doit avoir $\vec{v}(M) = \text{Sym}[\vec{v}(M)]$ d'où : $v_y(M) = -v_y(M) \Rightarrow v_y = 0$.

D'autre part, l'incompressibilité de l'écoulement se traduit par la relation :

$$\text{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

La vitesse v_z est une constante par rapport à la variable z. Or cette vitesse doit être nulle sur le plan $z = 0$. On a donc $v_z = 0$. Il reste :

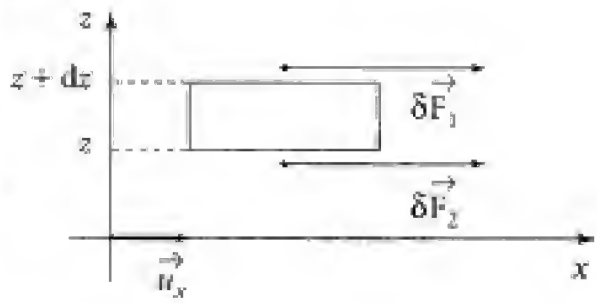
$$\boxed{\vec{v} = v_x(z, t)\vec{u}_x = v(z, t)\vec{u}_x}$$

La condition aux limites sur le plan oscillant donne : $v(0, t) = v_0 \cos \omega t$.

2. a. Les couches fluides glissent les unes sur les autres.

Considérons la tranche de fluide de surface $\delta\Sigma$, parallèlement au plan xOy, et d'épaisseur dz. Elle est soumise sur sa face supérieure à la force élémentaire :

$$\delta\vec{F}_1 = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z+dz}\delta\Sigma\vec{u}_x.$$



De même, sur sa face inférieure : $\delta\vec{F}_2 = -\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_z \delta\Sigma\vec{u}_x$.

Soit au total :

$$\delta\vec{F} = \delta\vec{F}_1 + \delta\vec{F}_2 = \eta\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z+dz} - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_z\right]\delta\Sigma\vec{u}_x.$$

Soit encore à la limite où dz tend vers zéro :

$$\delta\vec{F} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\delta\Sigma\, dz\vec{u}_x.$$

Il lui correspond une densité volumique de forces visqueuses égale à :

$$\boxed{\vec{\varphi} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\vec{u}_x} \quad (1)$$

Commentaire

Dans le cas plus général, on aurait obtenu, pour un écoulement incompressible :

$$\vec{\varphi} = \eta\Delta\vec{v}.$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors (pesanteur négligée) :

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{\varphi} \quad (2)$$

Copyrighted material

Or $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial t}\vec{u}_x$ ($\vec{v}$ parallèle à $\vec{u}_x$ et indépendant de x, d'où :

$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = v\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$).

Les grandeurs ne dépendant que de z et t, il n'y a pas de composante du gradient de pression selon $\vec{u}_x$ (c'est le mouvement de la plaque qui induit celui du fluide visqueux) :

soit : $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$. L'équation (2), en projection sur Ox, s'écrit alors :

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} \quad (3)$$

Il s'agit d'une équation du type diffusion.

Commentaires

On note $\nu' = \frac{\eta}{\rho}$ coefficient de viscosité cinématique, ce qui donne :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu'\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (4)$$

• Cette équation est analogue à celle de la diffusion thermique dans un solide : $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

où $D = \frac{k}{\rho C_m}$

k : conductivité thermique ; ρC_m : capacité thermique par unité de volume…

2. b. On suppose que le mouvement oscillatoire de la plaque diffuse, selon Oz, sur une distance caractéristique δ (ou quelques δ ; $\delta \equiv$ longueur caractéristique de diffusion) liée aux paramètres physiques ρ, ω, η dont dépend le problème selon :

$$\delta = A \cdot \rho^{\alpha}\omega^{\beta}\eta^{\gamma} \quad (A \text{ coefficient sans dimension}).$$

Une simple analyse aux dimensions donne :

$$[\delta] = [\rho]^{\alpha}[\omega]^{\beta}[\eta]^{\gamma} \quad (7)$$

Or $[\delta] = L$ (longueur en mètre) ; $[\omega] = T^{-1}$ ($T \equiv$ temps en seconde) ;

$[\rho] = M \cdot L^{-3}$ ($M \equiv$ masse en kg) ;

$[\eta] = Pa \cdot s = \left[\frac{F}{S}\right] \cdot T = \frac{[mg]}{[S]} \cdot T = ML^{-1}T^{-1}$.

Soit avec (7) : $L = M^{\alpha}L^{-3\alpha}T^{-\beta}M^{\gamma}L^{-\gamma}T^{-\gamma}$

d'où : $1 = -3\alpha - \gamma$; $0 = \alpha + \gamma$; $0 = -\beta - \gamma$

et $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\gamma = +\frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$ d'où : $\delta = A\sqrt{\frac{\eta}{\rho\omega}}$

ce qui est cohérent avec (5) et (6). On verra par la suite que l'on peut prendre $A = \sqrt{2}$ …

2. c. Sachant que $v(0, t) = v_0 \cos \omega t$, on va chercher une solution, en notation complexe, sous la forme : $\underline{v}(z, t) = \underline{f}(z)e^{i\omega t}$ avec $\underline{f}(0) = v_0$.

Copyrighted material

$\underline{v}(z, t)$ doit être solution de l'équation de diffusion, soit :

$$i\omega \underline{f} = \frac{\eta}{\rho}\frac{d^2\underline{f}}{dz^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\underline{f}}{dz^2} = i\omega\frac{\rho}{\eta}\underline{f}.$$

Posons $i\omega\dfrac{\rho}{\eta} = \left[(1+i)\sqrt{\dfrac{\omega\rho}{2\eta}}\right]^2 = \left[\dfrac{1+i}{\delta}\right]^2$; $((1+i)^2 = 2i$ et $\delta = \sqrt{\dfrac{2\eta}{\omega\rho}})$.

D'où : $\dfrac{d^2\underline{f}}{dz^2} = \dfrac{(1+i)^2}{\delta^2}\underline{f}$, dont la solution s'écrit : $\underline{f}(z) = \underline{a}\,e^{(1+i)\frac{z}{\delta}} + \underline{b}\,e^{-(1+i)\frac{z}{\delta}}$.

Le terme en $e^{\frac{z}{\delta}}e^{\frac{iz}{\delta}}$ doit être rejeté car il correspondrait à une vitesse augmentant « indéfiniment » lorsqu'on s'éloigne de la plaque. Il reste :

$$\underline{v}(z, t) = \underline{b}\,e^{-\frac{z}{\delta}}e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \quad \text{avec } \underline{b} = v_0.$$

Soit en revenant à la notation réelle : $\boxed{v(z, t) = v_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \dfrac{z}{\delta}\right)}$ (4)

Commentaire

Il s'agit d'une « onde transversale » (elle se « propage » selon Oz, la vitesse d'oscillation du fluide étant selon Ox) qui s'amortit rapidement quand on s'éloigne du plan (selon une loi en $e^{-\frac{z}{\delta}}$).

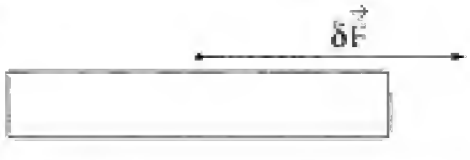
A.N. : (fréquence $f_0 = 500$ Hz ; $\omega = 2\pi f_0$)

– pour l'eau, $\delta = \sqrt{\dfrac{2 \times 1{,}1 \cdot 10^{-3}}{2\pi \times 5 \cdot 10^2 \times 10^3}} \Rightarrow \boldsymbol{\delta = 2{,}6 \cdot 10^{-5}}$ **m** ;

– pour la glycérine, $\delta = \sqrt{\dfrac{2 \times 2{,}33}{2\pi \times 5 \cdot 10^2 \times 1{,}26 \cdot 10^3}} \Rightarrow \boldsymbol{\delta = 1{,}1}$ **mm.**

L'effet (oscillations de la plaque) se fait donc sentir sur des distances d'autant plus grandes que la viscosité est importante (la diffusion visqueuse augmente avec η), que l'inertie est faible (rôle joué par le facteur ρ) et que les échelles des temps de variations (ici $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$) sont élevées (faible fréquence).

3. L'élément de plaque de surface $\delta\Sigma$ est soumis à la force visqueuse $\vec{\delta F}$ telle que :



$$\vec{\delta F} = \eta\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=0}\delta\Sigma\vec{u}_x$$

(un gradient positif selon Oz de la vitesse aurait pour effet d'entrainer la plaque dans le sens de l'axe des x).

Et d'après l'expression (4) :

$$\frac{dv}{dz} = v_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\left[-\frac{1}{\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \frac{1}{\delta}\sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right].$$

Copyrighted material

D'où : $\frac{\delta\vec{F}}{\delta\Sigma} = -\frac{\eta v_0}{\delta}[\cos\omega t - \sin\omega t]\vec{u}_x$.

Il apparait un déphasage entre cette force et la vitesse de déplacement de la plaque.

Cette force développe une puissance $\delta\mathcal{P}$ telle que $(\delta\mathcal{P} = \delta\vec{F} \cdot v(0, t))$:

$$\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\Sigma} = -\frac{\eta v_0}{\delta}[\cos\omega t - \sin\omega t]v_0\cos\omega t.$$

Soit en moyenne sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\langle\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\Sigma}\rangle = -\frac{\eta v_0^2}{\delta}\{\langle\cos^2\omega t\rangle - \langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle\}.$$

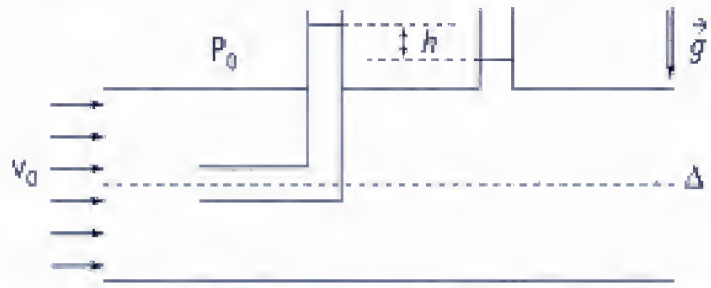
Or $\langle\cos^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\langle\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\Sigma}\rangle = -\frac{\eta v_0^2}{2\delta} = -v_0^2\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{8}}}$$

L'opérateur devra développer une puissance opposée, et donc positive comme il se doit.

307 Mesure de la vitesse d'écoulement d'un fluide



Un fluide homogène et incompressible circule dans une canalisation horizontale à la vitesse constante v_0.

Pour mesurer cette vitesse, on place dans la conduite deux tubes, l'un coudé et l'autre droit. On observe une dénivellation h.

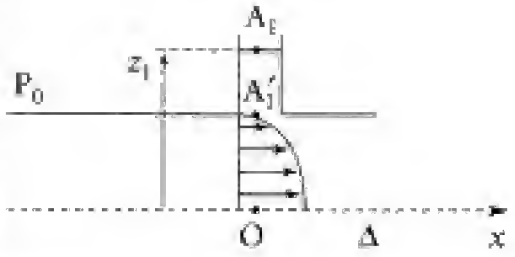
En déduire v_0 en fonction de h et de g.

Solution

La pression en bas du tube coudé est supérieure (point d'arrêt) à celle régnant sur l'axe de la canalisation, c'est-à-dire à la pression au point de même altitude situé sous le tube droit. Le niveau du fluide sera donc plus élevé dans le tube coudé.

Copyrighted material

• Tube droit : notons P^* la pression sur l'axe central Δ de la canalisation, l'origine de l'axe vertical Oz étant prise sur Δ. On a affaire à un écoulement parallèle dans la canalisation, avec une vitesse égale à v_0 sur l'axe et pratiquement nulle à l'entrée inférieure du tube droit (de section suffisamment faible).



Il en résulte que l'on peut appliquer la loi d'hydrostatique perpendiculairement à cet écoulement. En effet, on a : $\rho\vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho gz) + \varphi_{\text{viscosité}}\vec{u}_x$

$$\rho\vec{a}\cdot\vec{u_\perp} = 0 = -\vec{u_\perp}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho gz) + 0$$

d'où $P + \rho gz = \text{cste}$ à x fixé dans la canalisation.

Soit $P(0) + 0 = P(A_1') + \rho g z_{A_1'} \Rightarrow P^* = P(A_1') + \rho g z_{A_1'}$ (1)

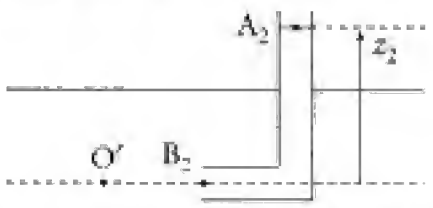
et en admettant une répartition hydrostatique dans le tube vertical (fluide au repos) :

$$P(A_1') = P_0 + \rho g(z_{A_2} - z_{A_1'}) \quad (2)$$

(1) et (2) donnent alors : $P^* = P_0 + \rho g z_{A_1} = P_0 + \rho g z_1$.

• Deuxième tube : on remarque que B_2 est un point d'arrêt (fluide de vitesse nulle).

On a en appliquant l'équation de Bernoulli sur la ligne $O'B_2$ (viscosité négligée...) :



$$P(O') = P^*$$

$$P^* + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_{B_2} + 0.$$

D'autre part, la loi de l'hydrostatique, appliquée au fluide au repos dans le tube coudé, nous donne : $P_{B_2} = P_0 + \rho g z_2$.

D'où : $P^* + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_0 + \rho g z_2$.

• En définitive, on doit observer une dénivellation $h = z_2 - z_1$ telle que :

$$h = \left(\frac{P^* - P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2}{\rho g}\right) - \left(\frac{P^* - P_0}{\rho g}\right).$$

Finalement

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$$

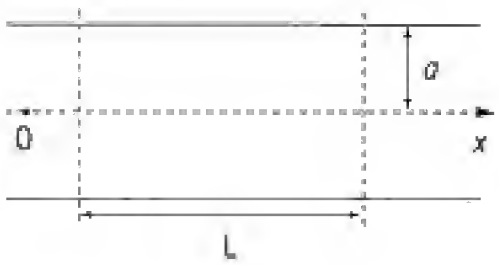
Commentaire

Le dispositif simple envisagé dans cet exercice est à rapprocher du tube de Pitot.

Copyrighted material

308 Influence de la viscosité sur les oscillations d'un fluide

1. Un fluide visqueux (coefficient de viscosité dynamique η) incompressible (ρ = cste) s'écoule dans une conduite cylindrique de rayon a. Le régime est stationnaire et l'écoulement laminaire. On ne tiendra pas compte des forces de pesanteur dans cette question.



On note v la vitesse moyenne dans une section de la conduite et $-\mathcal{P}_d$ la puissance développée par les forces visqueuses pour une longueur L de conduite ($\mathcal{P}_d > 0$).

a. La répartition des vitesses dans la canalisation est donnée par la relation :

$$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

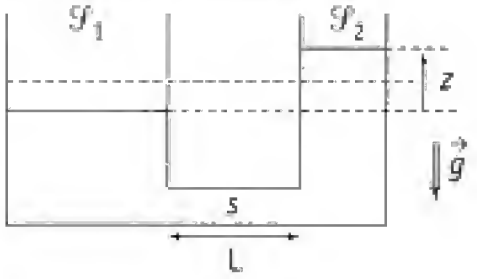
On admet que la force surfacique exercée par une couche de fluide située en r^+ sur la couche de fluide en r^- est :

$$\frac{\delta\vec{F}}{\delta\Sigma} = \eta\frac{\partial v}{\partial r}\vec{u}_x.$$

Commenter.

b. Montrer que l'on a $\mathcal{P}_d = 8\pi L\eta V^2$ (V = vitesse moyenne dans le tube) (on ne cherchera pas à déterminer le profil des vitesses $v(r)$). Commenter.

2. Deux récipients cylindriques de section $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont reliés par un tube cylindrique de section s. On fait les hypothèses suivantes :



- H_1 : $s \ll \mathcal{S}_1$, $s \ll \mathcal{S}_2$ et la longueur L du tube est suffisamment importante ;
- H_2 : en outre on considère que les effets dus à la viscosité sont essentiellement concentrés dans le tube, et qu'ils développent une puissance totale $-\mathcal{P}_d$ ($\mathcal{P}_d$ donnée par l'expression du **1. a.**) ;
- H_3 : on admettra enfin que la répartition des vitesses dans le tube est donnée par la relation $v(r) = v_0(t)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$, a rayon du tube.

L'instant initial correspond à des vitesses nulles et à une dénivellation h_0 entre les niveaux des deux récipients. Le fluide est incompressible et de masse volumique ρ_0.

Établir l'équation en $Z(t)$ par application du théorème de l'énergie cinétique. En déduire l'évolution de $Z(t)$.

On posera : $\alpha = \frac{3\eta}{\rho_0 a^2}$ et $\omega_0^2 = \frac{3g}{4L}s\left(\frac{1}{\mathcal{S}_1} + \frac{1}{\mathcal{S}_2}\right)$ avec $(\alpha < \omega_0)$.

Copyrighted material

Solution

1. a. La loi $v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ définit un profil parabolique du champ des vitesses ; la vitesse devant s'annuler sur les parois solides, on a bien $v(a) = 0$.

Cette loi peut être établie en considérant un cylindre de fluide, d'axe Ox, de rayon $r < a$ et de longueur L. On a :

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 + F'_{\text{viscosité}} = 0$$

or $F'_{\text{viscosité}} = \eta\frac{dv}{dt} \cdot 2\pi rL \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta L}r$

soit par intégration, et en tenant compte de ce que $v(a) = 0$:

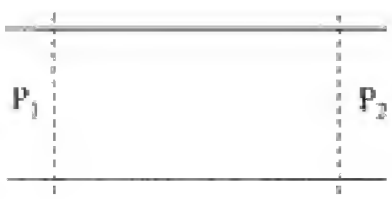
$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

d'où : $v_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}a^2$.

On en déduit que $V = \langle v \rangle = \frac{1}{2}v_0 = \frac{P_1 - P_2}{8\pi\eta L}s$

et $D_v = Vs$ (où $s = \pi a^2$) : $D_v = \frac{s^2}{8\pi\eta}\frac{\Delta P}{L}$.

1. b. Notons P_1 et P_2 les pressions à « l'entrée » et à la « sortie » du tube et plaçons-nous dans les conditions de stationnarité.



Dans ce cas, la puissance développée par les efforts des forces de pression associés à P_1 et P_2 doit compenser la puissance $-\mathcal{P}_d$ des forces visqueuses.

On doit donc avoir :

$$(P_1 - P_2)Vs = \mathcal{P}_d \quad (V \equiv \text{vitesse moyenne dans une section du tube}).$$

Pour calculer la différence $P_1 - P_2$, on écrira également que la résultante des forces de pression équilibre la résultante des forces visqueuses agissant sur le cylindre de fluide de rayon a et de longueur L, soit :

$$(P_1 - P_2)s + F_{\text{viscosité}} = 0$$

avec $F_{\text{viscosité}} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=a} 2\pi aL \quad (\Sigma = 2\pi aL)$

or $v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = 2V\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ et :

$$F_{\text{viscosité}} = 2\pi aL\eta 2V\left(-\frac{2a}{a^2}\right) = -8\pi L\eta V.$$

Soit $(P_1 - P_2)s = 8\pi L\eta V$

et $$\boxed{\mathcal{P}_d = 8\pi L\eta V^2}$$

Copyrighted material

Commentaires

• On peut constater que le débit volumique $D_v = sV = \frac{s^2}{8\pi\eta}\frac{\Delta P}{L}$ est d'autant plus faible que la viscosité est importante et que le gradient de pression $\frac{\Delta P}{L}$ est faible. On peut définir une **résistance hydraulique**, par analogie avec l'électricité selon :

$$V_2 - V_1 = Ri \Rightarrow P_1 - P_2 = R_h D_v.$$

Soit ici :

$$\boxed{R_h = 8\pi\eta\frac{L}{s^2}}$$

• On peut remarquer également que R_h varie en $\frac{1}{s^2}$ et pas en $\frac{1}{s}$ (influence des conditions aux limites : $v(a) = 0 \ldots$) ; l'effet de résistance à l'écoulement est donc inversement proportionnel à la quatrième puissance du diamètre de la conduite, ce qui justifie qu'on puisse le négliger dans les récipients ($\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2 \gg s \ldots$).

• Dans toute l'étude précédente, on a « oublié » le rôle de la pesanteur dans le tube. Elle ajoute simplement un gradient de pression vertical ou, si l'on veut, il suffit de remplacer P par $P^* = P + \rho_0 gz \ldots$

2. On peut associer au système une énergie mécanique, somme de son énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle de pesanteur E_p.

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = -\mathcal{P}_d \quad (1) \quad (\mathcal{P}_d \text{ défini positif}).$$

■ **Évaluation de E_c :**

Les hypothèses $\mathcal{S}_1 \gg s$, $\mathcal{S}_2 \gg s$ permettent de considérer que les vitesses du fluide dans les récipients sont presque partout négligeables devant celles dans le tube.

L'hypothèse L « suffisamment grand » implique alors que l'on puisse réduire l'énergie cinétique à celle du fluide contenu, à l'instant t, dans le tube.

Or dans le tube, la vitesse du fluide ne dépend pas de la coordonnée x comptée le long du tube (fluide incompressible), d'où :

$$v(x, r, t) = v_0(t)\cdot\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad \text{(d'après l'énoncé)}.$$

Soit une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^a \rho_0 v^2(r) 2\pi L r dr = \frac{1}{2}\pi L a^2 \rho_0 v_0^2 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 d\left(\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2}\pi L a^2 \rho_0 v_0^2 \left[\frac{-(1-x)^3}{3}\right]_0^1 \Rightarrow E_c = \frac{1}{6}\pi\rho_0 L a^2 v_0^2.$$

Copyrighted material

La vitesse moyenne V sur une section est définie par :

$$V \cdot \pi a^2 = \int_0^a v(r) \cdot \delta\Sigma = \int_0^a v(r) 2\pi r dr = \pi a^2 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) d\left(\frac{r^2}{a^2}\right)$$

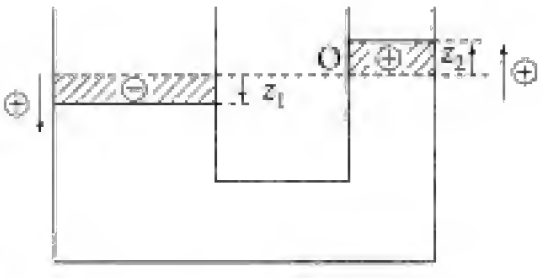
$$V \cdot \pi a^2 = \pi a^2 \left[\frac{-(1-x)^2}{2}\right]_0^1 \Rightarrow V = \frac{1}{2} v_0.$$

D'où une énergie cinétique valant : $\boxed{E_c = \frac{2}{3}\pi\rho_0 V^2 L a^2}$ $\left(E_c = \frac{2}{3}\rho_0 V^2 \mathcal{V}_{tube}\right)$.

■ **Évaluation de E_p :**

Prenons l'origine pour la position d'équilibre (soit pour $Z = 0$).

On a donc (*cf.* schéma ci-contre) $Z = z_1 + z_2$ avec $z_2 \mathcal{S}_2 = z_1 \mathcal{S}_1$ (fluide incompressible).



D'autre part, dans le cas de figure représenté ici, on a gagné l'énergie potentielle $E_{p_2} > 0$ et perdu l'énergie $E_{p_1} < 0$, avec :

$$E_{p_2} = m_2 g \cdot \left(\frac{1}{2} z_2\right) \quad \text{(centre de masse en } \frac{z_2}{2}\text{)}$$

soit $$E_{p_2} = (\rho_0 \mathcal{S}_2 z_2 g) \cdot \left(\frac{1}{2} z_2\right) = \frac{1}{2}\rho_0 g \mathcal{S}_2 z_2^2$$

et $$E_{p_1} = -mg \cdot \left(\frac{1}{2} z_1\right) = -\frac{1}{2}\rho_0 g \mathcal{S}_1 z_1^2.$$

Au total $$E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = \frac{1}{2}\rho_0 g (\mathcal{S}_2 z_2^2 + \mathcal{S}_1 z_1^2).$$

Exprimons cette quantité en fonction de Z :

$$Z = z_1\left(1 + \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}\right) \quad \text{et} \quad E_p = \frac{1}{2}\rho_0 g z_1^2 \left(\mathcal{S}_1 + \frac{\mathcal{S}_1^2}{\mathcal{S}_2}\right)$$

soit $$E_p = \frac{1}{2}\rho_0 g \mathcal{S}_1 \left(1 + \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}\right) \cdot \frac{Z^2}{\left(1 + \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}\right)^2}$$

d'où $$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\rho_0 g \frac{\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2} Z^2}$$

■ Il reste à relier Z à V. Le fluide étant incompressible, on doit donc avoir :

$$sV = \mathcal{S}_1 \dot{z}_1 = \mathcal{S}_2 \dot{z}_2 \text{ d'où : } sV = \frac{\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2} \dot{Z}.$$

■ Il en résulte une énergie mécanique E_m telle que :

$$E_m = \frac{2}{3}\rho_0 L \frac{1}{s}\left(\frac{\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2}\right)^2 \dot{Z}^2 + \frac{1}{2}\rho_0 g \frac{\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2} Z^2.$$

Copyrighted material

(1) devient alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{3}\rho_0 L\frac{1}{s}\left(\frac{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2}\right)^2\dot{Z}^2+\frac{1}{2}\rho_0 g\frac{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2}Z^2\right]=-8\eta\frac{\pi L}{s^2}\left(\frac{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2}\right)^2\dot{Z}^2$$

et après simplification par $\dot{Z}$:

$$\frac{4}{3}\rho_0\frac{L}{s}\left(\frac{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2}\right)^2\ddot{Z}+\rho_0 g\frac{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2}Z+8\eta\frac{\pi L}{s^2}\left(\frac{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2}\right)^2\dot{Z}=0.$$

Soit encore :

$$\ddot{Z}+\frac{3g}{4L}\cdot s\left(\frac{1}{\mathcal{S}_1}+\frac{1}{\mathcal{S}_2}\right)Z+6\frac{\eta\pi}{\rho_0 s}\dot{Z}=0.$$

Équation de la forme :

$$\ddot{Z}+2\alpha\dot{Z}+\omega_0^2 Z=0 \quad (2) \text{ avec} \quad \left|\begin{array}{l}\omega_0^2=\dfrac{3g}{4L}\cdot s\left(\dfrac{1}{\mathcal{S}_1}+\dfrac{1}{\mathcal{S}_2}\right)\\ \alpha=\dfrac{3\eta}{\rho_0 a^2}\end{array}\right.$$

Commentaire

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique (pulsation propre ω_0) amorti (coefficient α). Le système est analogue à un circuit RLC (la puissance dissipée par effet Joule Ri^2 correspondant à $\mathcal{P}_d$, les effets d'inertie associés à E_c étant représentés par l'induction – énergie $\frac{1}{2}Li^2$, – l'énergie potentielle étant schématisée par celle emmagasinée dans deux condensateurs en série C_1 et C_2 de capacité $\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ ...).

■ Pour une dissipation visqueuse suffisamment faible, (2) admettra une solution pseudo-périodique de la forme : $Z(t)=e^{-\alpha t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$ où $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$.

Or $\dot{Z}(0)=0$ et $Z(0)=h_0$, d'où : $-\alpha A+\omega B=0$ et $A=h_0$.

Finalement $$h(t)=h_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Copyrighted material

Copyrighted material

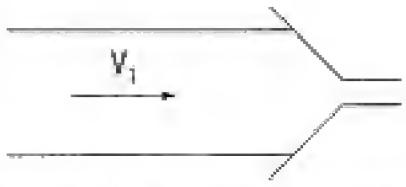
Chapitre

4

Bilans dynamique et thermodynamique

401 Entonnoir en bout de tube

Un opérateur applique un entonnoir de section de sortie s à l'extrémité d'un tube de section S. Le tube est parcouru par un courant d'eau (pression P, vitesse V_1, masse volumique ρ_0 = cste). La pression ambiante est P_0.



Quelle force minimale l'opérateur doit-il exercer pour maintenir l'entonnoir en place ?

On pourra faire des hypothèses simplificatrices que l'on précisera, et on ne tiendra pas compte de la pesanteur.

1. Ce qu'il faut savoir

- Bilan de quantité de mouvement.
- Théorème de Bernoulli.

2. Ce qu'il faut comprendre

On s'intéressera à un volume particulaire délimité à l'instant t, par la section de sortie de l'entonnoir et une section du tube en amont. On lui appliquera le théorème de la résultante cinétique en projection sur l'axe Ox du tube.

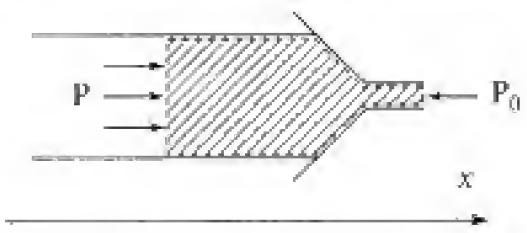
Pour déterminer la force cherchée, exercée par l'opérateur sur l'entonnoir, il suffira de traduire que ce dernier est immobile (on fera appel au principe de l'action et de la réaction concernant les effets eau-entonnoir).

3. Solution

On va se placer en régime stationnaire.

L'eau sort de l'entonnoir avec une vitesse $\vec{V}_2$, le jet parallèle correspondant étant à la pression ambiante P_0.

■ Faisons alors un bilan de quantité de mouvement sur le système particulaire constitué de l'eau contenue dans le volume $\mathcal{V}_c$ hachuré (*cf.* schéma ci-dessous) :



En projection sur l'axe du système $x'x$, nous obtenons :

$$\frac{DP_x}{Dt} = F_x^{eau}.$$

Copyrighted material

Les forces selon $x'x$ comprennent :

– les forces de pression $PS\vec{u}_x$ sur la surface en amont,

– les forces de pression $-P_0 s\vec{u}_x$ sur la surface en aval,

– la force $\vec{F}'_x$ exercée par l'entonnoir sur l'eau.

D'où : $\dfrac{DP_x}{Dt} = PS - P_0 s + F'_x$.

Pour calculer $\dfrac{DP_x}{Dt}$ considérons le système particulaire constitué, à l'instant t, du fluide contenu dans $\mathcal{V}_c$ et de la masse de fluide δm y entrant entre t et $t + dt$ avec une vitesse $\vec{V}_1$ supposée uniforme.

Entre ces instants, une même masse δm (régime stationnaire) sort de $\mathcal{V}_c$ avec une vitesse $\vec{V}_2$ prise uniforme.

Soit $\vec{P}(t)$ la quantité de mouvement de ce système à t et $\vec{P}^*(t)$ celle de $\mathcal{V}_c$. Il vient :

$\vec{P}(t) = \vec{P}^*(t) + \delta m\vec{V}_1$

$\vec{P}(t + dt) = \vec{P}^*(t + dt) + \delta m\vec{V}_2 = \vec{P}^*(t) + \delta m\vec{V}_2$ (régime stationnaire)

d'où $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \lim\limits_{dt \to 0} \dfrac{\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t)}{dt} = \dfrac{\delta m}{dt}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$.

$\dfrac{\delta m}{dt}$ désigne le débit massique D_m (entrant et sortant) de $\mathcal{V}_c$.

Soit : $$\frac{d\vec{P}}{dt} = D_m \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1).$$

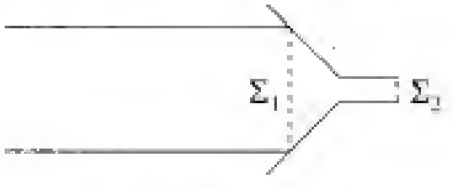
et $$D_m(V_2 - V_1) = PS - P_0 s + F'_x \quad (1)$$

■ Écrivons maintenant que l'entonnoir reste en équilibre *juste* appuyé sur le tube ; à la limite, ce dernier n'exerce aucune force sur lui, d'où en désignant par F_m la force minimale que doit exercer l'opérateur ($\vec{F}_{op} = -F_m\vec{u}_x$) :

$$0 = -F_m + (-F'_x) + F_0 \quad (2)$$

où : $-F'_x$: principe de l'action et de la réaction,

F_0 : résultante selon x des forces de pression dues à P_0 s'exerçant sur la surface de l'entonnoir en relation avec l'atmosphère extérieure.



Or la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface fermée est nulle pour une pression uniforme (*cf.* cours) d'où :

$$F_0 + P_0\Sigma_1 - P_0\Sigma_2 = 0 \Rightarrow F_0 = P_0 s - P_0 S \quad (3)$$

Copyrighted material

Soit en reportant les expressions de F_0 et de F'_x, tirées de (3) et (1), dans (2), il vient :

$-F_m = -P_0 s + P_0 S - PS + P_0 s + D_m(V_2 - V_1)$.

D'où : $F_m = -D_m(V_2 - V_1) + (P - P_0)S$.

Et en remplaçant V_2 par $\dfrac{SV_1}{s}$ et D_m par $\rho_0 S V_1$:

$$\boxed{F_m = -\rho_0 S V_1^2\left(\frac{S}{s} - 1\right) + (P - P_0)S} \quad (F_m < 0)$$

Il reste à évaluer la différence de pression $P - P_0$. On a certainement $P - P_0 > (P - P_0)_i$, où $(P - P_0)_i$ représente la valeur cherchée dans le cas où l'on néglige toute perte de charge dans le système (viscosité négligée, variation de section de l'entonnoir très progressive, ...).

Calculons $(P - P_0)_i$. On peut alors utiliser le **théorème de Bernoulli** selon :

$$\frac{P}{\rho_0} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{V_2^2}{2} \quad \text{(pesanteur négligée)}$$

d'où $\quad (P - P_0)_i = \dfrac{1}{2}\rho_0(V_2^2 - V_1^2) = \dfrac{1}{2}\rho_0 V_1^2\left(\dfrac{S^2}{s^2} - 1\right)$.

Dès lors : $\quad F_m > \dfrac{1}{2}\rho_0 S V_1^2\left(\dfrac{S^2}{s^2} - 1\right) - \rho_0 S V_1^2\left(\dfrac{S}{s} - 1\right)$

$$F_m > \frac{1}{2}\rho_0 S V_1^2\left(\frac{S}{s} - 1\right)\left[\frac{S}{s} + 1 - 2\right]$$

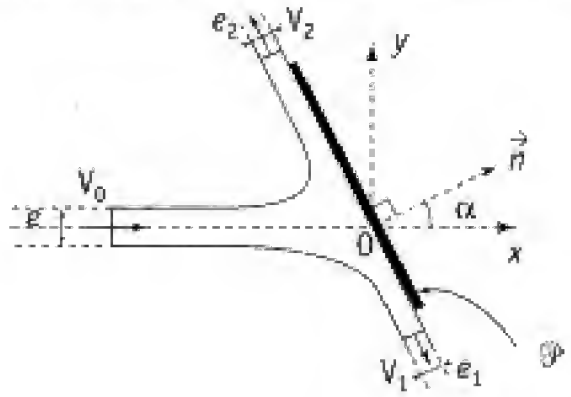
$$F_m > \frac{1}{2}\rho_0 S V_1^2\left(\frac{S}{s} - 1\right)^2.$$

Le second membre de cette inégalité est évidemment nul pour $S = s$.

402 Jet sur une plaque

Un jet a la forme d'une lame d'épaisseur e et de largeur ℓ selon Oz. La vitesse de l'eau dans le jet est $V_0\vec{u}_x$.

Arrivant sur une plaque $\mathcal{P}$ immobile (largeur L dans le plan de figure), il se divise en deux jets caractérisés par les grandeurs (e_1, V_1, ℓ) et (e_2, V_2, ℓ).



Copyrighted material

On fera les hypothèses suivantes :
- le fluide est parfait et incompressible (masse volumique ρ) ;
- les effets de la pesanteur sont négligés ;
- l'écoulement est potentiel.

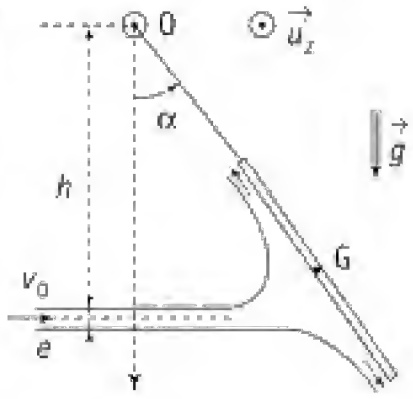
1. Déterminer les épaisseurs e_1 et e_2 des jets glissant sur la plaque $\mathcal{P}$. On exprimera e_1 et e_2 en fonction de e et de l'angle $\alpha = (\vec{u_x}, \vec{n})$.

En déduire l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par le jet sur la plaque.

2. Montrer la cohérence de ces résultats avec le théorème de la puissance cinétique.

3. La plaque de masse M peut tourner librement autour de l'axe horizontal Oz. La distance du centre de masse G de la plaque à l'axe $\Delta = Oz$ est ℓ.

La plaque est maintenue en équilibre (angle α) à l'aide du jet horizontal étudié au **1.** (débit incident $D_m = \rho e \ell v_0$, distance h à l'axe de rotation Δ : $h \gg e$). Déterminer l'expression définissant l'angle α à l'équilibre : on supposera la masse M suffisamment importante.



1. Ce qu'il faut savoir

- Bilan de masse et bilan de quantité de mouvement.
- Théorème de Bernoulli (écoulement incompressible, stationnaire et irrotationnel).
- Théorème de la puissance cinétique.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On est en présence d'un écoulement incompressible en régime stationnaire. Il est possible de décrire ses propriétés à partir de bilans de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie (via le théorème de Bernoulli qui prend ici une forme très simple, l'écoulement étant de plus potentiel).

On remarquera que la force exercée par le fluide sur la plaque est perpendiculaire à cette dernière (fluide parfait).

2. Ce bilan d'énergie cinétique ne donnera pas d'informations supplémentaires. Il suffit de montrer qu'il est compatible avec les résultats précédents.

3. On fera un bilan de moment cinétique en négligeant le moment cinétique du fluide « ruisselant » sur la plaque.

3. Solution

1. L'écoulement envisagé peut être décrit à partir de bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie.

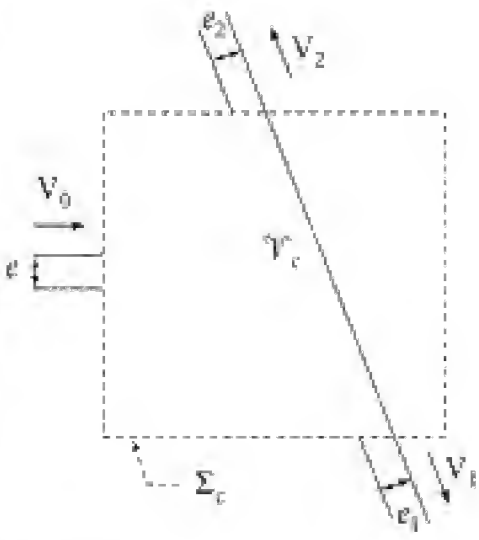
Il s'agit d'un écoulement incompressible dans le cadre d'un régime stationnaire.

Copyrighted material

■ **Le bilan de masse** se traduit alors par la conservation du débit : $D_{m_0} = D_{m_1} + D_{m_2}$
(débit entrant = débit sortant).

Soit encore : $\rho e \ell V_0 = \rho e_1 \ell V_1 + \rho e_2 \ell V_2$,

c'est-à-dire : $\boxed{eV_0 = e_1 V_1 + e_2 V_2}$ (1)



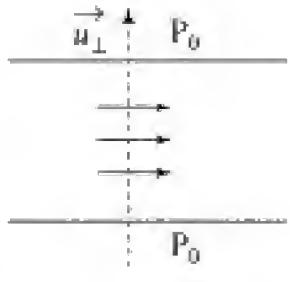
■ L'écoulement est supposé potentiel, il n'y a pas de densité volumique de forces extérieures (pesanteur négligée).

Le théorème de Bernoulli s'applique donc ici dans tout le volume fluide, et prend la forme :

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{cste}.$$

Or le jet incident et les deux jets de sortie sont constitués de lignes de courant parallèles. Il n'y a donc pas de terme d'accélération du fluide perpendiculairement aux jets. Ainsi, en l'absence de pesanteur, nous avons :

$$0 = -\vec{\nabla}P \cdot \vec{u_\perp}.$$



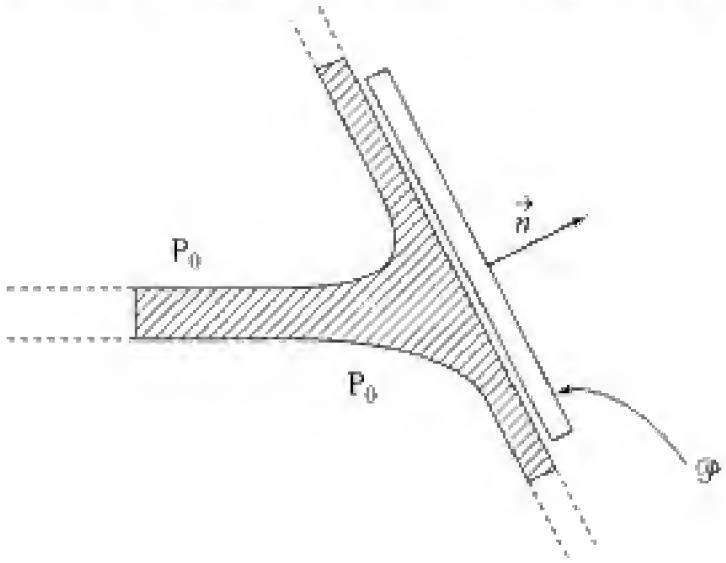
Ce qui signifie que la pression est uniforme et vaut P_0 sur toute section du jet correspondant à un écoulement parallèle.

L'équation de Bernoulli devient : $P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$

ce qui donne $V_0 = V_1 = V_2$.

Et avec (1) : $\boxed{e = e_1 + e_2}$ (2)

■ Remarquons maintenant que le fluide étant en écoulement parfait, les efforts qu'il exerce sur la plaque $\mathcal{P}$ se réduisent à ceux des forces de pression. Leur résultante $\vec{F} = F\vec{n}$ est donc portée par la normale $\vec{n}$ à la plaque. Et le fluide est soumis à la force opposée $-F\vec{n}$.



Copyrighted material

Appliquons alors le théorème de la quantité de mouvement au système fluide représenté ci-dessus (volume hachuré) :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \vec{F}_T$$

où $\vec{F}_T$ est la résultante des forces extérieures qui comprend :

– la force $-F\vec{n}$,

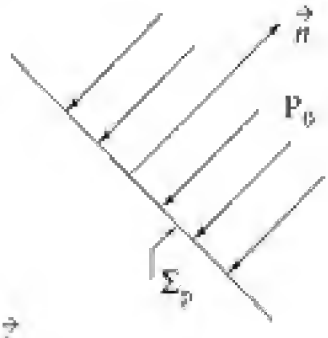
– la résultante $\vec{F}_0$ des efforts associés à la pression uniforme P_0 (ils s'exercent sur la surface Σ_c qui borde le volume considéré privé de la surface Σ_p en contact avec la plaque).

$\vec{F}_0 = \vec{F}(P_0 \to \Sigma_c) - \vec{F}(P_0 \to \Sigma_p)$

$\vec{F}_0 = \vec{F}(P_0 \to \Sigma_c) - (-P_0\Sigma_p)\vec{n}$ où $\Sigma_p = \ell L$.

Or $\vec{F}(P_0 \to \Sigma_c) = \vec{0}$, Σ_c constituant une surface fermée.

Il reste : $\vec{F}_0 = P_0 \ell L \vec{n}$.



D'où : $\frac{D\vec{p}}{Dt} = (-F + P_0 \ell L)\vec{n}$ (3)

Calculons le taux de variation de quantité de mouvement $\frac{D\vec{p}}{Dt}$.

À cet effet considérons le système particulaire constitué de l'eau contenue à l'instant t dans le volume de contrôle $\mathcal{V}_c$ hachuré sur la figure représentée plus haut et de la masse $\delta m = \rho e \ell V_0 dt$ entrant dans $\mathcal{V}_c$ entre t et $t + dt$. On a :

$\delta m = D_{m_0} dt$ où $D_{m_0} = \rho e \ell V_0$

et $\vec{p}(t) = \vec{p}^*(t) + \delta m \vec{V}_0 = \vec{p}^*(t) + D_{m_0}\vec{V}_0$ (* pour $\mathcal{V}_c$)

À $t + dt$ il vient :

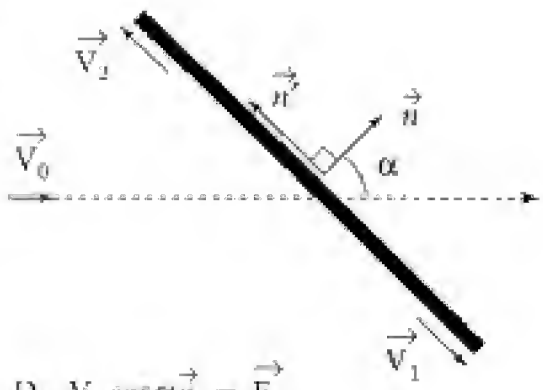
$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}^*(t+dt) + \delta m_2 \vec{V}_2 + \delta m_1 \vec{V}_1 = \vec{p}^*(t+dt) + D_{m_2}\vec{V}_2 dt + D_{m_1}\vec{V}_1 dt$

où $D_{m_2} = \rho e_2 \ell V_2$, $D_{m_1} = \rho e_1 \ell V_1$,

et $D_{m_2} + D_{m_1} = D_{m_0}$, avec $\vec{p}^*(t+dt) = \vec{p}^*(t)$ (régime stationnaire)

Finalement : $\frac{D\vec{p}}{Dt} = D_{m_1}\vec{V}_1 + D_{m_2}\vec{V}_2 - D_{m_0}\vec{V}_0$

Et en projection sur les directions $\vec{n}$ (normale à la plaque) et $\vec{n'}$ (direction du plan de figure parallèle à la plaque) :



$\vec{V}_0 = V_0 \cos\alpha \vec{n} - V_0 \sin\alpha \vec{n'}$

$\vec{V}_2 = V_2 \vec{n'}$ et $\vec{V}_1 = -V_1 \vec{n'}$.

D'où :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = [D_{m_2}V_2 - D_{m_1}V_1 + D_{m_0}V_0 \sin\alpha]\vec{n'} - D_{m_0}V_0 \cos\alpha \vec{n} = \vec{F}_T.$$

Copyrighted material

L'équation (3) donne alors :

$$\begin{cases} D_{m_2}V_2 - D_{m_1}V_1 + D_{m_0}V_0\sin\alpha = 0 & \text{(a)} \\ -D_{m_0}V_0\cos\alpha = -F + P_0\ell L & \text{(b)} \end{cases}$$

L'équation (a) s'écrit avec $V_1 = V_2 = V_0$:

$$D_{m_2} - D_{m_1} + D_{m_0}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{e_2 - e_1 + e\sin\alpha = 0} \quad (4)$$

e_1 et e_2 sont donc solution du système $\{(2), (4)\}$, d'où l'on tire :

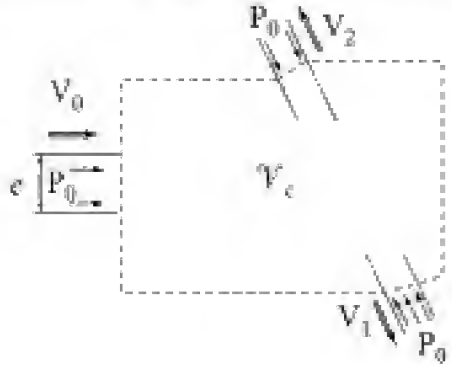
$$\boxed{e_1 = \frac{1}{2}e(1+\sin\alpha)\,; \quad e_2 = \frac{1}{2}e(1-\sin\alpha)}$$

L'équation (b) donne la force exercée par le fluide sur la plaque :

$$F = P_0\ell L + D_{m_0}V_0\cos\alpha \Rightarrow \boxed{F = P_0\ell L + \rho\ell eV_0^2\cos\alpha}$$

Le premier terme $P_0\ell L$ correspond à la force exercée par le fluide s'il était au repos (la pression dans le fluide devenant alors P_0 puisque les effets de pesanteur ne sont pas pris en compte). Elle est, par ailleurs, compensée par l'action de l'air sur « l'autre face » de la plaque. Le deuxième terme est associé au jet incident. Il est proportionnel au carré de la vitesse V_0 (résultat classique obtenu dans le cadre des fluides non visqueux).

2. On peut montrer que les résultats obtenus sont également compatibles avec le théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$. Faisons un bilan d'énergie cinétique, le système étant constitué par le fluide contenu – à l'instant t – dans le volume $\mathcal{V}_c$ et par la plaque. Le fluide étant incompressible et parfait, seuls les efforts extérieurs dus à la pression contribuent aux travaux s'exerçant sur le système (la plaque est fixe).



Dès lors :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}_{pression} = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$$

avec $\mathcal{P}_0 = P_0e\ell V_0$, $\mathcal{P}_1 = -P_0e_1\ell V_1$, $\mathcal{P}_2 = -P_0e_2\ell V_2$.

Soit : $\mathcal{P}_{pression} = P_0\ell[eV_0 - e_1V_1 - e_2V_2] = 0$

(d'après la relation (1) traduisant la conservation de la masse).

Pour déterminer la quantité $\dfrac{DE_c}{Dt}$, considérons le volume particulaire défini à partir de $\mathcal{V}_c$ et de la masse δm_0 de fluide entrant dans $\mathcal{V}_c$ entre t et $t + dt$. Pendant ce même

Copyrighted material

intervalle de temps dt, une masse δm_1 sort de $\mathcal{V}_c$ par le bas et une masse δm_2 en sort par le haut. On a donc :

$$\begin{cases} E_c(t) = E_c^*(t) + \delta m_0 \dfrac{V_0^2}{2} \\ \qquad\qquad \uparrow \text{associée à } \mathcal{V}_c \\ E_c(t+dt) = E_c^*(t+dt) + \delta m_1 \dfrac{V_1^2}{2} + \delta m_2 \dfrac{V_2^2}{2}. \end{cases}$$

Or $E_c^*(t+dt) = E_c^*(t)$ le régime étant stationnaire, d'où :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \lim_{dt \to 0}\left(\frac{E_c(t+dt) - E_c(t)}{dt}\right) = \frac{\delta m_1}{dt}\frac{V_1^2}{2} + \frac{\delta m_2}{dt}\frac{V_2^2}{2} - \frac{\delta m_0}{dt}\frac{V_0^2}{2}$$

et finalement : $$\frac{DE_c}{Dt} = D_{m_1}\frac{V_1^2}{2} + D_{m_2}\frac{V_2^2}{2} - D_{m_0}\frac{V_0^2}{2}.$$

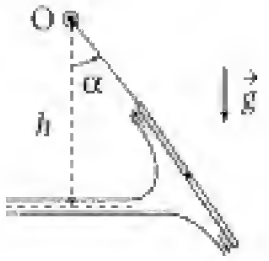
Le bilan d'énergie cinétique s'écrit alors : $D_{m_0} \cdot \left(\dfrac{V_0^2}{2}\right) - D_{m_1} \cdot \left(\dfrac{V_1^2}{2}\right) - D_{m_2} \cdot \left(\dfrac{V_2^2}{2}\right) = 0.$

Résultat en accord avec ce qui précède puisque $V_0 = V_1 = V_2$ et $D_{m_0} = D_{m_1} + D_{m_2}$.

Commentaire

En utilisant le théorème de Bernoulli au **1.** on avait déjà fait, par là même, un bilan d'énergie.

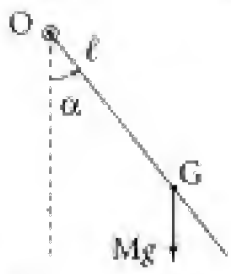
3. La plaque est soumise à l'action du jet, de l'air, de son poids et des forces de liaison.



La liaison est supposée parfaite : le moment par rapport à l'axe Oz des efforts correspondants est donc nul :

$$\mathcal{M}_\Delta^{\text{liaison}} = 0.$$

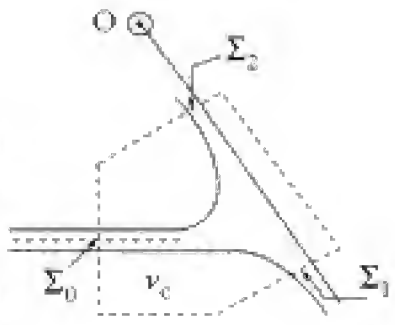
Le moment du poids s'écrit : $\mathcal{M}_\Delta^{\text{poids}} = -Mg\ell \sin\alpha$.



Faisons un bilan de moment cinétique (en fait, on ne considérera que le moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz). À cet effet, le système particulaire est constitué par le fluide contenu à t dans $\mathcal{V}_c$ et par la plaque :

$$\frac{D\sigma_\Delta}{Dt} = \mathcal{M}_\Delta^{\text{ext}}$$

$$\frac{D\sigma_\Delta}{Dt} = \underbrace{\mathcal{M}_\Delta^{\text{liaison}}}_{0} + \mathcal{M}_\Delta^{\text{poids}} + \mathcal{M}'_\Delta.$$



$\mathcal{M}'_\Delta$ représente le moment par rapport à Δ des efforts associés aux actions de l'air (P_0), du fluide en amont (surface Σ_0 où $P = P_0$) et du fluide en aval (surfaces Σ_1 et Σ_2 où $P = P_0$ également). La surface délimitant le système considéré étant à pression uniforme P_0, le moment $\mathcal{M}'_\Delta$ des efforts correspondants est nul.

Copyrighted material

De plus $\mathcal{M}_\Delta^{\text{poids}} = \mathcal{M}_\Delta^{\text{poids}}(\text{plaque}) + \mathcal{M}_\Delta^{\text{poids}}(\text{fluide}) = \mathcal{M}_\Delta^{\text{poids}}(\text{plaque})$,

soit $\dfrac{D\sigma_\Delta}{Dt} = -Mg\ell\sin\alpha$ (5)

Pour évaluer la quantité $\dfrac{D\sigma_\Delta}{Dt}$, on peut suivre un raisonnement identique à celui qui a permis de calculer $\dfrac{DE_c}{Dt}$ (*cf.* **2.**) : $\dfrac{D\sigma_\Delta}{Dt} = D_{m_1}\cdot(\sigma'_\Delta)_1 + D_{m_2}\cdot(\sigma'_\Delta)_2 - D_{m_0}\cdot(\sigma'_\Delta)_0$

σ'_Δ représentant le moment cinétique scalaire (par rapport à Δ) de l'unité de masse.
Le moment cinétique emporté par l'eau qui ruisselle sur la plaque est négligeable, les distances à l'axe étant très faibles : $(\sigma'_\Delta)_1 \approx 0$ et $(\sigma'_\Delta)_2 \approx 0$.

On a donc : $\dfrac{D\sigma_\Delta}{Dt} = -D_{m_0}\cdot(\sigma'_\Delta)_0$

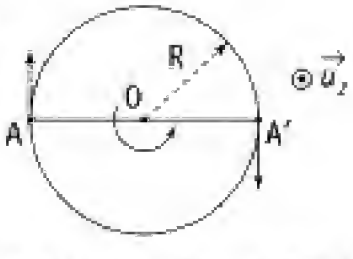
avec $(\sigma'_\Delta)_0 \approx V_0 h$ $(e \ll h) \Rightarrow \dfrac{D\sigma_\Delta}{Dt} = -D_{m_0} h V_0$ (6)

(5) et (6) donnent alors : $-D_{m_0} h V_0 = -Mg\ell\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \dfrac{D_{m_0} h V_0}{Mg\ell}}$

Commentaire

L'angle α est d'autant plus grand que h et v_0 ont des valeurs élevées et que M est faible.

403 Tourniquet de foire



Un tourniquet de foire de rayon R peut tourner autour de son axe vertical Oz (liaison d'axe parfaite). Il est muni en deux points diamétralement opposés A et A' d'une réserve de poudre ($\dfrac{m_0}{2}$ en chaque point). On note J_0 le moment d'inertie, par rapport à Oz, du tourniquet (sans la poudre).
Pour $t < 0$, le système est immobile. À $t = 0$, on allume la poudre, ce qui a pour effet l'émission de matière tangentiellement au cercle de rayon R avec un débit massique D_m supposé constant (tant qu'il reste de la poudre) et une vitesse relative d'éjection invariable v_e. L'atmosphère extérieure à la pression uniforme P_0 exerce sur le tourniquet un couple de frottements fluides $\Gamma = -\lambda\omega(t)$, où $\omega(t)$ représente la vitesse angulaire de rotation du tourniquet autour de son axe.

1. Établir les équations différentielles en $\omega(t)$.

2. Déterminer la solution correspondante et tracer le graphe $t \to \omega(t)$: on fera l'approximation : $J_0 \gg m_0 R^2$.

Copyrighted material

1. Ce qu'il faut savoir

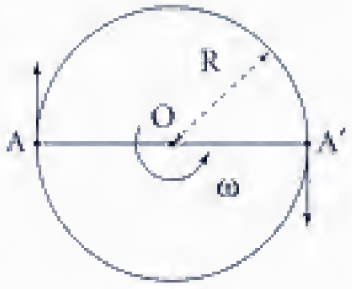
- Composition des vitesses.
- Bilan de moment cinétique.
- Théorème du moment cinétique pour un système particulaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'évacuation de matière a pour effet de mettre le tourniquet en rotation par effet de réaction. Il faudra distinguer deux phases. La première motrice se poursuit tant qu'il reste de la poudre, c'est-à-dire pour $t < t_1 = \frac{m_0}{D_m}$. Au delà, on est ramené à un solide de moment d'inertie J_0 tournant autour de son axe Oz et soumis au seul couple de frottement $\Gamma = -\lambda\omega$.

3. Solution

1. Prenons pour système fermé S le système constitué du tourniquet, de moment d'inertie J_0 par rapport à son axe vertical Oz, et de la masse $m(t)$ de poudre qu'elle contient à l'instant t.



Appliquons à S, dans le référentiel d'étude galiléen, le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz :

$$\frac{D\sigma_z}{Dt} = \mathcal{M}_z^{ext} = \mathcal{M}_z^{\text{liaison d'axe}} + \mathcal{M}_z(\text{poids}) + \mathcal{M}_z(\text{atm}).$$

Or $\mathcal{M}_z^{\text{liaison d'axe}} = 0$ (liaison d'axe parfaite)

$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = 0$ (axe de rotation vertical)

$\mathcal{M}_z(\text{atm}) = \mathcal{M}_z(P_0) + \mathcal{M}_z(\text{frottements fluides}) = 0 + (-\lambda\omega)$

($\mathcal{M}_z(P_0) = 0$: action d'une pression uniforme P_0 sur un système fermé ; $\mathcal{M}_z(\text{frottements fluides}) = -\lambda\omega$: *cf.* énoncé)

D'où
$$\frac{D\sigma_z}{Dt} = -\lambda\omega \quad (1)$$

POINT MÉTHODE

Pour déterminer la **dérivée particulaire** $\frac{D\sigma_z}{Dt}$, on s'intéresse à un système fermé S que l'on suit dans son évolution entre les instants t et $t + dt$. On calculera alors $\sigma_z([S], t)$ et $\sigma_z([S], t + dt)$, puis on écrira :

$$\frac{D\sigma_z}{Dt} = \lim_{dt \to 0}\left(\frac{\sigma_z([S], t + dt) - \sigma_z([S], t)}{dt}\right).$$

$\sigma_z(t) = J_0\omega(t) + m(t)R^2\omega(t)$

$\sigma_z(t + dt) = J_0\omega(t + dt) + m(t + dt)R^2\omega(t + dt) + \delta\sigma_z$

Copyrighted material

$\delta\sigma_z$ représentant le moment cinétique selon Oz emporté par la masse $\delta m' = m(t) - m(t + dt)$ évacuée par le tourniquet entre les instants t et $t + dt$:

$$\delta\sigma_z = \delta m' R \underbrace{(R\omega - v_e)}_{\text{Composition des vitesses}} = -dmR(R\omega - v_e).$$

D'où :

$$\sigma_z(t + dt) - \sigma_z(t) = J_0[\omega(t + dt) - \omega(t)] + R^2[(m\omega)_{t+dt} - (m\omega)_t] - R(R\omega - v_e)dm$$

et $$\frac{D\sigma_z}{Dt} = J_0\frac{d\omega}{dt} + R^2\frac{d(m\omega)}{dt} - \frac{dm}{dt}(R^2\omega) + \frac{dm}{dt}Rv_e$$

$$\frac{D\sigma_z}{Dt} = (J_0 + mR^2)\frac{d\omega}{dt} + Rv_e\frac{dm}{dt}$$

or $\frac{dm}{dt} = -D_m$ (D_m : débit de masse éjectée par l'engin)

d'où : $$\frac{D\sigma_z}{Dt} = (J_0 + mR^2)\frac{d\omega}{dt} - D_mRv_e \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent alors :

$$\boxed{(J_0 + m(t)R^2)\frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = D_mRv_e} \quad (3)$$

tant qu'il reste de la poudre. Or $m(t) = m_0 - D_m t$. L'équation (3) reste donc valable pour $t < t_1$ avec $t_1 = \frac{m_0}{D_m}$. Au delà, le moment cinétique se réduit à $\sigma_z(t) = J_0\omega(t)$, et l'équation (3) devient :

$$J_0\frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = 0 \quad (4)$$

2. Intégrons (3) et (4) :

• pour $0 < t < t_1$, on a donc avec l'hypothèse de l'énoncé ($m_0R^2 \ll J_0$ et donc $m(t)R^2 \ll J_0$) :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\lambda}{J_0}\omega = \frac{D_mRv_e}{J_0}.$$

Posons $\omega_f = \frac{D_mRv_e}{\lambda}$ et $\tau = \frac{J_0}{\lambda}$, il vient :

$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_f}{\tau}$, soit avec $\omega(0) = 0$:

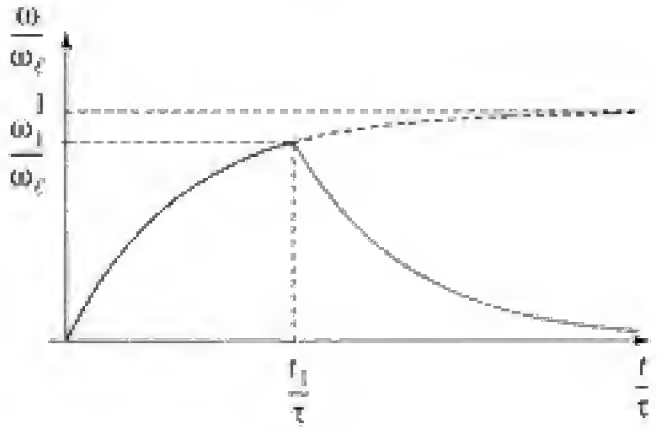
$$\omega(t < t_1) = \omega_f \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega(t_1) = \omega_f \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right)$$

• pour $t > t_1$, $\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = 0$, soit :

$$\omega(t > t_1) = \omega_1 \exp -\left(\frac{t - t_1}{\tau}\right).$$

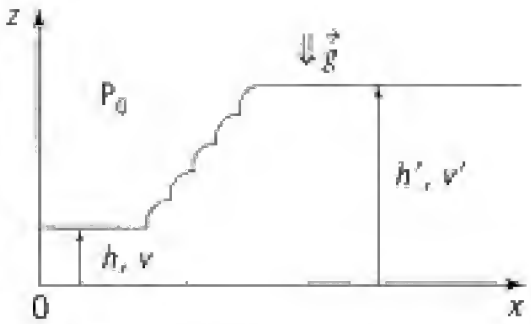
Copyrighted material

On représente ci-dessous le graphe $t \to \dfrac{\omega(t)}{\omega_\ell}$:



404 Ressaut hydraulique

Quand on observe, dans un évier, l'eau s'écoulant à partir du jet vertical issu du robinet, on remarque une région centrale de faible épaisseur, et de « grande vitesse », séparée d'une région de plus grande épaisseur (et donc de plus faible vitesse) par une zone où s'effectue la transition sous la forme d'un **ressaut hydraulique**.



1. Pour simplifier, on se limite ici à un problème unidimensionnel (selon Ox).

En amont du ressaut, les conditions sont : hauteur d'eau h ; vitesse uniforme $v\vec{u}_x$.

En aval du ressaut : hauteur d'eau h' ; vitesse uniforme $v'\vec{u}_x$.

On introduit les nombres de Froude définis ici selon :

$$F = \frac{v}{\sqrt{gh}} \quad \text{et} \quad F' = \frac{v'}{\sqrt{gh'}}.$$

On note ρ la masse volumique de l'eau assimilée à un fluide incompressible.

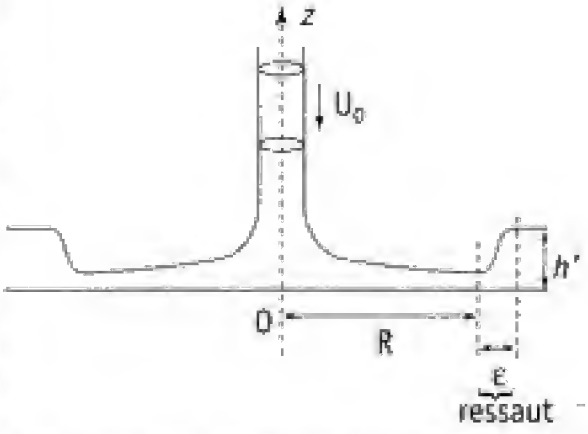
a. Déterminer les relations définissant v et v' en fonction des grandeurs h, h' et g.

En déduire que l'on a nécessairement $F > 1$ et $F' < 1$. Commenter.

b. Faire un bilan d'énergie cinétique. Commenter.

Copyrighted material

2. On considère maintenant le ressaut tel qu'on peut l'observer dans un évier (phénomène à symétrie cylindrique dont l'axe Oz est celui du jet d'eau sortant du robinet). L'expérience a été réalisée avec un jet de diamètre $2a = 5$ mm et un débit volumique q de 0,5 litre pour 18 s écoulées.



Le ressaut est une zone de discontinuité qui apparaît à une distance R – 6 cm de l'axe Oz. Il s'étale sur une largeur $\varepsilon \ll R$. L'épaisseur de la nappe fluide est h en amont du ressaut (à la distance R de l'axe Oz) et h' en aval. L'expérience justifie que l'on puisse faire $h' \gg h$.

a. Justifier rapidement qu'il est légitime de reprendre le résultat du **1. a.** définissant la vitesse v en fonction de g, h et h'.

Établir l'expression définissant la distance R où se produit le ressaut en fonction de q, a, g et h'.

b. *A.N.* : donner la valeur de h' déduite du **2. a.** Commenter : on cherche à préciser le rôle de la viscosité ; pour l'eau, $\eta = 10^{-3}$ kg · m^{-1} · s^{-1} et $\rho = 10^3$ kg · m^{-3}.

1. Ce qu'il faut savoir

- Bilan de quantité de mouvement.
- Bilan d'énergie cinétique.
- Théorème de Bernoulli.
- Diffusion visqueuse.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. On ne peut pas appliquer le théorème de Bernoulli, le ressaut s'accompagnant d'une dissipation d'énergie. On se propose donc de faire un bilan de quantité de mouvement à partir d'un système particulaire (système fermé), les seules forces à prendre en compte étant les forces extérieures.

b. Le théorème de l'énergie cinétique fait intervenir non seulement la puissance des efforts extérieurs (pesanteur, pression) mais également celle, $\mathcal{P}_{int}$, des efforts intérieurs responsables de la dissipation d'énergie. Le bilan d'énergie cinétique doit donc permettre de déterminer cette puissance $\mathcal{P}_{int}$ (elle doit s'annuler pour $h = h'$).

2. a. La géométrie ne joue pas sur la loi de vitesse $v = f(g, h, h')$ tant que ε reste petit devant R. Alors que le théorème de Bernoulli n'est pas applicable à la traversée du ressaut, on suppose qu'il est possible de l'utiliser entre le jet et la zone en amont du ressaut.

b. Se rappeler que la diffusion visqueuse fait intervenir une longueur caractéristique $\delta(t) \sim \sqrt{\nu t}$ où $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ (ν = viscosité cinématique de l'eau). Il faut donc comparer δ_R à h.

Copyrighted material

3. Solution

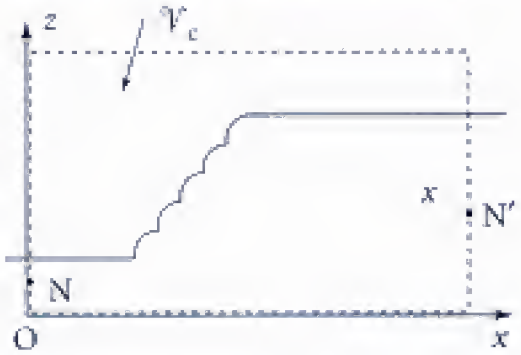
1. a. Écrivons tout d'abord la conservation du débit volumique, soit :

$$hv = h'v' \quad (1)$$

POINT MÉTHODE

Le théorème de Bernoulli est ici inapplicable, le ressaut dissipant de l'énergie (zones tourbillonnaires…). On va donc effectuer un bilan de quantité de mouvement.

Introduisons à cet effet le volume de contrôle parallélépipédique $\mathcal{V}_c$ de largeur L selon Oy et délimité par le rectangle représenté par des pointillés sur la figure ci-contre.



Soit alors le **système particulaire** S constitué de l'eau contenue à l'instant t dans $\mathcal{V}_c$ et de la masse d'eau δm y entrant en amont $(x = 0)$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

À l'instant $t + \mathrm{d}t$, ce système est représenté d'une part, par l'eau contenue dans $\mathcal{V}_c$ à $t + \mathrm{d}t$ et d'autre part, par la masse $\delta m'$ sortie de $\mathcal{V}_c$ en aval entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

Le régime étant « stationnaire » (on a en moyenne la même masse d'eau dans $\mathcal{V}_c$ et dans la même configuration), il vient : $\delta m = \delta m'$ en accord avec (1) et ρ = cste.

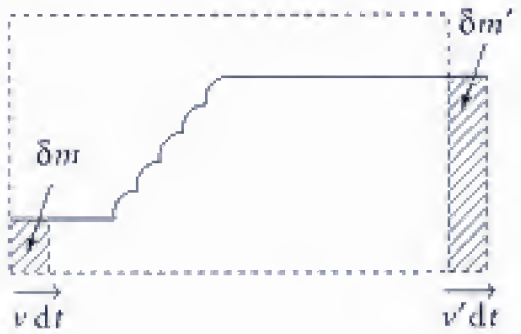
Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit alors en projection sur Ox :

$$\frac{\mathrm{D}P_x}{\mathrm{D}t} = F_x^{ext} \text{ avec } \frac{\mathrm{D}P_x}{\mathrm{D}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0}\left\{\frac{P_x([S], t+\mathrm{d}t) - P_x([S], t)}{\mathrm{d}t}\right\}.$$

Or $P_x([S], t) = P_x^*(t) + \delta m v$

$P_x([S], t) = P_x^*(t + \mathrm{d}t) + \delta m' v'$

où $P_x^*(t) = P_x^*(t + \mathrm{d}t)$ quantité de mouvement selon Ox de l'eau contenue dans $\mathcal{V}_c$.

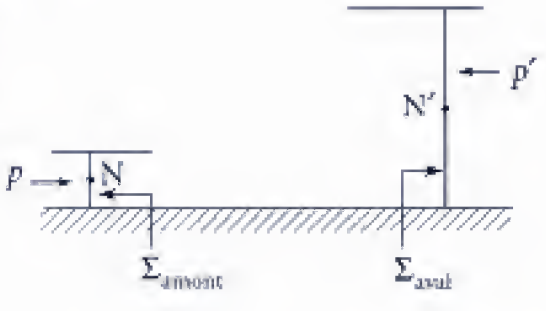


On a donc : $\dfrac{\mathrm{D}P_x}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\delta m'}{\mathrm{d}t}v' - \dfrac{\delta m}{\mathrm{d}t}v$

avec $\delta m' = \delta m = \rho \mathrm{L}\, h\, v\, \mathrm{d}t$

soit $$\frac{\mathrm{D}P_x}{\mathrm{D}t} = \rho \mathrm{L}\, h\, v(v' - v) = F_x^{ext} \quad (2)$$

La composante F_x^{ext} résulte des forces de surpression $p(z)$ et $p'(z)$ s'exerçant sur les surfaces fluides Σ_{amont} et Σ_{aval}. On a posé $P = P_0 + p$ et on a remarqué que la pression uniforme P_0 ne contribuait pas à F_x^{ext}.

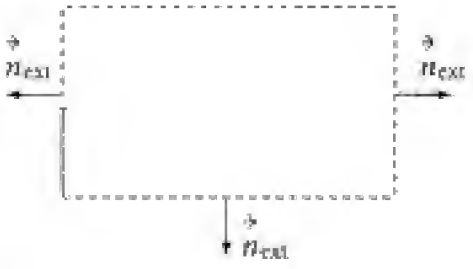


Copyrighted material

En effet, on a :

$$F_x^{ext} = -\left\{\oiint (P_0 + p(M))\vec{n}^{ext}\delta\Sigma\right\}\cdot\vec{u}_x$$

$$F_x^{ext} = \underbrace{\left(-P_0\oiint \vec{n}^{ext}\delta\Sigma\right)}_{\vec{0}\text{ (pression uniforme sur une surface fermée)}}\cdot\vec{u}_x - \oiint p(M)\vec{n}^{ext}\cdot\vec{u}_x\delta\Sigma$$



$$F_x^{ext} = \iint_{\Sigma_{amont}} p(N)\delta\Sigma - \iint_{\Sigma_{aval}} p'(N')\delta\Sigma'$$

(sur le fond $\vec{n}_{ext}\cdot\vec{u}_x = 0$ et sur les faces latérales $\vec{n}_{ext} /\!/ \vec{u}_y \perp \vec{u}_x$). Soit : $F_x^{ext} = L\int_0^h p(z)dz - L\int_0^{h'} p(z')dz'$ (3)

Or en amont et en aval du ressaut, on est en présence d'un écoulement parallèle. On a donc :

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z}(P + \rho g z) \Rightarrow P + \rho g z = \text{cste.}$$

Soit en amont, la surface libre plane se trouvant à l'altitude h :

$$P = P_0 - \rho g(z - h) \Rightarrow p(z) = +\rho g(h - z);$$

de même, en aval : $P = P_0 - \rho g(z - h') \Rightarrow p'(z) = \rho g(h' - z)$.

La relation (3) s'écrit alors : $F_x^{ext} = \rho g L\left\{\int_0^h (h - z)dz - \int_0^{h'} (h' - z)dz\right\}$

$$F_x^{ext} = \frac{1}{2}\rho g L(h^2 - h'^2) \quad (4)$$

Reportons ce résultat dans (2) : $\rho L h v(v' - v) = \frac{1}{2}\rho g L(h^2 - h'^2)$ (5)

d'où après simplification et à l'aide de (1) ($vh = v'h'$) :

$$hv^2\left(\frac{h}{h'} - 1\right) = \frac{1}{2}g(h - h')(h + h')$$

soit : $\boxed{v^2 = \frac{g(h + h')h'}{2h}} \Rightarrow \boxed{v'^2 = \frac{g(h' + h)h}{2h'}}$ (6)

Nous pouvons alors en déduire les expressions des nombres de Froude :

$$F^2 = \frac{v^2}{gh} = \frac{(h + h')h'}{2h^2} > \frac{(h + h)h}{2h^2} = 1 \quad \Rightarrow F > 1;$$

$$F'^2 = \frac{v'^2}{gh'} = \frac{(h + h')h}{2h'^2} < \frac{(h' + h')h'}{2h'^2} = 1 \Rightarrow F' < 1.$$

Le passage d'un régime de « grande » vitesse, et donc de faible profondeur, à un régime de « faible » vitesse, et donc de grande profondeur, doit correspondre à la transition $F > 1 \Rightarrow F < 1$.

Copyrighted material

Commentaires

• Supposons F, v et h connus et calculons le rapport $\frac{h'}{h}$.

On a : $F^2 = \frac{(h+h')h'}{2h^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{h'}{h}\right)\frac{h'}{h}$.

Soit : $\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + \left(\frac{h'}{h}\right) - 2F^2 = 0$, dont la solution à retenir est : $\boxed{\frac{h'}{h} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+8F^2}}$

Ainsi pour $F > 1$, on a bien $h' > h$.

• Cette situation est à rapprocher de celle se produisant dans certaines circonstances dans une tuyère où un gaz en écoulement incompressible passe brusquement, via une onde de choc, d'un régime supersonique $\left(\mu = \frac{v}{c} > 1\right)$ à un régime subsonique $\left(\mu = \frac{v}{c} < 1\right)$, c représentant la vitesse locale du son dans le gaz. Dans le problème qui nous intéresse ici, la vitesse du fluide est à comparer en amont et en aval du ressaut, à la célérité $c = \sqrt{gh_0}$ des ondes de gravitation en eau peu profonde.

1. b. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au système précédent :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}.$$

De la même manière que le bilan de quantité de mouvement, nous avons :

$E_c(t+dt) - E_c(t) = \delta E'_{c\,aval} - \delta E_{c\,amont}$ avec :

$\delta E'_{c\,aval} = \frac{v'^2}{2}\delta m' = \frac{v'^2}{2}\rho v'h'dtL = \frac{v'^2}{2}D_m dt$ où $D_m = \rho L h v = \rho L h' v'$

$\delta E_{c\,amont} = \frac{v^2}{2}\delta m = \frac{v^2}{2}\rho v h dt L = \frac{v^2}{2}D_m dt$.

D'où : $E_c(t+dt) - E_c(t) = \frac{1}{2}(v'^2 - v^2)D_m dt$ et $\boxed{\frac{DE_c}{Dt} = \frac{1}{2}(v'^2 - v^2)D_m}$

De plus : $\mathcal{P}_{ext} = -\frac{DE_p}{Dt}(\text{pesanteur}) + \mathcal{P}^{ext}_{pression}$

où $\mathcal{P}^{ext}_{pression} = Lv\left[\int_0^h (P_0 + \rho g(h-z))dz\right] - Lv'\int_0^{h'}(P_0 + \rho g(h'-z))dz$.

Or $hv = h'v'$, d'où :

$$\mathcal{P}^{ext}_{pression} = \rho g L\left[\int_0^h v(h-z)dz - \int_0^{h'} v'(h'-z)dz\right]$$

$$\mathcal{P}^{ext}_{pression} = g\left[\frac{h}{2} - \frac{h'}{2}\right]D_m \quad (D_m = \rho L h v = \rho L h' v').$$

D'autre part, le calcul de la variation de l'énergie potentielle de pesanteur s'effectue de la même façon que celui développé pour $\frac{DE_c}{Dt}$. Il vient, avec $(\delta E'_p)_{aval} = g\frac{h'}{2}\delta m$ et $(\delta E_p)_{amont} = g\frac{h}{2}\delta m$: $\frac{DE_p}{Dt} = \frac{1}{2}g(h'-h)D_m$.

On a donc : $\mathcal{P}_{int} = \frac{DE_c}{Dt} + \frac{DE_p}{Dt}(\text{pesanteur}) - \mathcal{P}^{ext}_{pression}$.

Copyrighted material

Soit $\mathcal{P}^{int} = \frac{1}{2}(v'^2 - v^2)D_m + \frac{1}{2}g(h' - h)D_m - \frac{g}{2}(h - h')D_m$.

D'où : $\boxed{\mathcal{P}^{int} = D_m\left\{\left(\frac{v'^2}{2} + gh'\right) - \left(\frac{v^2}{2} + gh\right)\right\}}$ (7)

Remplaçons les vitesses à l'aide des expressions (6) :

$$v'^2 - v^2 = \frac{1}{2}g(h + h')\left(\frac{h}{h'} - \frac{h'}{h}\right) = \frac{1}{2}g\frac{h + h'}{hh'}(h^2 - h'^2).$$

L'équation (7) devient :

$$\mathcal{P}^{int} = D_m g(h' - h)\left\{1 - \frac{(h + h')^2}{4hh'}\right\} = -D_m g\frac{(h' - h)}{4hh'}\{(h + h')^2 - 4hh'\}.$$

Finalement : $\boxed{\mathcal{P}^{int} = -D_m g\frac{(h' - h)^3}{4hh'}}$

Commentaire

La puissance engendrée par ces efforts intérieurs est négative, elle correspond bien à une dissipation d'énergie. Dans le même ordre d'idée, on peut réécrire l'équation (7) sous la forme :

$$\left(\frac{v'^2}{2} + gh'\right) - \left(\frac{v^2}{2} + gh\right) = \frac{\mathcal{P}_{int}}{D_m} < 0$$

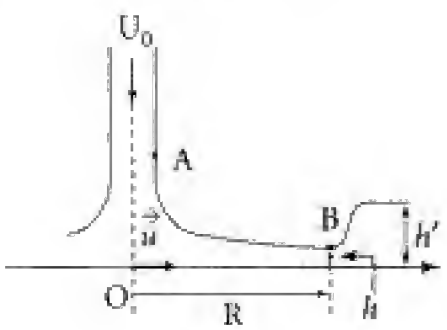
ce qui traduit ici l'inadéquation du théorème de Bernoulli.

2. a. On suppose que le ressaut s'effectue sur une distance ε selon $\vec{u}$ très petite devant R. On peut ainsi reprendre, pour cette nouvelle géométrie cylindrique, le résultat (6) du **1. a.**, démontré dans le cas d'un écoulement unidirectionnel selon Ox.

On a donc : $v^2 = \frac{gh'(h + h')}{2h}$ et pour $h' \gg h$ (*cf.* énoncé) : $v^2 \approx \frac{1}{2}g\frac{h'^2}{h}$ (8)

Or en appliquant le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant AB (et en y négligeant l'effet de la pesanteur) :

$$\frac{U_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \Rightarrow v = U_0.$$



L'équation (8) s'écrit alors :

$$U_0^2 = \frac{g}{2}\frac{h'^2}{h} \quad (9)$$

D'autre part, la conservation du débit volumique q donne :

$$q = \pi a^2 U_0 = 2\pi R h v = 2\pi R h U_0 \Rightarrow h = \frac{a^2}{2R} \quad (10)$$

(9) et (10) déterminent R selon :

$$\left(\frac{q}{\pi a^2}\right)^2 = U_0^2 = \frac{g}{2}\frac{h'^2}{a^2}2R \Rightarrow \boxed{R = \frac{q^2}{\pi^2 a^2 g h'^2}} \quad (11)$$

Copyrighted material

2. b. On a (d'après (11)) : $h' = \dfrac{q}{\pi a\sqrt{Rg}}$

soit avec les valeurs fournies dans l'énoncé :

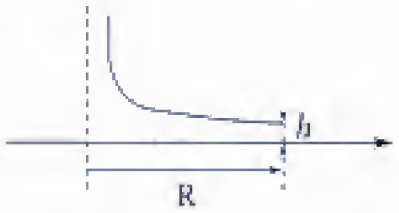
$$h' = \frac{\left(\frac{10^{-3}}{18}\right)}{\pi \times 2{,}5 \cdot 10^{-3}\sqrt{9{,}81 \times 6 \cdot 10^{-2}}} \Rightarrow h' = 9{,}2 \text{ mm},$$ ce qui semble excessif.

On a négligé les effets dus à la viscosité. Pour évaluer leur importance, on se rappellera que la diffusion visqueuse perpendiculairement à l'écoulement s'effectue sur une épaisseur δ dont l'ordre de grandeur est fourni par l'expression :

$\delta \sim \sqrt{\nu t}$ avec $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$.

Soit $\delta(R) \sim \sqrt{\nu t(R)}$ où $t(R) = \dfrac{R}{U_0}$

$$\delta(R) \sim \sqrt{\frac{\nu R}{U_0}}.$$



On peut donc ne pas tenir compte de la viscosité si la condition $h \gg \delta(R)$ est réalisée.

Calculons le rapport : $\dfrac{\delta(R)}{h} = \dfrac{\sqrt{\frac{\nu R}{U_0}}}{h} = \dfrac{2R}{a^2}\sqrt{\dfrac{\nu R}{U_0}}$ d'après (10)

$$\frac{\delta(R)}{h} = \frac{2R}{a}\sqrt{\frac{\nu R\pi}{q}} \quad \text{et} \quad \frac{\delta(R)}{h} = \frac{2 \times 6 \cdot 10^{-2}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{10^{-6} \times 6 \cdot 10^{-2} \times \pi}{\left(\frac{10^{-3}}{18}\right)}} \sim 2{,}8.$$

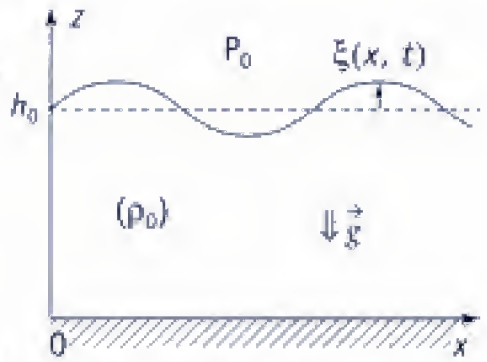
Il n'est pas petit devant l'unité, et il faudrait reconsidérer le problème en introduisant la densité volumique des forces visqueuses ($\vec{\varphi} \approx \eta\Delta\vec{v}$, avec ici $\vec{v} \approx v(r)\vec{u}$).

405 Houle en eau peu profonde

1. L'étude de la houle ($\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t - qx)$) a été faite à l'exercice 206. Nous avons obtenu pour le champ des vitesses :

$$\begin{cases} v_x = \omega\xi_0 \dfrac{\cosh(qz)}{\sinh(qh_0)}\cos(\omega t - qx) \\ v_y = -\omega\xi_0 \dfrac{\sinh(qz)}{\sinh(qh_0)}\sin(\omega t - qx). \end{cases}$$

a. Vérifier que ces expressions sont cohérentes avec le problème traité.



$$\begin{cases} \xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t - qx) \\ \xi_0 \ll h_0 \end{cases}$$

Copyrighted material

b. On rappelle, de plus, que le champ des pressions s'écrit :

$$\begin{cases} P(x, z, t) = P_0 - \rho_0 g (z - h_0) + p(x, z, t) \\ \text{avec : } p(x, z, t) = \rho_0 g \xi_0 \dfrac{\cosh(qz)}{\cosh(qh_0)} \cos(\omega t - qx). \end{cases}$$

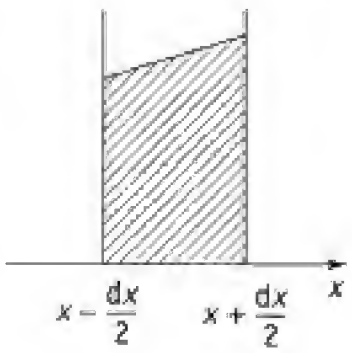
Donner les expressions approchées des grandeurs v_x, v_z et p lorsque $h_0 \ll \lambda$ $\left(q = \dfrac{2\pi}{\lambda}\right)$. Commenter les résultats obtenus : on montrera notamment que l'on a, avec une bonne approximation : $\vec{v} \approx v(x, t)\vec{u}_x$.

2. On s'intéresse désormais au phénomène de la houle en eau peu profonde ($h_0 \ll \lambda$). On note $h(x, t) = h_0 + \xi(x, t)$.

a. Justifier que l'on puisse faire $\vec{v} \approx v(x, t)\vec{u}_x$ avec $p \sim \rho_0 g \xi(x, t)$ (on a posé $P = P_0 - \rho_0 g(z - h_0) + p$, et les fonctions $v(x, t)$ et $\xi(x, t)$ sont *a priori* « quelconques »).

b. En faisant un bilan de masse sur le système fluide situé entre les plans d'abscisse $x - \dfrac{dx}{2}$ et $x + \dfrac{dx}{2}$, montrer que l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0.$$



c. À partir d'un bilan de quantité de mouvement effectué sur un système particulaire que l'on précisera, démonter la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(hv^2) = -gh\frac{\partial h}{\partial x}.$$

d. On limite désormais les calculs à l'ordre un par rapport aux grandeurs v, ξ ($|\xi_0| \ll h_0$) et leurs dérivées partielles. Établir le système d'équations couplées linéarisées vérifié par les variables $v(x, t)$ et $\xi(x, t)$. En déduire, en fonction de g et h_0, la célérité des ondes de gravitation pouvant se propager à la surface de l'eau.

1. Ce qu'il faut savoir

- Écoulement incompressible ($\rho = \rho_0 =$ cste ici).
- Relations de continuité.
- Loi de l'hydrostatique.
- Équations de bilan : bilan de masse, bilan de quantité de mouvement.
- Linéarisation des équations.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. Cette étude reprend les résultats d'un exercice précédent. On vérifiera que le champ des vitesses proposé traduit bien l'incompressibilité de l'écoulement ainsi que les conditions aux limites (en $z = 0$ et à la surface libre).

Copyrighted material

b. Pour $h_0 \ll \lambda$, et donc $z \ll \lambda$, on ne conservera que des termes d'ordre un en z et on montera qu'à cette approximation, la composante v_z de la vitesse est négligeable devant v_x et que la pression présente un comportement hydrostatique selon z.

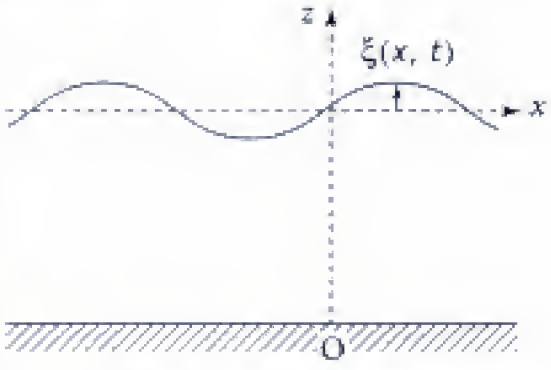
2. a. Il s'agit de reprendre les raisonnements précédents à « l'envers » (l'étude faite au **1.** permettant de mieux les comprendre…).

On ne suppose pas une variation sinusoïdale selon t et x. Cependant on pourra noter λ l'échelle de longueur caractérisant les variations des grandeurs physiques selon Ox.

3. Solution

1. a. Le champ des vitesses est donné par :

$$\begin{cases} v_x = \omega\xi_0 \dfrac{\cosh(qz)}{\sinh(qh_0)}\cos(\omega t - qx) & (1) \\ v_y = -\omega\xi_0 \dfrac{\sinh(qz)}{\sinh(qh_0)}\sin(\omega t - qx) & (2) \end{cases}$$



$$\xi(x, t) = \xi_0\cos(\omega t - qx)$$

Il faut vérifier que les expressions proposées sont en accord avec :

- l'incompressibilité de l'écoulement, à savoir $\operatorname{div}\vec{v} = 0$;
- les conditions aux limites, c'est-à-dire :

$v_z(x, 0, t) = 0$ et $v_z(x, h_0 + \xi(x, t), t) \approx \dfrac{\partial\xi}{\partial t} \approx v_z(x, h_0, t)$ (puisque $\xi_0 \ll h_0$).

$$\text{Or } \operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\omega\xi_0}{\sinh(qh_0)}\underbrace{\{q\cosh(qz)\sin(\omega t - qx) - q\cosh(qz)\sin(\omega t - qx)\}}_{0} = 0.$$

De plus $v_z(x, 0, t) = 0$ $(\sinh(q0) = 0)$

$$\text{et } \frac{\partial\xi}{\partial t} = -\omega\xi_0\sin(\omega t - qx) \approx v_z(x, h_0, t) = -\omega\xi_0\frac{\sinh(qh_0)}{\sinh(qh_0)}\sin(\omega t - qx)$$

$$= -\omega\xi_0\sin(\omega t - qx), \text{ comme il se doit.}$$

1. b. Dans le cas où $h_0 \ll \lambda$ (onde de gravitation en eau peu profonde), les expressions (1) et (2) deviennent $\left(qz = 2\pi\frac{z}{\lambda} \leq 2\pi\frac{h_0}{\lambda} \ll 1 \text{ pour } h_0 \ll \lambda\right)$:

$$\begin{cases} v_x \approx \dfrac{\omega\xi_0}{qh_0}\cos(\omega t - qx) & (3) \\ v_y = -\omega\xi_0\dfrac{z}{h_0}\sin(\omega t - qx) & (4) \end{cases}$$

Quant à la surpression, elle s'écrit : $p = \rho_0 g\xi_0\cos(\omega t - qx)$ (5)

Copyrighted material

Commentons ces résultats :

• La composante de la vitesse selon Ox, v_x, ne dépend plus de z à cette approximation ; elle est de la forme $v_x = A\cos(\omega t - qx)$.

La composante de la vitesse selon Oz, v_z présente une « amplitude » $Aqz = A2\pi\frac{z}{\lambda}$.

Ainsi en ordre de grandeur nous avons (on notera X_0 l'ordre de grandeur de la variable X) :

$(v_x)_0 = A$ et $(v_z)_0 \approx A2\pi\frac{h_0}{\lambda}$ (en prenant $(v_z)_0 = ((v_z)_{max})_0$).

Or $h_0 \ll \lambda$ implique $(v_x)_0 \gg (v_z)_0$ de sorte qu'en toute première approximation, on peut négliger v_z et : $\vec{v} \approx v(x, t)\vec{u_x}$ (6) (ici $v(x, t) = A\cos(\omega t - qx)$).

• De plus $\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim Aq\sin(\omega t - qx)$, soit en ordre de grandeur $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 \sim \frac{(v_x)_0}{\lambda}$ et $\frac{\partial v_z}{\partial x} \sim -Aq\sin(\omega t - qx)$, soit en ordre de grandeur $\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0 \sim \frac{(v_z)_0}{h_0}$.

Et l'équation traduisant l'incompressibilité de l'écoulement $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\right)$ se traduit ici en ordre de grandeur par :

$$\frac{(v_x)_0}{\lambda} \sim \frac{(v_z)_0}{h_0} \Rightarrow (v_z)_0 \sim \frac{h_0}{\lambda}(v_x)_0 \quad (7)$$

en accord avec $(v_z)_0 \ll (v_x)_0$.

• Quand à la relation (5), elle exprime un « équilibre » hydrostatique sur une même verticale (donc à x fixé). En effet :

$P(x, z, t) = P_0 - \rho_0 g(z - h_0) + p(x, z, t)$, par définition de p :

$\frac{\partial}{\partial z}(P + \rho_0 gz) = 0$ (équilibre hydrostatique selon Oz),

d'où : $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ et $p = p(x, t)$.

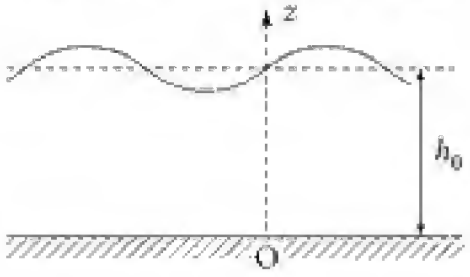
Or à la surface, $z = h_0 + \xi(x, t)$ et $P(x, h_0 + \xi(x, t), t) = P_0$, soit :

$$P_0 = P_0 - \rho_0 g\,\xi(x, t) + p(x, t) \Rightarrow p(x, t) = \rho_0 g\,\xi(x, t) \quad (8)$$

2. a. Approximations

On suppose que l'échelle caractéristique des variations selon x, notée λ, est d'un ordre supérieur à h_0 ($h_0 \ll \lambda$). On peut donc considérer en ordre de grandeur :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 \sim \frac{(v_x)_0}{\lambda} \text{ et } \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0 \sim \frac{(v_z)_0}{h_0}$$



Copyrighted material

la vitesse v_z devant être nulle en $z = 0$ et s'identifiant à $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ en $z \approx h_0$, h_0 est probablement la distance caractéristique des variations de v_z avec z. Or l'incompressibilité de l'écoulement implique $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ ce qui donne en ordre de grandeur :

$$\frac{(v_x)_0}{\lambda} \sim \frac{(v_z)_0}{h_0} \Rightarrow (v_z)_0 \sim \frac{h_0}{\lambda}(v_x)_0 \Rightarrow (v_z)_0 \ll (v_x)_0.$$

On peut donc négliger en première approximation la composante v_z, ce qui revient à faire :

- $\vec{v} \approx v(x, t)\vec{u}_x$;
- $\frac{\partial}{\partial z}(P + \rho_0 gz) = 0$ (*cf.* équation d'Euler avec $v_z = 0$) et donc $p \approx \rho_0 g\,\xi(x, t)$ (*cf.* (8)).

Commentaire

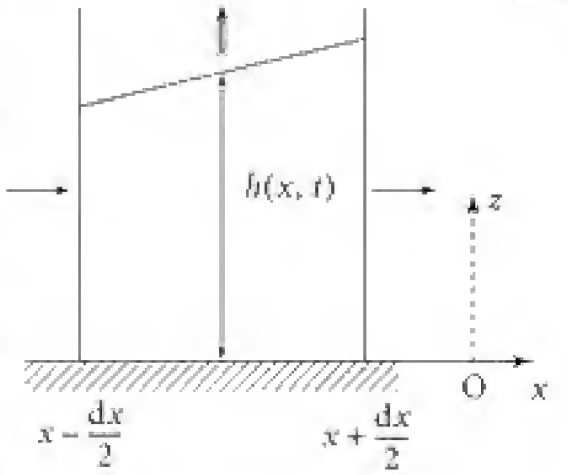
La première question montre la validité de ces approximations.

2. b. Bilan de masse :

Soit $\delta M(t)$ la masse de fluide contenue dans l'espace E^* délimité par les plans d'abscisses $x - \frac{dx}{2}$ et $x + \frac{dx}{2}$ et une longueur L selon Oz

$\delta M(t) = \rho_0 \delta \mathcal{V}(t)$

$\delta M(t) = \rho_0 h(x, t) \cdot L\,dx$ au premier ordre par rapport à dx.



Désignons par $\delta^2 m$ la masse « entrant » dans l'espace considéré entre les instants t et $t + dt$ par le plan d'abscisse $x - \frac{dx}{2}$ et par $\delta^2 m'$ la masse « sortant » dans l'espace considéré entre les instants t et $t + dt$ par le plan d'abscisse $x + \frac{dx}{2}$.

Le bilan de masse s'écrit alors : $\delta M(t + dt) - \delta M(t) = \delta^2 m - \delta^2 m'$

soit encore : $$\frac{\delta M(t + dt) - \delta M(t)}{dt} = \frac{\delta^2 m}{dt} - \frac{\delta^2 m'}{dt}$$

et à la limite où $dt \to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta M) = \frac{\delta^2 m}{dt} - \frac{\delta^2 m'}{dt} \quad (9) \text{ avec } \frac{\partial}{\partial t}(\delta M) = \rho_0 L\,dx \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \delta^2 m = \rho_0 v\left(x - \frac{dx}{2}, t\right) dt \left[L h\left(x - \frac{dx}{2}, t\right)\right] \\ \delta^2 m' = \rho_0 v\left(x + \frac{dx}{2}, t\right) dt \left[L h\left(x + \frac{dx}{2}, t\right)\right] \end{cases}$$

soit encore : $$\frac{\delta^2 m}{dt} - \frac{\delta^2 m'}{dt} = \rho_0 L \left\{ \left[v \cdot h\right]_{x - \frac{dx}{2}} - \left[v \cdot h\right]_{x + \frac{dx}{2}} \right\}$$

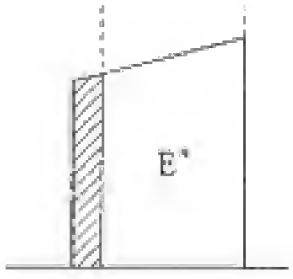
Copyrighted material

et au premier ordre par rapport à dx : $\dfrac{\delta^2 m}{dt} - \dfrac{\delta^2 m'}{dt} = -\rho_0 L \dfrac{\partial}{\partial x}(vh)dx$ (11)

L'équation (9) devient alors avec (10) et (11) et simplification par $\rho_0 L dx$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}h(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0} \quad (12)$$

2. c. Bilan de quantité de mouvement :



Considérons le système particulaire constitué de la masse de fluide située à l'instant t entre les plans d'abscisses $x - \dfrac{dx}{2}$ et $x + \dfrac{dx}{2}$ et de la masse $\delta^2 m$ qui va entrer dans l'espace E^* par le plan d'abscisse $x - \dfrac{dx}{2}$. À l'instant $t + dt$, ce système est constitué de E^* et de la masse $\delta^2 m'$ sortie de E^* par le plan d'abscisse $x + \dfrac{dx}{2}$.

La quantité de mouvement de ce système (en projection selon Ox) est donnée par :

$$P_x(t) = P_x^*(t) + \delta^2 m v\left(x - \frac{dx}{2}, t\right); \; P_x(t+dt) = P_x^*(t+dt) + \delta^2 m' v\left(x + \frac{dx}{2}, t\right).$$

Or $P_x^*(t) = \rho_0 \delta\mathcal{V}(t) v(x,t) = \rho_0 v(x,t) L h(x,t) dx$ (au premier ordre par rapport à dx),

de même : $P_x^*(t+dt) = \rho_0 v(x, t+dt) L h(x, t+dt) dx$

d'où : $P_x(t+dt) - P_x(t) = \rho_0 L dx \left\{ [vh]_{x,\,t+dt} - [vh]_{x,\,t} \right\}$

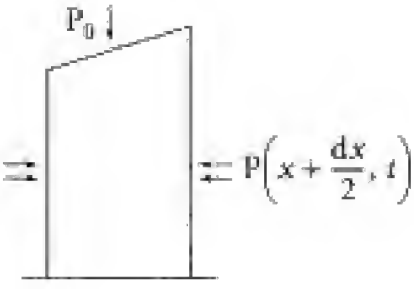
$$+ \rho_0 L dt \left\{ [hv^2]_{x+\frac{dx}{2},\,t} - [hv^2]_{x-\frac{dx}{2},\,t} \right\}$$

et à la limite où $dt \to 0$ et $dx \to 0$:

$$\frac{DP_x}{Dt} = \lim_{dt \to 0}\left(\frac{P_x(t+dt) - P_x(t)}{dt}\right) = \rho_0 L \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(hv^2) \right\} dx \quad (13)$$

Appliquons maintenant, à ce système particulaire, le théorème de la résultante dynamique en projection sur Ox, soit :

$$\frac{DP_x}{Dt} = \delta F_x^{ext} \quad (14)$$



La pression au sein du fluide est donnée par :

$$\left.\begin{array}{l} P(x,z,t) = P_0 - \rho_0 g(z - h(x,t)) \\ \text{où } h(x,t) = h_0 + \xi(x,t) \end{array}\right\} \; cf.\ \textbf{2. a.}$$

Copyrighted material

La pression P_0 s'exerçant sur les sections $S\left(x-\frac{dx}{2}\right)$, $S\left(x+\frac{dx}{2}\right)$ et sur la surface libre ne contribue pas à F_x. Il reste donc :

$$\delta F_x = \iint_{S\left(x-\frac{dx}{2}\right)} -\rho_0 g\cdot\left(z-h\left(x-\frac{dx}{2},t\right)\right)L\,dz - \iint_{S\left(x+\frac{dx}{2}\right)} -\rho_0 g\cdot\left(z-h\left(x+\frac{dx}{2},t\right)\right)L\,dz$$

$$\delta F_x = -\rho_0 gL\left\{\int_0^{h\left(x-\frac{dx}{2},t\right)}\left(z-h\left(x-\frac{dx}{2},t\right)\right)dz - \int_0^{h\left(x+\frac{dx}{2},t\right)}\left(z-h\left(x+\frac{dx}{2},t\right)\right)dz\right\}$$

soit : $\delta F_x = +\dfrac{\rho_0 gL}{2}\left\{h^2\left(x-\frac{dx}{2},t\right)-h^2\left(x+\frac{dx}{2},t\right)\right\}$

et au premier ordre en dx : $\delta F_x = -\frac{1}{2}\rho_0 gL\dfrac{\partial}{\partial x}(h^2)dx = -\rho_0 gLh\dfrac{\partial h}{\partial x}dx$ (15)

Les équations (12), (13) et (15) donnent alors : $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t}(hv)+\dfrac{\partial}{\partial x}(hv^2) = -g\,h\dfrac{\partial h}{\partial x}}$ (16)

2. d. Supposons maintenant que le passage de l'onde s'accompagne d'une faible variation du niveau de l'eau, et que l'on puisse ainsi traiter l'onde en termes de perturbation. Dès lors, la vitesse v et les variations de h peuvent être considérées comme des infiniments petits du premier ordre. À cette approximation, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t}(h)+\frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t}+\underbrace{v\frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{second ordre}}+\underbrace{h\frac{\partial v}{\partial x}}_{\hookrightarrow\ \sim h_0\frac{\partial v}{\partial x}\text{ au }1^{er}\text{ ordre}} = 0$$

1^{er} ordre

d'où : $\dfrac{\partial h}{\partial t}+h_0\dfrac{\partial v}{\partial x}\approx 0$ (on a posé $h = h_0+\xi(x,t)$ et $|\xi|\ll h_0$).

De la même manière, d'après (16), et en ne conservant que des termes du 1^{er} ordre :

$$h_0\frac{\partial v}{\partial t}+0 \approx -g\,h_0\frac{\partial h}{\partial x} = -g\,h_0\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Le système est alors réagi par le couple d'équations linéarisées :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \xi}{\partial t}+h_0\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t}+g\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0.\end{cases}$$

Éliminons v entre ces deux équations, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g\,h_0\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

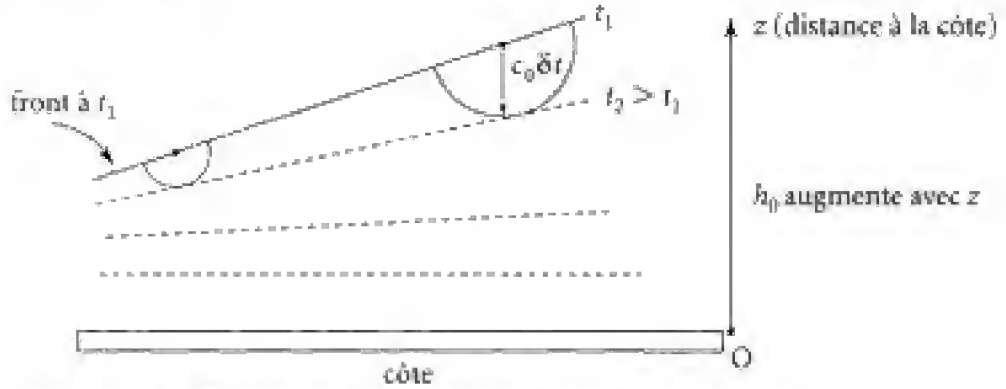
On reconnaît une équation de propagation (type équation de d'Alembert) à une dimension, de célérité c_0 définie selon :

$\boxed{c_0 = \sqrt{g\,h_0}}$ (vitesse de propagation des grandes ondes de gravitation : $\lambda \gg h_0$).

Copyrighted material

Commentaires

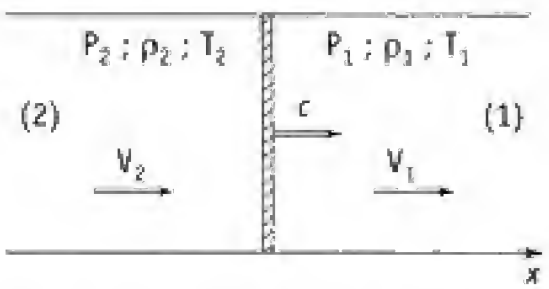
• Le calcul exact donne la relation de dispersion suivante : $\omega^2 = gq\tanh(qh_0)$.
Ainsi pour $h_0 \ll \lambda$ et donc $qh_0 \ll 1$, il vient : $\omega^2 \sim gqqh_0 = gh_0q^2 = c_0^2q^2 \Rightarrow \omega = c_0q$ et c_0 s'identifie à la célérité des ondes de gravitation en eau peu profonde ($h_0 \ll \lambda$).
• Cette expression de la célérité ($c_0 = \sqrt{gh_0}$) montre que c_0 diminue quand la profondeur devient plus faible. Ceci permet d'expliquer que le front de la houle a tendance à s'aligner sur le profil de la côte.



(On a utilisé l'idée d'Huygens de propagation de proche en proche...).

406 Onde de choc droite

L'écoulement d'un gaz **compressible** dans une tuyère convergente-divergente s'accompagne parfois de la présence d'une franche discontinuité des grandeurs physiques : pression P, température T, masse volumique ρ et vitesse V. On désigne ce phénomène sous le nom d'onde de choc.



On considère, dans un référentiel $\mathcal{R}$, une onde de choc plane se déplaçant dans un tuyau cylindrique de section constante S. Le tuyau est rempli d'un gaz supposé obéir à l'équation d'état des gaz parfaits. L'onde se déplace à la vitesse $c\vec{u}_x$.

Le fluide possède une vitesse $V_1\vec{u}_x$ en amont et $V_2\vec{u}_x$ en aval ; l'écoulement est adiabatique (tuyau calorifugé).

1. En se plaçant dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à l'onde de choc, établir trois relations de bilan faisant intervenir les caractéristiques du fluide en « amont » (V_1', ρ_1, P_1) et en « aval » (V_2', ρ_2, P_2) ainsi que le coefficient $\gamma\left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right)$: $\gamma = 1{,}4$.

c_v (resp. c_p) désigne la capacité thermique massique à volume (resp. pression) constant(e) : on les prendra invariables.

Copyrighted material

2. a. Les résultats précédents conduisent à :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\eta}{1 + \dfrac{\gamma-1}{2\gamma}\eta} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{P_2}{P_1} - 1.$$

Préciser, en fonction de η, les valeurs des rapports $\dfrac{T_2}{T_1}$ et $\dfrac{V_2'}{V_1'}$.

b. Montrer, à partir du second principe, que la pression P_2 est nécessairement supérieure à P_1.

Donner le graphe $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = f\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)$. Conclure : on pourra s'aider des résultats suivants qui définissent les nombres de Mach $\mathcal{M}_1' = \dfrac{V_1'}{c_1}$ et $\mathcal{M}_2' = \dfrac{V_2'}{c_2}$, où c_1 et c_2 sont les vitesses du son dans les conditions (1) et (2) $\left(c_1^2 = \dfrac{\gamma P_1}{\rho_1} \text{ et } c_2^2 = \dfrac{\gamma P_2}{\rho_2}\right)$:

$$\mathcal{M}_1'^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\eta \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2'^2 = 1 - \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{\eta}{\eta+1}.$$

Pour $\mathcal{M}' > 1$ (resp. $\mathcal{M}' < 1$), on parle d'écoulement supersonique (resp. subsonique).

c. *A.N.* : calculer P_2, ρ_2, T_2 pour de l'air avec $M = 29$ g ; $P_1 = 105$ Pa ; $T_1 = 300$ K ; $V_1 = 0$ et $c = 2\,500$ m · s^{-1}.

1. Ce qu'il faut savoir

- Bilan de masse.
- Bilan de quantité de mouvement.
- Bilan d'énergie : application du premier principe aux écoulements.
- Enthalpie, entropie d'un gaz parfait.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. En se plaçant dans $\mathcal{R}'$, on passe d'un écoulement instationnaire (dans $\mathcal{R}$) à un écoulement stationnaire. La discontinuité associée à l'onde de choc constitue un phénomène irréversible : l'écoulement du gaz est donc adiabatique mais non isentropique. Le bilan énergétique se fera à partir de l'équation déduite de l'application du premier principe aux écoulements.

2. b. On traduira que la traversée de l'onde de choc ($1 \to 2$) s'accompagne nécessairement d'une augmentation de l'entropie massique ($s_2 > s_1$: transformation adiabatique irréversible). On vérifiera qu'alors $P_2 > P_1$ et $\mathcal{M}_2' < \mathcal{M}_1'$ …

3. Solution

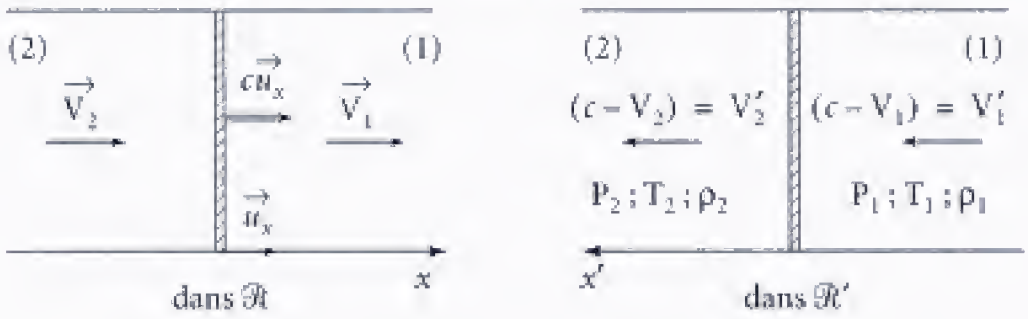
1. L'onde de choc est caractérisée par des variations brusques des propriétés caractéristiques du fluide (masse volumique, T, P, vitesse) sur des dimensions très faibles.

Copyright material

Elle pourra donc être considérée comme une discontinuité – ici perpendiculaire à l'écoulement (onde de choc droite) – séparant une région « amont » qu'elle atteint (région (1)) d'une région « aval » (région (2)).

Plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au front d'onde (zone hachurée = zone de discontinuité). Dans $\mathcal{R}'$, les vitesses du fluide deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l}(c-V_1)(-\vec{u}_x) \text{ en amont}\\ (c-V_2)(-\vec{u}_x) \text{ en aval}\end{array}\right\} \quad \text{d'où les schémas :}$$



Point méthode

Dans $\mathcal{R}'$, le régime d'écoulement du fluide est stationnaire (onde de choc en translation uniforme dans $\mathcal{R}$). L'étude de la discontinuité peut se faire à partir des équations de :

(a) conservation de la masse,

(b) bilan de quantité de mouvement,

(c) bilan énergétique,

(d) équation d'état du fluide.

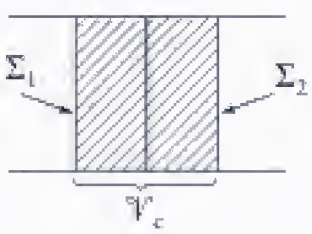
■ (a) : en notant q le débit massique rapporté à l'unité de surface perpendiculaire à l'écoulement, nous avons :

$$\boxed{q = \rho_1 V_1' = \rho_2 V_2'} \quad (1)$$

■ (b) : le fluide est en écoulement stationnaire. Les forces de volume sont négligées, ainsi que la viscosité. La variation de quantité de mouvement du fluide au niveau de la zone de choc est associée à la différence des pressions en amont et aval. Soit :

$$\frac{DP_{x'}'}{Dt} = S[P_1 - P_2].$$

Pour évaluer $P_{x'}'$, considérons le système particulaire associé au volume de contrôle $\mathcal{V}_c$ et à la masse $\delta m = qSdt$ entrant à travers Σ_1 entre t et $t + dt$. Une masse identique sort à travers Σ_2 entre ces mêmes instants. Dès lors :



$P_{x'}'(t) = P^*(t) + qSdtV_1'$ (* pour $\mathcal{V}_c$)

$P_{x'}'(t+dt) = P^{**}(t+dt) + qSdtV_2'$

$P^*(t+dt) = P^{**}(t)$ (régime stationnaire).

D'où : $\dfrac{DP'_{\mathscr{C}}}{Dt} = qS[V'_2 - V'_1] \Rightarrow \boxed{q(V'_2 - V'_1) = P_1 - P_2}$ (2)

■ (c) : l'écoulement est stationnaire et adiabatique (mais non isentropique : gradients de température importants...). Il s'effectue sans échange de travail avec l'extérieur autre que celui des forces de pression. Raisonnant sur l'unité de masse, il vient (*cf.* thermodynamique des écoulements) :

$$\boxed{\frac{1}{2}V_1'^2 + h_1 = \frac{1}{2}V_2'^2 + h_2} \quad (3)$$

h_1 et h_2 étant les enthalpies massiques dans les états (1) et (2).

■ (d) : le fluide est un gaz parfait, d'où : $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$ (c_p = constante)

où c_p représente la capacité thermique massique à pression constante dont la valeur est donnée par : $c_p = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{R}{M}$. Soit : $h_2 - h_1 = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{R}{M}(T_2 - T_1)$.

De plus : $P = \rho\dfrac{RT}{M}$; et : $h_2 - h_1 = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\dfrac{P_2}{\rho_2} - \dfrac{P_1}{\rho_1}\right)$ (4)

Les équations (3) et (4) conduisent à : $\boxed{V_1'^2 - V_2'^2 = \dfrac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\dfrac{P_1}{\rho_2} - \dfrac{P_2}{\rho_2}\right)}$ (5)

2. a. Nous avons : $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{\dfrac{P_2}{\rho_2}}{\dfrac{P_1}{\rho_1}} = \dfrac{P_2}{P_1}\cdot\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$, d'où :

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = (\eta + 1)\cdot\frac{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2\gamma}\eta}{1 + \dfrac{\gamma + 1}{2\gamma}\eta}} \quad (6)$$

Et pour les vitesses :

$$\boxed{\frac{V'_2}{V'_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}} \quad (7)$$

2. b. La variation d'entropie de l'unité de masse à la traversée de l'onde de choc peut être déduite de l'expression (voir cours de thermodynamique)

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\right]$$

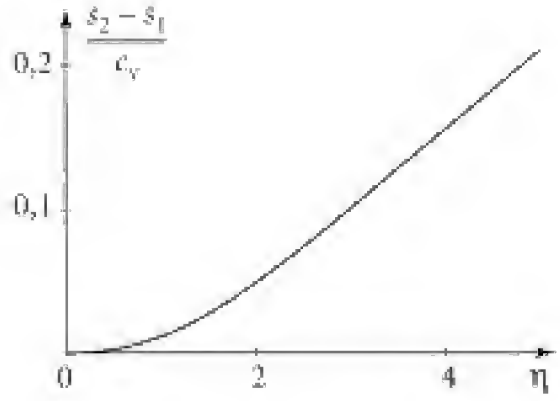
avec s_1 = entropie massique et c_v capacité thermique massique à volume constant.
Soit en fonction de η :

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_v \ln\left\{(\eta + 1)\left[\frac{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2\gamma}\eta}{1 + \dfrac{\gamma + 1}{2\gamma}\eta}\right]^{\gamma}\right\}}$$

Copyrighted material

On a bien évidemment $s_2 - s_1)_{\eta=0} = 0$, et il est aisé de vérifier que $(s_2 - s_1)$ est une fonction monotone croissante de η.

Le processus envisagé est adiabatique et **irréversible**. La variation d'entropie associée à la traversée de l'onde de choc (dans le sens (1) → (2)) ne peut donc être que positive (second principe) : $s_2 - s_1 > 0$. Ce qui impose : $\eta > 0$ et $P_2 > P_1$.

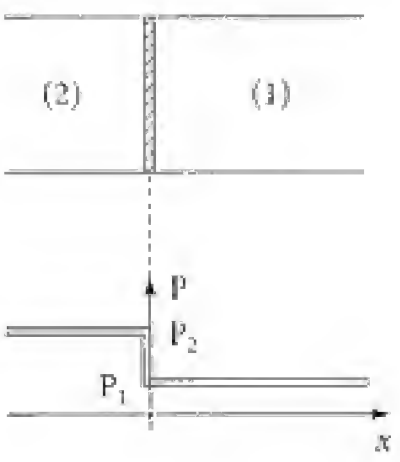


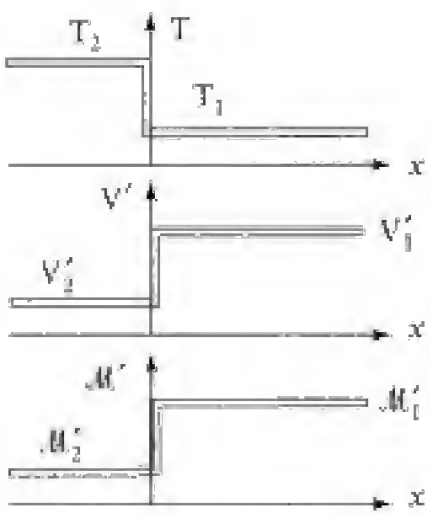
Le passage de l'onde de choc se traduit par une compression du fluide, et d'après la relation donnée dans l'énoncé au **2. a.** et des expressions (6), (7) : $\rho_2 > \rho_1$; $T_2 > T_1$ et $V_2' < V_1'$.

D'autre part, on a $\mathcal{M}_1' > 1$ et $\mathcal{M}_2' < 1$ d'après les relations fournies dans l'énoncé :

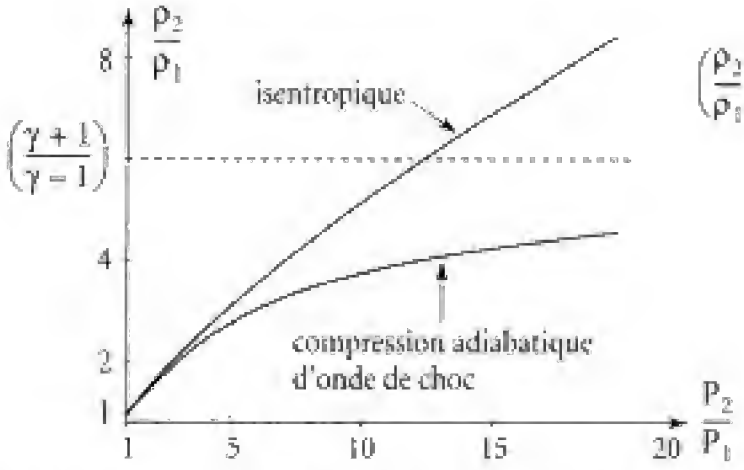
$$\mathcal{M}_1'^2 = \left(\frac{V_1'}{c_1}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\eta \quad (8) \text{ et } \mathcal{M}_2'^2 = \left(\frac{V_2'}{c_2}\right)^2 = 1 - \frac{\gamma+1}{2\eta}\frac{\eta}{\eta+1} \quad (9)$$

Il apparaît donc que la vitesse est supersonique ($\mathcal{M}_1' > 1$) en amont de l'onde de choc et subsonique en aval ($\mathcal{M}_2' < 1$).





Copyrighted material



$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\text{isentropique}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma}$$

L'écoulement passe, dans $\mathcal{R}'$, de la vitesse supersonique à la vitesse subsonique mais avec une pression plus élevée ($P_2 > P_1$).

Commentaire

Démontrons les expressions (8) et (9).

Nous avons établi que : $V_2'^2 - V_1'^2 = (P_1 - P_2)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$, avec $V_2' = V_1'\frac{\rho_1}{\rho_2}$

soit : $V_1'^2\left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right) = \frac{P_1}{\rho_1}\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$

c'est-à-dire :

$$V_1'^2 = \frac{P_1}{\rho_1}\frac{\eta}{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}} = \gamma\frac{P_1}{\rho_1}\left[1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\eta\right].$$

Introduisons les vitesses du son dans les conditions (P_1, ρ_1) et (P_2, ρ_2).

Elles sont définies par les relations : $c_1^2 = \frac{\gamma P_1}{\rho_1}$ et $c_2^2 = \frac{\gamma P_2}{\rho_2}$ $\left(c_i = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s\right)$.

D'où : $\boxed{\mathcal{M}_1'^2 = \left(\frac{V_1'}{c_1}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\eta}$ $\left(\mathcal{M}_1' = \frac{V_1'}{c_1} = \text{nombre de Mach}\right)$.

La relation donnant $\frac{V_2'}{c_2}$ se déduit de la précédente par permutation d'indice, c'est-à-dire en substituant à $\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)$ la quantité : $\frac{P_1}{P_2} - 1 = \frac{1}{\eta+1} - 1 = \frac{-\eta}{\eta+1}$; d'où :

$$\boxed{\mathcal{M}_2'^2 = \left(\frac{V_2'}{c_2}\right)^2 = 1 - \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{\eta}{\eta+1}}$$

2. c. L'application numérique donne pour $c = 2\,500\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $V_1 = 0$; $P_1 = 10^5\ \text{Pa}$; $T_1 = 300\ \text{K}$:

$$V_1' = c = 2\,500\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} ; \quad \mathcal{M}_1' = \frac{V_1'}{c_1} = \frac{2\,500}{347} = 7{,}20.$$

Copyrighted material

Soit d'après (10) : $\eta = 59{,}4 \Rightarrow P_2 = 60$ bars

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 5{,}47 : \begin{cases} \rho_1 = 1{,}16\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \rho_2 = 6{,}35\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

$M_2' = 0{,}40$ (par (11)) et $V_2' = 457\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $T_2 = 3\,310$ K.

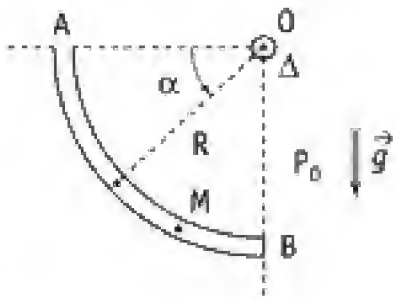
Commentaires

· Ce phénomène peut prendre naissance dans une tuyère du type convergente-divergente.

407 Vidange d'un tube coudé

Le tube AB, en forme de quart de cercle de rayon R, possède une section constante s. Il est rempli d'un liquide de masse volumique ρ (fluide incompressible, homogène et parfait). À $t = 0$, on ouvre la vanne située en B.

On supposera que le diamètre du tube est très faible devant son rayon moyen R.



1. Déterminer, « juste » après l'ouverture de la vanne, la chute de pression en M.

2. Déterminer l'équation en $\alpha(t)$ où α est l'angle polaire repérant le niveau supérieur du fluide dans le tube :

a. à partir de l'équation d'Euler,

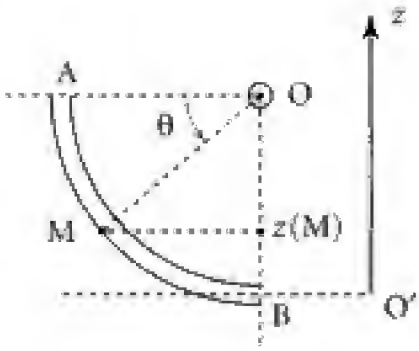
b. en effectuant un bilan de moment cinétique,

c. à partir du théorème de l'énergie cinétique.

Solution

1. Avant l'ouverture de la vanne, le fluide est en équilibre hydrostatique. Nous avons donc :

$$\frac{P(M)}{\rho} + gz(M) = \frac{P(A)}{\rho} + gR.$$



Or l'extrémité en A est ouverte, d'où : $P(A) = P_0$

et : $P(M) = P_0 + \rho g(R - z(M))$,

c'est-à-dire avec $z(M) = R(1 - \sin\theta(M))$:

$$P(M) = P_0 + \rho R \sin\theta(M).$$

À l'ouverture de la vanne, la pression en B passe à la valeur P_0.

Le fluide va quitter le tube avec une vitesse $v(t)$ croissant dans le temps.

Copyrighted material

Assimilons la veine de fluide à un tube de courant. L'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}(P + \rho gz) \quad (1)$$

Intégrons cette équation à $t = 0^+$ (« juste » après l'ouverture de la vanne) le long du tube de courant (de A à B) :

$$\rho\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{\delta l} = -\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho gz)\cdot\vec{\delta l} = -[P + \rho gz]_A^B.$$

Or $P_A = P_0$ et $P_B(0^+) = P_0$.

D'autre part, $(z_B - z_A)_{0^+} = -R$, soit $\rho\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{\delta l} = \rho gR$.

Notons maintenant que $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$ (mouvement circulaire de rayon R), et $\vec{\delta l} = R\,d\theta\,\vec{\tau}$

d'où $$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{\delta l} = R\frac{dv}{dt}d\theta.$$

Remarquons enfin que le fluide étant incompressible, le débit volumique est le même à travers toute section du tube, et la vitesse $\vec{v}$ a une même norme à un instant donné au sein du fluide.

Soit $$\rho\left(\frac{dv}{dt}\right)_{0^+} R\frac{\pi}{2} = \rho gR \quad \text{et} \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_{0^+} = \frac{2g}{\pi}.$$

Pour déterminer l'expression de $P(M, t = 0^+)$, intégrons à nouveau (1) de A à M :

$$\rho\int_A^M \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{0^+}\cdot\vec{\delta l} = -[(P(M, t = 0^+) - P_0) + \rho g(0 - R\sin\theta(M))].$$

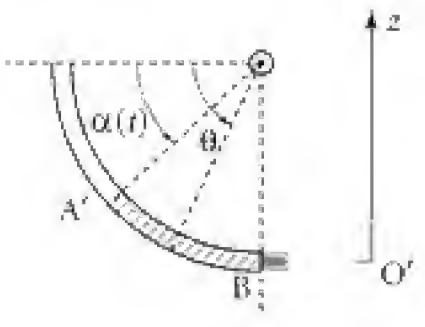
Soit : $P(M, t = 0^+) = P_0 + \rho gR\sin\theta(M) - \rho\left(\frac{dv}{dt}\right)_{0^+} R\theta.$

Finalement : $P(M, t = 0^+) = P_0 + \rho gR\sin\theta(M) - \frac{2\rho g\theta}{\pi}.$

$$\boxed{P(M, t = 0^+) - P(M, t = 0^-) = -\frac{2\rho g}{\pi}\theta(M)}$$

2. a. Reprenons le raisonnement précédent.

À l'instant t, A est en A'. D'où :



$$\rho\int_{A'}^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{\delta l} = -[\rho gz]_{A'}^B.$$

D'où : $\rho\frac{dv}{dt}\cdot R\left(\frac{\pi}{2} - \alpha(t)\right) = +\rho gR(1 - \sin\alpha)$

avec $v = R\frac{d\alpha}{dt}$

d'où $$\boxed{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{R}(1 - \sin\alpha)}$$

Copyrighted material

2. b. Appliquons le théorème du moment cinétique scalaire, par rapport à l'axe (O, Δ), au fluide qui, à l'instant t, se trouve encore dans le tube. Il s'agit donc d'un système particulaire :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta^{ext}.$$

Or $\sigma_\Delta(t) = m(t)v(t)R$ ($m(t) \equiv$ masse de fluide contenue dans le tube à l'instant t).

Entre t et $t + dt$, il sort une masse $\delta m' = \rho s v dt$, elle emporte un moment cinétique par rapport à Δ : $\sigma'_\Delta = Rv\delta m'$. On a donc à $t + dt$:

$$\sigma_\Delta(t + dt) = m(t + dt)v(t + dt)R + \delta\sigma'_\Delta = m(t + dt)v(t + dt)R + Rv\delta m'.$$

D'où : $\dfrac{d\sigma_\Delta}{dt} = \lim\limits_{dt \to 0}\left\{\dfrac{\sigma_\Delta(t + dt) - \sigma_\Delta(t)}{dt}\right\}$

et : $\dfrac{d\sigma_\Delta}{dt} = R\dfrac{d}{dt}(mv) + Rv\dfrac{dm'}{dt}$.

La conservation de la masse implique de plus : $\dfrac{dm'}{dt} = -\dfrac{dm}{dt}$.

Finalement, nous obtenons $\dfrac{d\sigma_\Delta}{dt} = Rm(t)\dfrac{dv}{dt}$.

Soit, avec $m(t) \# \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)s R\rho$ et $v = R\dfrac{d\alpha}{dt}$:

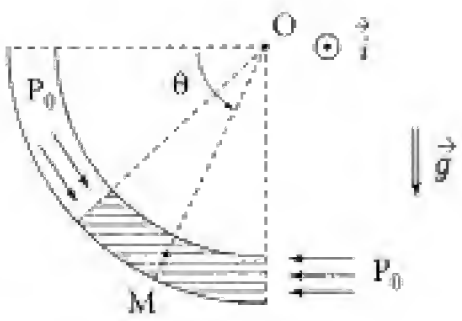
$$\boxed{\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \rho s R^3\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}}$$

Calculons maintenant $\mathcal{M}_\Delta^{ext}$.

Les forces de pression en amont et en aval (P_0) donnent un moment résultant selon (O, Δ) globalement nul.

Les forces de réaction exercées par le tube sont localement situées dans un plan de section du tube qui contient l'axe (O, Δ). Leur moment par rapport à cet axe est donc nul.

Il reste donc le moment des forces de pesanteur s'exerçant sur le fluide.



$$\mathcal{M}_\Delta = \int(\overrightarrow{OM} \wedge \delta m\vec{g}) \cdot \vec{i}\,; \quad \delta m = \rho s R\delta\theta \text{ et } \mathcal{M}_\Delta = R\rho s R g\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta.$$

Soit : $\mathcal{M}_\Delta \# \rho s R g(1 - \sin\alpha)$.

D'où l'équation de mouvement après simplification par $\rho s R^2$:

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{R}(1 - \sin\alpha)}$$

Copyrighted material

2. c. Utilisons maintenant le théorème de la puissance cinétique. Il s'écrit :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{int}.$$

On peut prendre comme système le fluide contenu dans le tube à l'instant t (système particulaire).

Il n'y a pas de travail des forces intérieures (fluide parfait → absence de viscosité ; fluide incompressible → absence de travail des forces intérieures de pression).

Quant aux forces extérieures, il y a :

– l'action de P_0 sur les deux extrémités de la veine fluide : les effets s'y compensent $(P_0sv - P_0sv = 0)$,

– l'action du tuyau sur le fluide : les forces mises en jeu sont perpendiculaires à l'écoulement, et donc ne travaillent pas,

– la pesanteur à laquelle on peut associer une énergie potentielle E_p.

Le théorème de l'énergie cinétique prend alors la forme suivante :

$$\frac{DE_c}{Dt} + \frac{DE_p}{Dt} = 0 \quad (1)$$

■ **Calculons** $\frac{DE_c}{Dt}$ de la même manière que l'on a déterminé $\frac{D\sigma_\Delta}{Dt}$:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m(t)v^2(t)$$

$$E_c(t + dt) = \frac{1}{2}m(t + dt)v^2(t + dt) + \frac{1}{2}\delta m' v^2(t)$$

et : $\frac{DE_c}{Dt} = \lim_{dt \to 0}\left\{\frac{E_c(t + dt) - E_c(t)}{dt}\right\}$.

D'où : $\frac{DE_c}{Dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(mv^2) + \frac{1}{2}v^2\frac{\delta m'}{dt}$ avec $\frac{\delta m'}{dt} = -\frac{dm}{dt}$.

Soit $$\frac{DE_c}{Dt} = \frac{1}{2}m(t)\frac{d}{dt}v^2 = \rho sR\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)R^2\dot{\alpha}\alpha \quad (2)$$

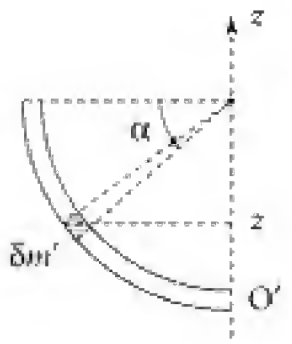
■ **Calculons** $\frac{DE_p}{Dt}$:

À cet effet, prenons l'origine de l'énergie potentielle en O'. Le fluide qui sort du tube emporte ainsi une énergie potentielle nulle. On a donc :

$E_p(t + dt) = E_p(t) - \delta m' gz$ où $z = R(1 - \sin\alpha)$

et $\frac{DE_p}{Dt} = -gR(1 - \sin\alpha)\frac{\delta m'}{dt}$.

Or $\frac{\delta m'}{dt} = -\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\rho sR\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \rho sR\dot{\alpha}$



Copyrighted material

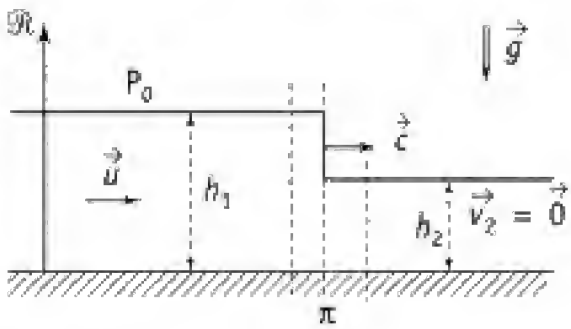
d'où $$\frac{DE_p}{Dt} = -\rho s g R^2(1-\sin\alpha)\dot{\alpha} \quad (3)$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient d'après (1), (2) et (3) :

$$\rho s R\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)R^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = \rho s g R^2(1-\sin\alpha)\dot{\alpha} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\ddot{\alpha} = \frac{g}{R}(1-\sin\alpha)}$$

408 Propagation d'une discontinuité de hauteur d'eau

Dans un canal rectiligne de largeur l constante et de fond horizontal, on observe, dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la propagation d'une **discontinuité** de hauteur d'eau à la célérité $\vec{c} = c\vec{u}_x$ parallèle à la direction $x'x$ du canal.
L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ.



En amont du front d'onde (c'est-à-dire du plan π), les caractéristiques de l'écoulement sont :

- hauteur d'eau constante de valeur h_1 ;
- vitesse uniforme $\vec{v}_1 = u\vec{u}_x$.

En aval, on a :

- hauteur d'eau constante $h_2 < h_1$;
- vitesse nulle $\vec{v}_2 = \vec{0}$.

La pression de l'air surmontant l'eau est P_0.

1. Établir, à partir d'un bilan de masse, une première relation entre les grandeurs c, u, h_1 et h_2.

2. Par application, dans $\mathcal{R}$, du théorème de la résultante dynamique à un système particulaire convenablement choisi, trouver une deuxième relation liant h_1, h_2, c, u et g.

En déduire l'expression de la célérité c en fonction de g, h_1 et h_2.

Que devient ce résultat pour $h_1 - h_2 \ll h_1$? On notera $h_1 = h_0$.

A.N. : calculer c pour $h_0 = 1$ m et $g = 9{,}81$ m · s^{-2}.

3. Comment est modifié le résultat précédent dans le cas où la vitesse $\vec{v}_2 = v_2\vec{u}_x$ en aval n'est pas nulle ?

Copyrighted material

Solution

1. Considérons, à l'instant t, un volume particulaire « ABCDEF » limité par deux sections droites du canal et contenant le front d'onde.

À $t + \mathrm{d}t$, le même système particulaire est passé en A′B′C′D′E′F′A′ avec :

$$D = D' \text{ et } E = E' \quad (v_2 = 0)$$

$$FF' = u\,\mathrm{d}t \text{ et } BB' = CC' = c\,\mathrm{d}t.$$

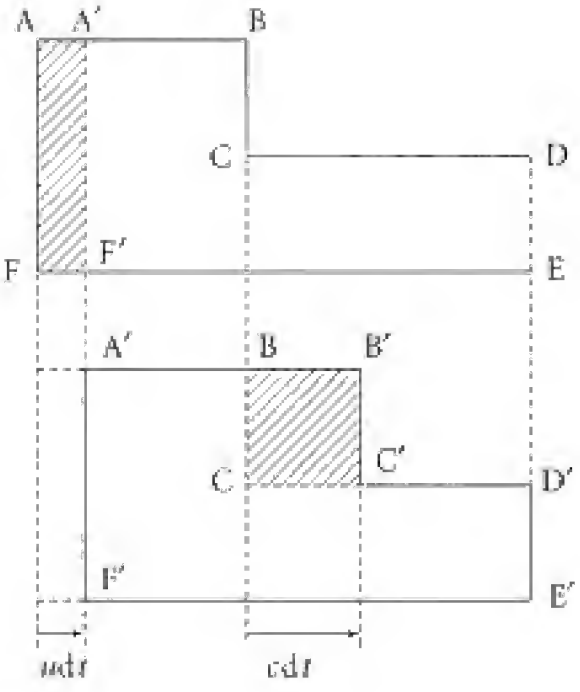
La conservation de la masse se traduit ici par :

$$M(BB'C'C) = M(AA'F'F)$$

soit encore par :

$$\rho l(h_1 - h_2)c\,\mathrm{d}t = \rho l h_1 u\,\mathrm{d}t$$

d'où $\boxed{(h_1 - h_2)c = h_1 u}$ (1)



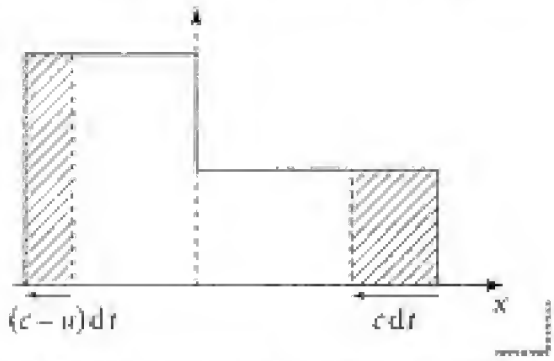
Commentaires

• On a donc $c > u$. Notons que la célérité c n'est en aucune manière la vitesse de la matière.

• On aurait pu également se placer dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au front d'onde. Dans $\mathcal{R}'$, la vitesse du fluide est $-c\vec{u}_x$ en aval et $-(c-u)\vec{u}_x$ en amont. La conservation de la masse s'écrit alors :

$\rho l c h_2\,\mathrm{d}t = \rho l(c-u)h_1\,\mathrm{d}t \Rightarrow (c-u)h_1 = ch_2$

ce qui redonne (1).



2. Appliquons, dans $\mathcal{R}$, le théorème de la quantité de mouvement au système particulaire $\mathcal{S}$ défini au **1.** Nous avons en projection selon Ox :

$$\frac{\mathrm{D}P_x}{\mathrm{D}t} = F_x^{\text{ext}} \quad (2)$$

Avec :

$$P_x(t + \mathrm{d}t) - P_x(t) = \rho \Delta \mathcal{V} u$$

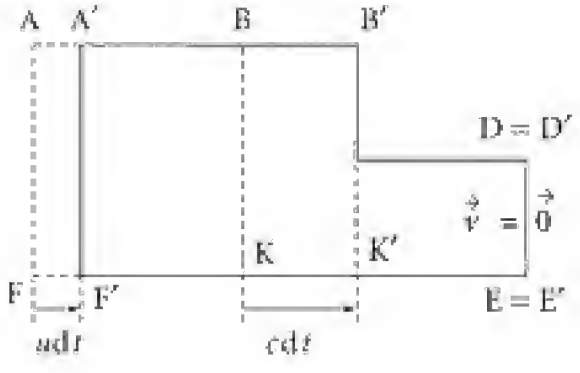
où $\Delta \mathcal{V} = \mathcal{V}(A'B'K'F') - \mathcal{V}(ABKF)$

$$\Delta \mathcal{V} = (c-u)\,\mathrm{d}t\,l\,h_1$$

soit :

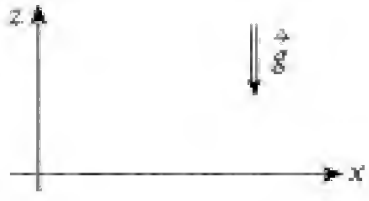
$$P_x(t + \mathrm{d}t) - P_x(t) = \rho l h_1 u(c-u)\,\mathrm{d}t$$

et $\dfrac{\mathrm{D}P_x}{\mathrm{D}t} = \rho l h_1 u(c-u)$ (3)



Copyrighted material

Pour calculer F_x^{ext}, notons $P = P_0 + p$ la pression au sein du fluide. En amont du front d'onde, on est en présence d'un écoulement parallèle de vitesse uniforme $\vec{v} = u\vec{u}_x$. L'équation d'Euler s'écrit alors :



$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho gz)$$

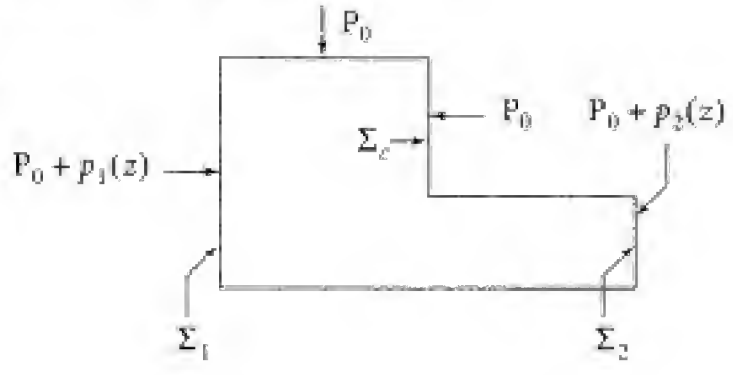
d'où : $P + \rho gz = \text{cste} = P_0 + \rho g h_1 \Rightarrow P = P_0 + \rho g(h_1 - z)$ (4)

De même, en amont ($\vec{v} = \vec{0}$, situation de l'hydrostatique) :

$P = P_0 + \rho g(h_2 - z)$ (5)

et $F_x = \left(\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_c} -P\vec{n}^{ext}\delta\Sigma\right) \cdot \vec{u}_x$

or $\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_c} P_0\vec{n}^{ext}\delta\Sigma = \vec{0}$



Il reste donc :

$$F_x = \left(-\iint p\vec{n}^{ext}\rho\Sigma\right)\vec{u}_x = \int_0^{h_1} p_1(z)l\,dz - \int_0^{h_2} p_2(z)l\,dz, \text{ d'où } F_x = \frac{1}{2}\rho l(h_1^2 - h_2^2) \quad (6)$$

(2), (3) et (6) donnent alors :

$$\rho l h_1 u(c-u) = \frac{1}{2}\rho g l(h_1^2 - h_2^2) \Rightarrow \boxed{h_1 u(c-u) = \frac{1}{2}g(h_1^2 - h_2^2)} \quad (7)$$

et en utilisant la relation (1) déduite de la conservation de la masse :

$$(h_1 - h_2)c = h_1 u \Rightarrow (c-u)h_1 = h_2 c$$

$$(h_1 - h_2)c \cdot \frac{h_2 c}{h_1} = \frac{1}{2}g(h_1 - h_2)(h_1 + h_2).$$

Finalement, nous obtenons : $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{gh_1(h_1 + h_2)}{2h_2}}}$ (8)

• Dans le cas où h_1 est très voisin de h_2 ($h_1 - h_2 \ll h_2 = h_0$), le résultat (8) devient :

$$c = \sqrt{\frac{g}{2h_0}(h_0 + \varepsilon)(2h_0 + \varepsilon)} \Rightarrow \boxed{c \approx \sqrt{gh_0}}$$

On retrouve la célérité des ondes de gravité en eau peu profonde.

A.N. : $c \approx 3{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. Si la vitesse $\vec{v}_2 = v_2\vec{u}_x$ n'est pas nulle en aval, il suffit, pour se ramener au cas précédent, de se placer dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ où le fluide est immobile en aval ($\mathcal{R}'$ est animé de la vitesse $\vec{v}_2$ par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$).

La célérité du front d'onde par rapport à la Terre est alors :

Copyrighted material

$$\vec{c'} = \sqrt{\frac{gh_1(h_1+h_2)}{2h_2}}\vec{u_x} + v_2\vec{u_x}$$

$$\vec{c'} = \left[\sqrt{\frac{gh_1(h_1+h_2)}{2h_2}} + v_2\right]\vec{u_x} \quad \vec{c'} = (c+v_2)\vec{u_x}.$$

Commentaire

Le problème physique présenté ici correspond au phénomène du mascaret observé dans la Gironde et dans la Seine. Il est produit par la marée montante qui déclenche le front d'onde susceptible de remonter le fleuve ($v_2 < 0$ et $c > |v_2|$). Ainsi pour $h_1 = 5$ m, $h_2 = 3$ m et $v_2 = -1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, on obtient $c' \sim 7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ($\sim 25\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$).

Copyrighted material

Copyrighted material

Partie

2

Électromagnétisme

Copyrighted material

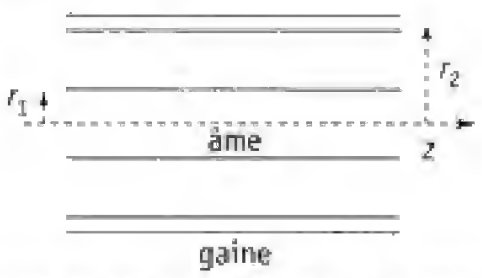
Chapitre

1

Équations de Maxwell

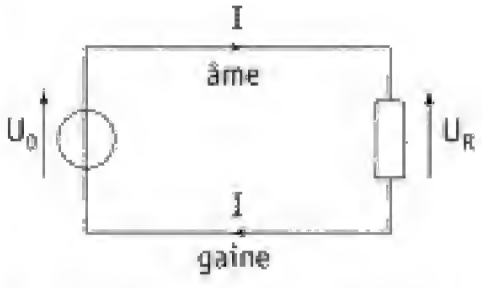
101 Câble coaxial en régime stationnaire

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique central $\mathscr{C}_1$ appelé âme (rayon $r_1 = 0{,}43$ mm, conductivité électrique $\gamma = 5{,}9 \cdot 10^7\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$) et d'un conducteur cylindrique creux concentrique au premier $\mathscr{C}_2$, appelé gaine, (rayon $r_2 = 1{,}47$ mm et $r_3 = 1{,}60$ mm, même conductivité électrique γ). L'espace interconducteurs ($r_1 < r < r_2$) est occupé par un milieu que l'on peut confondre ici avec le vide (ε_0, μ_0).



On admet, dans les conducteurs, la loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. Les conducteurs sont non chargés en volume.

Le câble de longueur $L_c = 1$ m ($L_c \gg r_3$) est alimenté par un générateur de tension constante U_0. Il est fermé sur une résistance $R = 50\ \Omega$: on note U_R la tension aux bornes de R.



1. En supposant que dans les conducteurs $\vec{j} = j(r, z)\vec{u}_z$ montrer qu'il est normal de considérer que les champs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ y sont uniformes. On posera par la suite $\vec{E} = E_1\vec{u}_z$ dans $\mathscr{C}_1$ et $\vec{E} = -E_2\vec{u}_z$ dans $\mathscr{C}_2$. Exprimer ces champs en fonction du courant I traversant le circuit. Déterminer les résistances R_a et R_{ga} de l'âme et de la gaine. Que représente la quantité $U_0 - U_R$?

2. a. Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ donner l'équation différentielle vérifiée par la fonction potentiel $V(r, z)$ dans l'espace $r_1 < r < r_2$. On prendra $V(r_2, 0) = 0$.

On donne : $\Delta V(r, z) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

Montrer qu'une solution du type $V(r, z) = Az + B + (Cz + D) \cdot \ln\dfrac{r}{r_1}$ convient. Déterminer les constantes A, B, C et D en fonction de U_0, E_1, E_2, r_1, et r_2.

b. En déduire les composantes E_r et E_z du champ électrique pour $r_1 < r < r_2$.

Calculer le rapport $\eta = \left|\dfrac{E_z(r_1, 0)}{E_r(r_1, 0)}\right|$.

c. Montrer que les conducteurs portent des charges de surface $\sigma_1 = a_1 - b_1 z$ sur $\mathscr{C}_1$ et $\sigma_2 = a_2 - b_2 z$ sur la surface intérieure de $\mathscr{C}_2$. On déterminera les coefficients a_i et b_i en fonction de ε_0, U_0, E_1, E_2, r_1, et r_2. Que remarque-t-on ?

d. Montrer que l'on peut définir une capacité $\Gamma = \dfrac{\delta C}{dz}$ par unité de longueur du câble : l'exprimer en fonction de ε_0, r_1 et r_2. A.N.

Copyrighted material

3. a. Donner l'expression du champ magnétique pour $r_1 < r < r_2$. Montrer que l'on peut définir – pour l'espace $r_1 < r < r_2$ une inductance $\Lambda = \frac{\delta L}{dz}$ par unité de longueur du câble : l'exprimer en fonction de ε_0, r_1, et r_2. A.N.

b. Quelle relation simple relie Λ et Γ ?

4. Aspect énergétique

a. A-t-on un flux d'énergie électromagnétique selon Oz dans l'âme et dans la gaine ? Peut-on alors considérer que l'énergie électromagnétique est véhiculée par les conducteurs ?

b. A-t-on un flux d'énergie électromagnétique selon Oz dans l'espace interconducteurs ? Calculer ce flux $\Phi(z)$ à travers une section de cote z comprise entre r_1 et r_2 en fonction de I, U_0, E_1, E_2 et z, puis de I et de $U(z) = V(r_1, z) - V(r_2, z)$. Que représentent $\Phi(0)$ puis $\Phi(L_c)$?

c. Déterminer le flux $d\Phi_1$ entrant dans l'âme par sa surface comprise entre z et $z + dz$. Que devient cette puissance ?

d. En prenant également en compte le flux $d\Phi_2$ entrant dans la gaine par sa surface intérieure $r = r_2$ comprise entre z et $z + dz$ proposer un bilan d'énergie pour la tranche de câble située entre z et $z + dz$. Commenter le résultat obtenu.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équations de Maxwell en régime stationnaire.
- Loi d'Ohm locale. Loi d'Ohm en électrocinétique.
- Relations de passage.
- Capacité – Inductance.
- Vecteur de Poynting.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. En régime stationnaire $\vec{j}$ doit être à flux conservatif et à rotationnel nul (*cf.* loi d'Ohm et équation de Maxwell).

2. a. On utilisera la continuité du potentiel à la traversée des surfaces $r = r_1$ et $r = r_2$.

2. c. Les densités de charges de surface se déduisent des relations de passage.

4. Aux composantes B_θ de E_r du champ électromagnétique correspond – pour $r_1 < r < r_2$ – une composante Π_z du vecteur de Poynting et donc un flux d'énergie dans le sens de l'axe Oz du câble.

3. Solution

1. Les conducteurs : étant non chargés en volume en doit vérifier (*cf.* équation de conservation de la charge) $\text{div}\,\vec{j} = 0$.

Copyrighted material

Or $\vec{j} = j(r, z)\vec{u}_z$, d'où $\dfrac{\partial j}{\partial z} = 0 \rightarrow \vec{j} = j(r)\vec{u}_z$.

D'autre part l'équation de Maxwell-Faraday donne en régime indépendant du temps : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$, soit avec $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (loi d'Ohm) : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} = \vec{0}$.

Passons en coordonnées cartésiennes (x, y, z) avec $\vec{j} = j(r)\vec{u}_z = j(\sqrt{x^2+y^2})\vec{u}_z$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \wedge\ 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & j \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial j}{\partial y} = 0$$

j ne dépend donc pas de x, y, z ; c'est une constante.

I désignant le courant traversant une section du conducteur central $\mathcal{C}_1$:

$$\boxed{\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi r_1^2}\vec{u}_z = \gamma E_1 \vec{u}_z} \quad (1)$$

Ce même courant circule, en sens inverse dans $\mathcal{C}_2$:

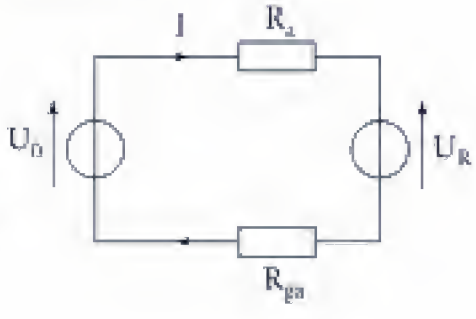
$$\boxed{\vec{j}_2 = -\frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}\vec{u}_z = -\gamma E_2 \vec{u}_z} \quad (2)$$

■ Résistances R_a de l'âme et R_{ga} de la gaine :

$$\boxed{R_a = \frac{1}{\gamma}\frac{L_c}{\pi(r_1^2)}} \quad \boxed{R_{ga} = \frac{1}{\gamma}\frac{L_c}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}} \quad (3)$$

■ On a $R_a I + U_R + R_{ga} I - U_0 = 0$

soit $\boxed{U_0 - U_R = (R_a + R_{ga})I}$ (4)



2. a. ■ L'espace $r_1 < r < r_2$ est non chargé et est assimilable au vide (ε_0, μ_0), on a donc d'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$(\text{div}\vec{E} = 0) \xrightarrow{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V} \boxed{\Delta V = 0} \quad (5)$$

$r_1 < r < r_2$.

■ Envisageons une solution de la forme :

$$V(r, z) = (Az + B) + (Cz + D)\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant L_c \\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2 \end{cases}$$

Copyrighted material

Elle doit vérifier (5), soit $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$, ce qui est réalisé puisque :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 & (V(r,z)\text{ fonction affine de } z \text{ à } r \text{ fixé})\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\left((Cz+D)\cdot\dfrac{1}{r}\right)\right]=\dfrac{\partial}{\partial r}(Cz+D)=0\end{cases}$$

D'autre part on a $V(r_1^-)=V(r_1^+)$ avec $dV(r_1^-)=-E_1dz$, d'où :

$$V(r_1,z)=V(r_1,0)-E_1z.$$

De même $V(r_2^-)=V(r_2^+)$ avec $dV(r_2^+)=E_2dz$, d'où :

$$V(r_2,z)=V(r_2,0)+E_2z,$$

Enfin avec $V(r_1,0)-V(r_2,0)=U_0$ et $V(r_2,0)=0$:

$$\begin{cases}V(r_2,z)=E_2z\\ V(r_1,z)=U_0-E_1z\end{cases}$$

Ce qui donne $U_0-E_1z=Az+B\rightarrow A=-E_1$ et $B=U_0$

$$E_2z=U_0-E_1z+(Cz+D)\ln\frac{r_2}{r_1}\rightarrow C=\frac{E_1+E_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\text{ et }D=-\frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Soit $$\boxed{V(r,z)=U_0-E_1z+[(E_2+E_1)z-U_0]\frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

b. ■ Composantes du champ électrique pour $r_1<r<r_2$.

On a $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}V$: $\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r-\frac{\partial V}{\partial O_z}\vec{u}_z$ (puisque $V=V(r,z)$) ;

$\vec{E}=E_r\vec{u}_r+E_z\vec{u}_z$

avec

$$\boxed{\begin{aligned}E_r&=[-(E_1+E_2)z+U_0]\frac{1}{r\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\\ E_z&=E_1-(E_1+E_2)\frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\end{aligned}}$$

■ Calculons $\eta=\left|\frac{E_z(r_1,0)}{E_r(r_1,0)}\right|$

Copyrighted material

$$\eta = \frac{E_1}{\left[\dfrac{U_0}{\left(r_1 \ln \dfrac{r_2}{r_1}\right)}\right]} = \frac{E_1}{U_0} r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Or $U_0 = (R_a + R_{ga} + R)I$ et $E_1 = \dfrac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \dfrac{R_a}{L_c} I$

d'où : $\eta = \dfrac{R_a}{R_a + R_{ga} + R} \cdot \dfrac{r_1}{L_c} \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) \approx \dfrac{R_a}{R} \cdot \dfrac{r_1}{L_c} \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$ (R_a et $R_{ga} \ll R = 50\ \Omega$).

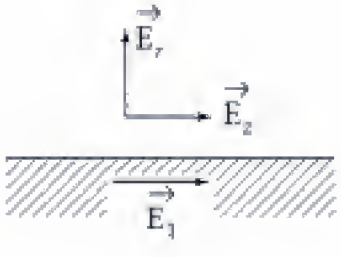
A.N. : $R_a = 2{,}9 \cdot 10^{-2}\ \Omega$; $R_{ga} = 1{,}3 \cdot 10^{-2}\ \Omega$ (les approximations sont justifiées)

$$\eta = 3 \cdot 10^{-7} \text{ (et donc } |E_z(r_1, 0)| \ll |E_r(r_1, 0)| \text{).}$$

c. Les relations de passage donnent :

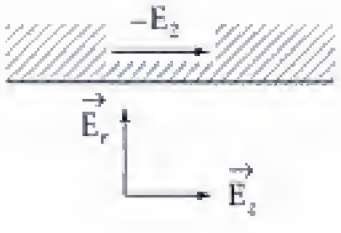
■ $E_z(r_1^+, z) = E_z(r_1^-, z) = E_1$ (déjà réalisé)

et $E_r(r_1^+, z) - 0 = \dfrac{\sigma_1(z)}{\varepsilon_0} \rightarrow \boldsymbol{\sigma_1(z) = \varepsilon_0 E_r(r_1^+, z)}$



soit $\boxed{\sigma_1(z) = \dfrac{\varepsilon_0}{r_1 \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} [U_0 - (E_1 + E_2)z]}$

■ De même $(-E_r(r_2^-, z) - 0) = \dfrac{\sigma_2(z)}{\varepsilon_0}$



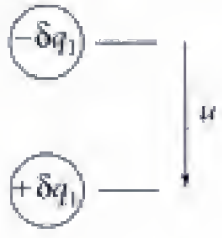
d'où : $\boxed{\sigma_2(z) = -\dfrac{\varepsilon_0}{r_2 \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} [U_0 - (E_1 + E_2)z]}$

Commentaire

On a $\sigma_1(z) \cdot r_1 + \sigma_2(z) r_2 = 0$, résultat conforme au théorème de Gauss…

d. Considérons la portion de câble comprise entre z et $z + dz$. La surface de $\mathscr{C}_1$ porte la charge $\delta q_1 = 2\pi r_1 dz \sigma_1$, et la surface $r = r_2$ de $\mathscr{C}_2$ la charge $\delta q_2 = 2\pi r_2 dz \sigma_2 = -\delta q_1$.
On a donc : $\delta q_1 = 2\pi r_1 \sigma_1(z) dz$

avec $u = V(r_1, z) - V(r_2, z) = [(E_1 + E_2)z - U_0] \left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}\right]$



Copyrighted material

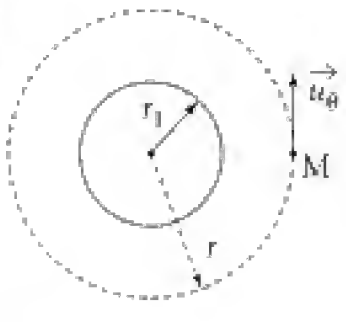
soit en notant δC tel que : $\delta q_1 = \delta C \cdot u$:

$$\delta C = \frac{\delta q_1}{u} = \frac{2\pi \cdot \dfrac{\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} \cdot (U_0 - (E_1 + E_2)z)dz}{[U_0 - (E_1 + E_2)z]} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}dz$$

On peut ainsi définir une capacité par unité de longueur du câble $\Gamma = \dfrac{\delta C}{dz}$ telle que :

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}} \xrightarrow{A.N.} \Gamma = 45\ \text{pF} \cdot \text{m}^{-1}.$$

3. a. ■ Le plan contenant l'axe Oz et passant par M est plan de symétrie ($L_c \gg r_2$), le champ magnétique $\vec{B}$ lui est perpendiculaire, soit $\vec{B} = B(r, z)\vec{u_\theta}$.
Le théorème d'Ampère donne alors ($r_1 < r < r_2$) :



$$B(r, z)2\pi r = \mu_0 I \rightarrow \vec{B}(r, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$$

■ Revenons à la partie de câble de longueur dz. L'énergie magnétique contenus dans la région ($r_1 < r < r_2$) vaut :

$$\delta E_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0}dz = \frac{1}{2\mu_0}\left(\int_{r_1}^{r_2} B^2 2\pi r dr\right)dz$$

soit encore $$\delta E_m = \frac{\pi}{\mu_0}dz\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)dz$$

Expression que l'on peut réécrire en introduisant le coefficient d'inductance δL associé, défini selon :

$$\delta E_m = \frac{1}{2}I^2\delta L$$

d'où une inductance par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{\delta L}{dz}$ telle que :

$$\boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \rightarrow \Lambda = 25\ \mu\ \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$$

b. Il vient $\Lambda\Gamma = \mu_0\varepsilon_0 \rightarrow \boxed{\Lambda\Gamma = \dfrac{1}{c^2}}$

c représente la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

4. a. Dans l'âme $\vec{E} = E_1\vec{u_z}$ et $\vec{B} = B\vec{u_\theta}$, le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E_1} \wedge \vec{B}$ n'y possède donc pas de composante parallèle à Oz : le flux d'énergie à travers l'âme est ainsi nul. Il en est de même pour la gaine.

Copyrighted material

b. ■ Dans l'espace interconducteurs ($r_1 < r < r_2$) on a :

$$\Pi_z = \vec{\Pi}\cdot\vec{u_z} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\wedge\vec{B})\cdot\vec{u_z} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(B\vec{u_\theta}\wedge\vec{u_z}) = \frac{B}{\mu_0}\vec{E}\cdot\vec{u_r} = \frac{1}{\mu_0}B\cdot E_r$$

$$\text{d'où } \Phi(z) = \frac{1}{\mu_0}\int_{r_1}^{r_2} BE_r\,2\pi r\,dr = \frac{1}{\mu_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{[U_0-(E_1+E_2)z]}{r\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}2\pi r\,dr$$

$$\Phi(z) = I\cdot[U_0-(E_1+E_2)z]\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}.$$

Finalement :

$$\boxed{\Phi(z) = I\cdot[U_0-(E_1+E_2)z]}$$

■ et en introduisant $U(z) = V(r_1, z) - V(r_2, z) = U_0 - (E_1 + E_2)z$ en obtient :

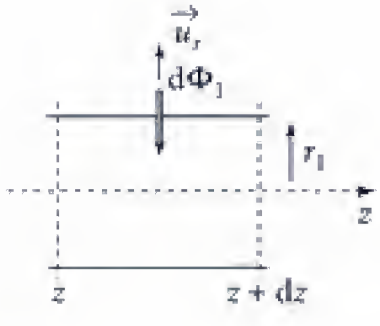
$$\boxed{\Phi(z) = IU(z)}$$

On a : $(\Phi(0) = IU_0) \equiv$ puissance disponible aux bornes du générateur.

et $(\Phi(L_c) = IU_R) \equiv$ puissance dissipée dans le résistor R.

c. ■ On a $d\Phi_1 = \vec{\Pi}(r_1^+, z)\cdot(-\vec{u_r})2\pi r_1\,dz$

soit $d\phi_1 = -2\pi r_1\,dz\Pi_r(r_1^+, z)$



or $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\cdot[(E_r\vec{u_r} + E_z\vec{u_r})\wedge B\vec{u_\theta}]$

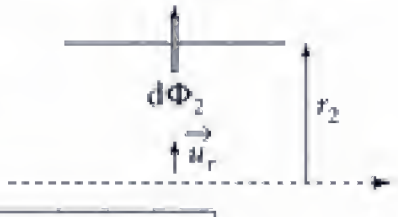
d'où $\Pi_r = -\frac{1}{\mu_0}BE_z$

Dès lors : $d\Phi_1 = \frac{1}{\mu_0}2\pi r_1\,dz\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\cdot E_1 \quad (E_z(r_1^+) = E_1)$

et $d\Phi_1 = IE_1\,dz \xrightarrow{(1)} d\Phi_1 = \frac{I^2}{\gamma\pi r_1^2}dz \xrightarrow{(3)} \boxed{d\Phi_1 = R_a\frac{dz}{L_c}I^2}$

■ Cette puissance rayonnée à travers la surface $r = r_1$ sera dissipée par effet Joule dans la portion de longueur dz du conducteur $\mathcal{C}_1$ (et de résistance $dR_a = R_a\frac{dz}{L_c}$).

d. De même $d\Phi_2 = 2\pi r_2\,dz\Pi_r(r_2^-, z)$



et $d\Phi_2 = (2\pi r_2\,dz)\cdot\left(-\frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}\cdot(-E_2)\right)$

car $E_z(r_2^+, z) = -E_2$

d'où : $d\Phi_2 = IE_2\,dz = \frac{I^2}{\pi(r_3^2 - r_2^2)\gamma}dz \rightarrow \boxed{d\Phi_2 = R_{ga}\frac{dz}{L_c}I^2}$

Copyrighted material

(même remarque…)

Le bilan de puissance se traduit par :

$$\Phi(z) = \Phi(z + dz) + d\Phi_1 + d\Phi_2$$

soit encore :

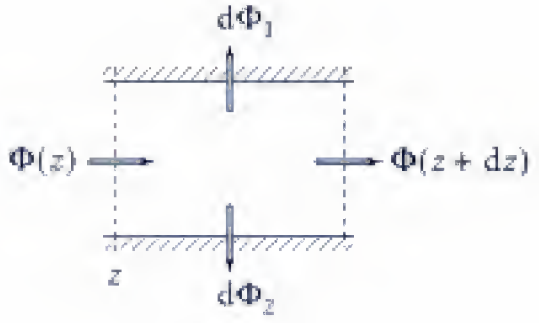
$$\Phi(z) - \Phi(z + dz) = d\Phi_1 + d\Phi_2$$

$$\text{et } -\frac{d\Phi}{dz}dz = d\Phi_1 + d\Phi_2$$

$$\text{or } \Phi = LU(z), \quad d\Phi_1 = R_a \frac{dz}{L_c} I^2$$

$$\text{et } d\Phi_2 = R_{ga} \frac{dz}{L_c} I^2$$

$$\text{d'où : } -l\frac{dU(z)}{dz} = I^2 \cdot \left(\frac{R_a}{L_c} + \frac{R_{ga}}{L_c}\right) \rightarrow \boxed{-\frac{dU}{dz} = \left(\frac{R_a}{L_c} + \frac{R_{ga}}{L_c}\right) I}$$



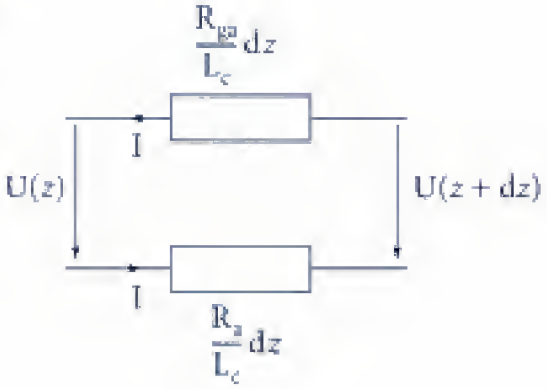
Ce qui correspond bien au schéma électrique suivant (*cf.* figure), pour lequel on a :

$$\frac{R_a}{L_c} dz\, I + U(z + dz) + \frac{R_{ga}}{L_c} dz\, I - U(z) = 0$$

ce qui donne :

$$-(U(z + dz) - U(z)) = \left(\frac{R_a}{L_c} + \frac{R_{ga}}{L_c}\right) I\, dz$$

$$\rightarrow -\frac{dU}{dz} = \left(\frac{R_a}{L_c} + \frac{R_{ga}}{L_c}\right) I.$$



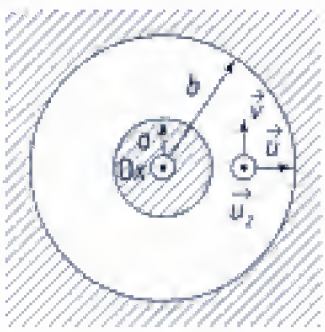
102 Câble coaxial en régime sinusoïdal

Un câble coaxial (rayon intérieur *a*, rayon extérieur *b*) est parcouru (dans l'espace compris entre ses deux armatures parfaitement conductrices) par une onde électromagnétique dont le champ électrique, en notation complexe, est de la forme :

$$\vec{E} = E_0(r)\exp j(kz - \omega t)\,\vec{u}$$

(en coordonnées cylindriques : r, θ, z) et le champ magnétique de la forme :

$$\vec{B} = \vec{B}_0(r)\exp j(kz - \omega t).$$



Copyrighted material

On supposera que l'espace $a < r < b$ est assimilable au vide (ε_0, μ_0), et on admettra que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans les conducteurs.

1. Calculer $E_0(r)$ en fonction de a, r et $E_1 = \lim_{r \to a^+} E_0(r)$.

2. Déterminer le champ $\vec{B}_0(r)$ à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

a. Sous forme locale :

on donne la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(A\vec{u}) = A\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}A \wedge \vec{u}.$$

Commenter les résultats obtenus pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

b. sous forme intégrale.

3. Établir une autre relation entre $B_0(r)$ et $E_0(r)$. En déduire que l'on a $k = \dfrac{\omega}{c}$.

4. Des densités surfaciques de courant $\vec{j}_s$ et de charge σ apparaissent à la surface des armatures. Calculer à partir des relations de passage, et sur chaque conducteur :

a. les densités de charge σ_a et σ_b. Commenter.

b. les densités de courant $\vec{j}_{s_a}$ et $\vec{j}_{s_b}$. Commenter.

c. Vérifier le principe de conservation de la charge.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équations de Maxwell (forme locale, forme intégrale).
- Relations de passage : charges et courants de surface.
- Conservation de la charge.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On prendra un volume torique d'axe Oz et de section rectangulaire $(dz \times dr)$ et on appliquera le théorème de Gauss.

2. b. Prendre un contour rectangulaire $(dz \times dr)$ contenu dans un plan θ = cste.

3. Prendre un contour $(dz \times r\,d\theta)$ s'inscrivant sur un cylindre d'axe Oz et de rayon r.

4. On pourra définir la densité de charge $\lambda(z, t)$ par unité de longueur portée par le conducteur intérieur ainsi que le courant $I(z, t)$ y circulant, puis faire un bilan de charges sur un élément de longueur dz.

Copyrighted material

3. Solution

1.

Point méthode

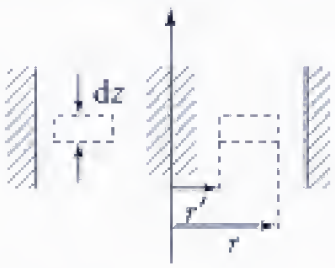
À l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (forme locale) correspond la forme intégrale :

$\iint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u}^{ext} \cdot \delta\Sigma = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$ (Q_{int} = charge contenue le volume $\mathcal{V}$ de frontière Σ)

soit encore $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$ (1).

On peut ainsi calculer $\vec{E}$ lorsque les symétries du problème sont suffisantes…

Ici $\vec{E} = E_0(r)\exp j(kz - \omega t)\vec{u}$. Nous allons donc appliquer la résultat précédent (1) au volume $\mathcal{V}$ correspondant à un « anneau » dessiné en pointillés sur la vue en coupe ci-contre (hauteur dz, rayons intérieur r' et extérieur r. Le volume n'étant pas chargé $Q^{int} = 0$ et $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = 0$, d'où :



$$[2\pi r E_0(r) - 2\pi r' E_0(r')]\exp j(kz - \omega t)dz = 0$$

On a $rE_0(r) = r'E_0(r')$ et en faisant tendre r' vers a :

$$\boxed{E_0(r) = \frac{a}{r}E_1} \quad (2)$$

2. a. Considérons l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Elle s'écrit avec les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ données dans l'énoncé et le résultat (2) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\frac{a}{r}E_1\exp j(kz - \omega t)\,\vec{u}\right] = j\omega\vec{B}_u(r)\exp j(kz - \omega t).$$

Appliquons alors la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\Big[\underbrace{\frac{aE_1}{r}\exp j(kz - \omega t)\,\vec{u}}_{A(r,z,t)}\Big] = A\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}A \wedge \vec{u}.$$

On vérifiera sans difficultés que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) = \vec{0}$ (à cet effet on peut repasser en coordonnés cartésiennes avec $\vec{u} = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right]$…)

De plus $\overrightarrow{\text{grad}}A = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{u} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{u}_z$

et $\overrightarrow{\text{grad}}A \wedge \vec{u} = \dfrac{\partial A}{\partial z}(\vec{u_z} \wedge \vec{u}) = \dfrac{\partial A}{\partial z}\vec{v} = \dfrac{ja\,E_1 k}{r}\exp j(kz - \omega t)\vec{v}$.

D'où $$\boxed{\vec{B}_0(r) = \frac{aE_1}{r}\frac{k}{\omega}\vec{v}} \quad (3)$$

Commentaires

On a obtenu :

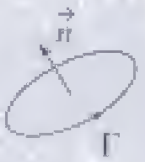
$$\underline{\vec{E}} = \frac{a}{r}E_1 \exp[j(kz - \omega t)]\vec{u} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \frac{aE_1}{r}\frac{k}{\omega}\exp[j(kz - \omega t)]\vec{v}.$$

Nous pouvons remarquer que l'on a également $\underline{\vec{B}} = \dfrac{k}{\omega}\vec{u_z} \wedge \underline{\vec{E}}$, relation identique à celle obtenue pour une OPPH dans le vide « illimité ». Il s'agit en fait d'une onde progressive (selon Oz, terme en $\exp[j(kz - \omega t)]$, harmonique (pulsation ω), non plane (*cf.* $E_0(r)$ et $B_0(r)$) et transverse ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ perpendiculaires à la direction de propagation). De plus on ne peut pas encore affirmer à ce stade que $k = \dfrac{\omega}{c}$ ...

b.

POINT MÉTHODE

À l'équation de Maxwell-Faraday locale $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ correspond la forme intégrale :

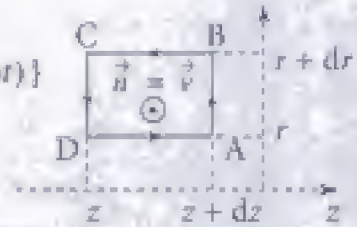


$$\mathcal{C}(\vec{E}) = \oint_\Gamma \vec{E} \cdot \delta\vec{\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{n}\,\delta\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot \delta\Sigma.$$

Σ : surface orientée s'appuyant sur le contour fermé fixe Γ.

Soit $\mathcal{C}_\Gamma(\vec{E}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_\Sigma(\vec{B})$ (4)

Choisissons le contour élémentaire ABCD :



$\mathcal{C}(\vec{E}) = E_0(r)\,dr\,\{\exp j(k(z + dz) - \omega t) - \exp j(kz - \omega t)\}$

$\mathcal{C}(\vec{E}) = jkE_0(r)\exp j(kz - \omega t)\,dz\,dr.$

De plus $\vec{B} = B\vec{v}$, soit :

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = B_0(r)\exp j(kz - \omega t) \cdot dr\,dz.$$

Reportant ces résultats dans (4) et après simplifications par $\exp j(kz - \omega t)\,dr\,dz$. :

$$jkE_0(r) = +j\omega B_0(r) \rightarrow B_0(r) = \frac{k}{\omega}E_0(r) \quad (3') \text{ (identique à (3)).}$$

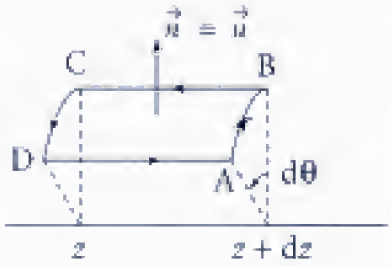
À l'équation de Maxwell-Ampère locale $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ correspond la forme intégrale :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\delta\vec{\ell} = \mu_0\underbrace{\iint_\Sigma \vec{j}\cdot\vec{n}\,\delta\Sigma}_{I} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}\,\delta\Sigma.$$

Σ surface orienté s'appuyant sur le contour Γ.

Soit encore $\mathscr{C}_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\phi_\Sigma(\vec{E})}{\partial t}$.

■ Considérons alors le contour élémentaire $\Gamma = (ABCD)$, dessiné sur le cylindre d'axe Oz et de rayon r, de langueur dz et de largeur $r\,d\theta$.



$$\cdot\ \mathscr{C}_\Gamma(\vec{B}) = -B_0(r)\exp[j(k(z+dz)) - \omega t]r\,d\theta + B_0(r)\exp[j(kz-\omega t)r\,d\theta]$$
$$= -jkB_0(r)\exp j(kz-\omega t)r\,d\theta\,dz.$$

$$\cdot\ \mu_0 I = 0.$$

$$\cdot\ \phi(\vec{E}) = E_0(r)\exp[j(kz-\omega t)]r\,d\theta\,dz$$

d'où après simplifications $-jkB_0(r) = \dfrac{1}{c^2}(-j\omega)E_0(r) \rightarrow \boxed{B_0(r) = +\dfrac{\omega}{c^2k}E_0(r)}$ (5)

■ Des relations (3) et (5) nous déduisons :

$$\frac{\omega}{c^2k} = \frac{k}{\omega} \rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

(pour une onde se propageant dans le sens positif de l'axe des z).

Commentaires

Pour le telles ondes le câble coaxial n'est pas dispersif ($v_\varphi = c$ = cste).

3. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans les conducteurs parfaits. On a donc :

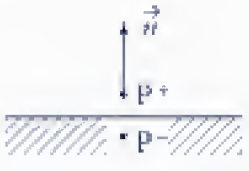
$\vec{E}(r = a^-, z, t) = \vec{0}$; $\vec{B}(r = a^-, z, t) = \vec{0}$

et $\vec{E}(r = b^+, z, t) = \vec{0}$; $\vec{B}(r = b^+, z, t) = \vec{0}$.

Les relations de passage permettent de déterminer les éventuels courants et charges de surface.

4. a. Pour le champ électrique on a :

$$\vec{E}(P^+, t) - \vec{E}(P^-, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n},$$



P^- appartenant au milieu conducteur $\vec{E}(P^-, t) = \vec{0}$ et donc :

$$\vec{E}(P^+, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}.$$

■ En $r = a$, il vient $\vec{n} = \vec{u}$ et $\vec{E}(P^+, t) = E_1 \exp j(kz - \omega t)\vec{u}$, soit :

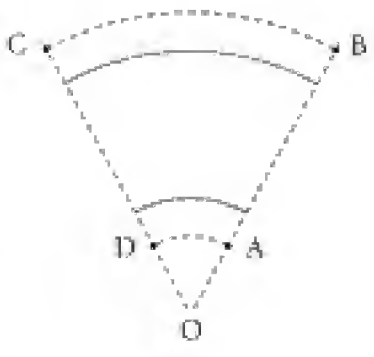
$$\boxed{\sigma_a(z, t) = \varepsilon_0 E_1 \exp j(kz - \omega t)}$$

■ En $r = b$, nous avons $\vec{n} = -\vec{u}$ et $\vec{E}(P^+, t) = \frac{a}{b} E_1 \exp j(kz - \omega t) \cdot \vec{u}$,

$$\boxed{\sigma_b(z, t) = -\frac{a}{b}\varepsilon_0 E_1 \exp j(kz - \omega t)}$$

Commentaires

Considérons le volume cylindrique δ^3V de longueur dz et de section [ABCD], les arcs de cercles BC et DA étant contenus dans les milieux conducteurs.



On a d'après le théorème de Gauss : $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$

(Σ : surface délimitant δ^3V).

Or $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = 0$ (sur la surface bordant δ^3V on a $\vec{E} = \vec{0}$ dans les conducteurs ou E perpendiculaire à la surface).

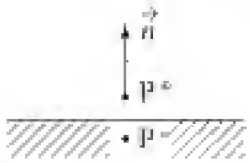
De plus $Q^{int} = \sigma_a(z, t)a\,d\theta\,dz + \sigma_b(z, t)b\,d\theta\,dz$

d'où :

$$a\sigma_a(z, t) + b\sigma_b(z, t) = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_b(z, t) = -\frac{a}{b}\sigma_a(z, t)}$$

b. Pour le champ magnétique :

$$\vec{B}(P^+, t) - \vec{B}(P^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}.$$



Or P^- appartenant au milieu conducteur $\vec{B}(P^-, t) = \vec{0}$ et donc :

$$\vec{B}(P^+, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}.$$

■ En $r = a$, $n = \vec{u}$ et $\vec{B}(P^+, t) = \frac{k}{\omega} \cdot E_1 \exp j(kz - \omega t)\vec{v} = \frac{E_1}{c}\exp j(kz - \omega t)\vec{v}$

d'où : $\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} = \frac{E_1}{c}\exp j(kz - \omega t)\vec{v}$

et $\vec{j}_s$ n'ayant pas de composante selon $\vec{u}$: $\mu_0 \vec{j}_s = \frac{E_1}{c}\exp j(kz - \omega t)\vec{u}_z$

Soit :

$$\boxed{\vec{j}_{s_a} = \frac{E_1}{\mu_0 c}\exp j(kz - \omega t)\vec{u}_z}$$

■ En $r = b$, le même raisonnement conduit avec $\vec{n} = -\vec{u}$

Copyrighted material

et $\vec{B}(P^{\pm}, t) = \frac{1}{c}\frac{aE_1}{b}\exp j(kz - \omega t)\vec{v}$

$$\boxed{\vec{j}_{s_b} = -\frac{a}{b}\frac{E_1}{\mu_0 c}\exp j(kz - \omega t)\vec{u}_z}$$

Commentaires

Le contour Γ étant entièrement contenu dans l'armature conductrice extérieure on a :

$$\mathcal{C}_\Gamma(\vec{B}) = 0.$$

Or $\mathcal{C}_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I + \frac{\partial}{\partial t}\Phi_\Sigma(\vec{E})$.

Mais $\vec{E} = E\vec{u}$, et le flux de $\vec{E}$ à travers le disque s'appuyant sur Γ est nul. Dès lors $I = 0$.

Avec $I = j_{s_a} 2\pi a + j_{s_b} 2\pi b$ ($\vec{j}_{s_a} = j_{s_a}\vec{u}_z$ et $\vec{j}_{s_b} = j_{s_b}\vec{u}_z$)

Finalement on a bien : $\boxed{j_{s_a} a = -j_{s_b} b}$

c. L'intensité totale qui parcourt le conducteur central, comptée algébriquement selon Oz vaut :

$$I_1 = \vec{j}_{s_a} \cdot (2\pi a\,\vec{u}_z) \rightarrow I_1 = \frac{E_1}{\mu_0 c} \cdot 2\pi a \cdot \exp j(kz - \omega t).$$

De même la charge $\lambda\,dz$ d'une partie de hauteur dz du conducteur central est définie selon :

$$\lambda\,dz = \sigma_a 2\pi a\,dz \rightarrow \lambda = 2\pi a\sigma_a$$

soit : $$\lambda = \varepsilon_0 E_1 \cdot 2\pi a \cdot \exp j(kz - \omega t).$$

La conservation de la charge se traduit pour le cylindre de hauteur dz

$$\frac{d}{dt}(\delta Q) = I(z, t) - I(z + dz, t).$$

Or $\delta Q = \lambda(z, t)\,dz$ et $\frac{d(\delta Q)}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}dz$

Soit encore : $\frac{\partial \lambda}{\partial t}dz = -\frac{\partial I}{\partial z}dz$, d'où $\boxed{\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0}$

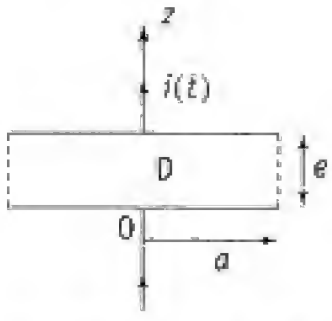
Commentaires

Les résultats obtenus aux questions 1-2-3 sont bien compatibles avec l'équation de conservation de la charge (ce qui n'est guère étonnant puisque les équations de Maxwell contiennent cette dernière : *cf.* équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère).

Copyrighted material

103 Condensateur en régime variable

Un condensateur plan est constitué de deux armateurs circulaires de rayon a distantes de e. On négligera les effets de bord ($e \ll a$). Il est alimenté par un courant $i(t)$. On considère que le champ électrique s'exprime – dans le domaine D– sous la forme :



$$\vec{E} = E(r, z, t)\vec{u}_z$$

(r, z, θ) coordonnées cylindriques d'axe Oz.

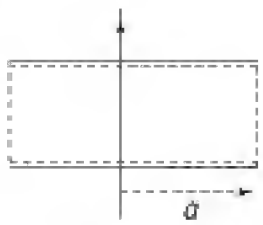
1. On fait l'approximation $E(r, z, t) = E_0(t)$ champ uniforme. Définir la capacité C du condensateur, et donner l'expression de l'énergie électrique emmagasinée en fonction de C et $q(t)$ (charge du condensateur) puis en fonction de C et $u(t)$ (tension aux bornes du condensateur).

2. a) Toujours en confondant $E(r, z, t)$ et $E_0(t)$ déterminer, en tout point de D, une première expression $\vec{B}_1(r, z, t)$ du champ magnétique : on exprimera le résultat en fonction de r (distance à l'axe), $\dfrac{dE_0}{dt}$ et c ($\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$).

b) En déduire l'énergie magnétique contenue dans D. Commenter.

c) Calculer le flux ϕ_e d'énergie électromagnétique entrant dans D à travers la surface cylindrique représentée en pointillés sur la figure ci-contre.

Commenter.



3. a) Montrer que le champ $\vec{B}_1$ est la source d'un champ électrique complémentaire $\vec{E}_1(r, t)$ que l'on prendra parallèle à $\vec{u}_z$ avec $\vec{E}_1(0, t) = \vec{0}$.

Exprimer, à cet ordre, le champ électrique total $\vec{E}_T$ en fonction de $\vec{E}_0(t)$ (champ sur l'axe), de r, c et de $\dfrac{d^2E_0}{dt^2}$. Commenter.

b) On se place désormais en régime sinusoïdal établi (de pulsation ω). On a toujours $\vec{E}_T = \vec{E}(r, t)\vec{u}_z$ et $\vec{E}(0, t) = E_0\cos\omega t$.

Montrer, en poursuivant le raisonnement précédent, que l'on a :

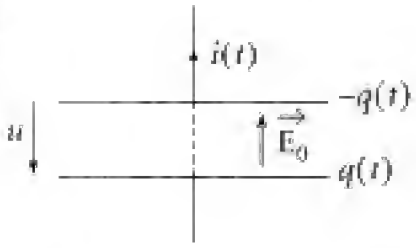
$$E(r, t) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2n}\right\} \cdot E_0\cos\omega t.$$

Commenter.

Copyrighted material

Solution

1. Dans l'approximation des états quasistationnaires on peut faire l'hypothèse que le champ électrique est (aux effets de bord près) uniforme à l'intérieur du condensateur :



$$\vec{E_0} = E_0(t)\vec{u_z} = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 S}\vec{u_z}.$$

La tension aux bornes du condensateur est $u(t) = e\,E_0(t)$, soit encore :

$$u(t) = \frac{e}{\varepsilon_0 S}q(t) \rightarrow q(t) = Cu(t) \quad \text{où} \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}} \quad (1)$$

Le courant $i(t)$ est donné par la relation $i(t) = \dfrac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = C\dfrac{du}{dt}$, relation classique de l'électrocinétique.

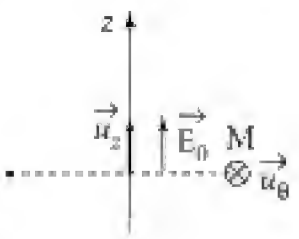
L'énergie emmagasinée sous forme électrique est $U_{el} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\mathcal{V} \rightarrow U_{el} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \dfrac{q^2}{\varepsilon_0^2 S^2} Se$

d'où : $U_{el} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{\varepsilon_0 S}q^2 \Rightarrow \boxed{U_{el} = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}Cu^2}$ (2)

2. a) La charge variant dans le temps il en est de même du champ électrique. On a donc $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ non nul dans l'espace D compris entre les plaques. L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ($\vec{j} = \vec{0}$ dans D) impose l'existence d'un champ magnétique $\vec{B}$.

Déterminons une première expression $\vec{B_1}$ de $\vec{B}$ en adoptant la valeur uniforme précédente du champ électrique.

Les symétries imposant $\vec{B_1} = (r, z, t)\vec{u_\theta}$ on a en utilisant la forme intégrale :



$$\oint_\Gamma \vec{B_1}\cdot\vec{\delta l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{E})$$

$\Gamma \equiv$ cercle d'axe $z'z$ passant par le point M appartenant à D et orienté de façon à ce que la normale au disque de frontière Γ soit porter par $\vec{u_z}$.

$$\oint_\Gamma \vec{B_1}\cdot\vec{\delta l} = B_1(r, z, t)2\pi r \quad \text{et} \quad \phi(\vec{E_0}) = \iint \vec{E_0}\cdot\vec{u_z}\cdot\delta\Sigma = E_0(t)\pi r^2$$

d'où $B_1(r, z, t)\cdot 2\pi r = \mu_0\varepsilon_0\cdot\pi r^2\dfrac{dE_0(t)}{dt}$.

Copyrighted material

soit : $\boxed{\vec{B}_1 = \frac{r}{2c^2}\frac{dE_0}{dt}\cdot\vec{u_\theta}}$ (3) $\left(\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}\right)$.

b) Au champ $\vec{B}_1$ correspond une énergie magnétique $u_m = \frac{B_1^2}{2\mu_0}$ par unité de volume, soit au total :

$$U_m = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{B_1^2}{2\mu_0}\delta\mathcal{V} = \int_0^a \frac{B_1^2(r,t)}{2\mu_0}2\pi r\,dr e$$

soit : $U_m = \frac{\pi e}{\mu_0}\left(\frac{1}{2c^2}\right)^2\left(\frac{dE_0}{dt}\right)^2\cdot\int_0^a r^3 dr \rightarrow U_m = \frac{\pi e a^2}{16\mu_0 c^2}\left(\frac{a}{c}\right)^2\left(\frac{dE_0}{dt}\right)^2$;

d'où $\boxed{U_m = \frac{1}{16}\varepsilon_0\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{dE_0}{dt}\right)^2\cdot\mathcal{V}}$ (4) (on a $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ et $\mathcal{V} = \pi a^2 e$).

L'énergie électrique s'exprime sous la forme : $U_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2(t)\mathcal{V}$ (5)

Le rapport de ces deux énergies est donné, en ordre grandeur par :

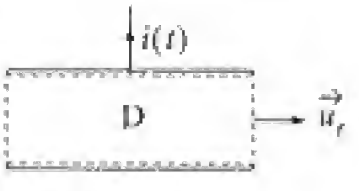
$\eta \sim \frac{1}{8}\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{1}{T^2}$ $\left(\frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{dt}\right)^2 \sim \frac{1}{T^2}$ où T est le temps caractéristique associé aux variations temporelles de $\vec{E}(t)$ et donc du courant $i(t)$.

$\eta \sim \frac{1}{8}\left(\frac{\tau}{T}\right)^2$ où $\tau = \frac{a}{c} \equiv$ temps que met la lumière pour parcourir la distance a dans le vide.

L'approximation du **1.** (« AEQS électrique ») restera valable tant que $\frac{1}{8}\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \ll 1$, ce qui est réalisé dès que $\tau \ll T$.

c) On a alors $\vec{E} \approx E_0(t)\vec{u_z}$ et $\vec{B} \approx \frac{r}{2c^2}\frac{dE_0}{dt}\vec{u_\theta}$, soit – dans D – un vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E_0}\wedge\vec{B_1} = -\frac{r}{2\mu_0 c^2}E_0(t)\frac{dE_0}{dt}\vec{u_r}$.

Le flux d'énergie électromagnétique entrant dans D est donné par le flux de $\vec{\Pi}$ à travers le surface latérale du cylindre de rayon a et de hauteur e ($\phi = 0$ sur le fond et le couvercle puisque $\Pi_z = 0$)



d'où $\phi_e = \vec{\Pi}(r=a,t)\cdot(-\vec{u_r})\cdot 2\pi a e$ ($(-\vec{u_r})$ car flux entrant).

Or $\phi_e = \pi a^2 e\varepsilon_0 E_0(t)\frac{dE_0}{dt} = \mathcal{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\right)$ (6) ; ($\mathcal{V} = \pi a^2 e$).

Le bilan d'énergie électromagnétique appliqué au domaine D ($\vec{j} = \vec{0}$) s'écrit ici :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_m + U_{el}) - \phi_e = 0$$

Copyrighted material

soit, en fonction des approximations, $\phi_e \approx \dfrac{\partial U_{el}}{\partial t}$, ce qui est bien en accord avec (5) et (6).

Commentaire

On a obtenu $\phi_e = \pi a^2 \varepsilon_0 E_0(t) \dfrac{dE_0}{dt}$ relation que l'on peut réécrire selon :

$$\phi_e = \left(\varepsilon_0 S \frac{dE_0}{dt}\right) \cdot (e\varepsilon_0) = \frac{dq}{dt} \cdot u \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_e = u(t)i(t)} \quad (7)$$

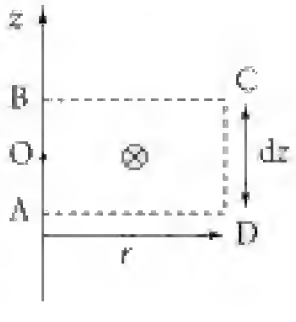
$u(t)i(t)$ représentant – du point de vue de l'électrocinétique – la puissance électrique disponible aux bornes du condensateur. Elle s'identifie en fait à la puissance électromagnétique à travers la surface latérale du condensateur…

3. a) Le champ magnétique $\vec{B}_1$ dépendant du temps induit à son tour un champ électrique $\vec{E}_1$ porté par $\vec{u}_z$ du fait des symétries : $\vec{E}_1 = E_1(r, t)\vec{u}_z$.

Prenons $E_1(0, t) = 0$, le champ précédent $E_0(t)\vec{u}_z$ désignant le champ électrique réel sur l'axe Oz.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit sous forme intégrale :

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{\delta l} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{B}).$$



Prenons un contour Γ rectangulaire ABCD et appliquons la relation précédente aux champs $\vec{B}_1 \to \vec{E}_1$:

$$0 + 0 - E_1(r, z, t)dz + 0 = -\frac{1}{2c^2}\frac{d^2E_0}{dt^2}\int_{r'=0}^{r} r'\,dr'\,dz$$

d'où : $\vec{E}_1(r, z, t) = \dfrac{r^2}{4c^2}\dfrac{d^2E_0}{dt^2}\vec{u}_z$ (8)

À cette nouvelle approximation il vient :

$$\boxed{\vec{E}_\Gamma \approx \left(E_0(t) + \frac{r^2}{4c^2}\frac{d^2E_0}{dt^2}\right)\vec{u}_z}$$

et en régime sinusoïdal établi de pulsation ω : $\vec{E}_\Gamma = E_0 \cdot \left(1 - \dfrac{\omega^2 r^2}{4c^2}\right)\cos\omega t\,\vec{u}_z$.

On retrouve l'AEQS pour $\dfrac{\omega^2 a^2}{4c^2} \ll 1$, c'est-à-dire pour $\dfrac{\dfrac{a^2}{c^2}}{T^2} \ll 1$ (avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$), soit $\left(\dfrac{\tau}{T}\right)^2 \ll 1$ comme il se doit.

b) On peut réitérer le processus précédent :

$$\vec{E}_0(t) \xrightarrow[\text{Ampère}]{\text{Maxwell}} \vec{B}_1(r, t) \xrightarrow[\text{Faraday}]{\text{Maxwell}} \vec{E}_1(r, t) \xrightarrow[\text{Ampère}]{\text{Maxwell}} \vec{B}_2(r, t) \ldots$$

Copyrighted material

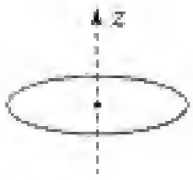
Les résultats (3) et (8) s'écrivent en notation complexe :

$$\underline{\vec{B}_1} = \frac{r}{2c^2}j\omega \underline{E_0}\vec{u_\theta} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}_1} = \frac{r^2}{4c^2}(j\omega)^2 \underline{E_0}\vec{u_z} ; (\underline{E_0} = E_0 \exp j\omega t).$$

Posons $\underline{B_n} = C_n r^{2n-1}\underline{E_0}$ et $\underline{E_n} = D_n r^{2n}\underline{E_0}$.

■ L'équation de Maxwell-Ampère donne pour $\underline{E_{n-1}} \to \underline{B_n}$ $\left(\mathscr{C}(\vec{B_n}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\vec{E}_{n-1})\right)$:

$$2\pi r \underline{B_n} = \frac{1}{c^2}(j\omega)\int_0^r D_{n-1} r'^{2n-2} \times 2\pi r' \, dr' \underline{E_0}$$

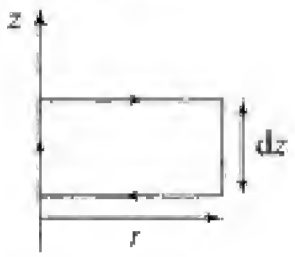


soit : $\underline{B_n} = \frac{j\omega}{c^2} \cdot \frac{\underline{E_0}}{r} D_{n-1} \frac{r^{2n}}{2n} \to C_n = \frac{j\omega}{2c^2} \cdot \frac{1}{n} D_{n-1}$.

■ L'équation de Maxwell-Ampère implique pour $\underline{B_n} \to \underline{E_n}$ $\left(\mathscr{C}(\vec{E_n}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\vec{B_n})\right)$:

$$(0 - \underline{E_n})\,dz = -j\omega C_n \underline{E_0}\int_0^r r'^{2n-1}\,dr'\,dz$$

$$\underline{E_n} = j\omega C_n \underline{E_0}\frac{r^{2n}}{2n} \to D_n = \frac{j\omega}{2n}C_n.$$



■ Finalement il vient : $D_n = \left(\frac{j\omega}{2n}\right)\left(\frac{j\omega}{2c^2} \cdot \frac{1}{n}\right)D_{n-1}$

soit encore $D_n = \left(\frac{j\omega}{2c}\right)^2 \frac{1}{n^2} D_{n-1}$ avec $D_0 = 1$

d'où : $\boxed{D_n = \left(\frac{j\omega}{2c}\right)^{2n} \frac{1}{(n!)^2}}$

Le champ électrique s'obtient alors sous la forme d'une série entière :

$$\underline{E_T}(r, t) = E_0 e^{j\omega t} \cdot \sum \left(\frac{j\omega}{2c}\right)^{2n} \frac{1}{n!^2} r^{2n}$$

d'où : $\boxed{E_T(r, t) = E_0 \cos\omega t \cdot \sum \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2n}}$ (9)

Commentaire

■ Ce champ $\underline{E_T} = \underline{E}(r, t)\vec{u_z}$ est solution de l'équation de propagation $\Delta \underline{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{E} = 0$ avec $\underline{E} = F(r)\exp(j\omega t)$ et $F(0) = E_0$ et $F'(0) = 0$.

En effet avec $\underline{\vec{E}} = \underline{E}\vec{u_z}$ et $\underline{\vec{B}} = \underline{B}\vec{u_\theta}$ il vient :

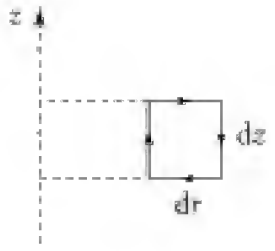
→ via l'équation de Maxwell-Ampère :

$$2\pi r \underline{B}(r, t) = \frac{1}{c^2} j\omega \int_0^r \underline{E}(r', t) 2\pi r' \, dr'$$

d'où : $(r\underline{B}) = \frac{j\omega}{c^2}\int_0^r \underline{E}(r', t) r' \, dr' \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r\underline{B}) = \frac{j\omega}{c^2} r\underline{E}$ (10)

Copyrighted material

→ via l'équation de Maxwell-Faraday :



$$[\underline{\mathbf{E}}(r,t) - \underline{\mathbf{E}}(r+\mathrm{d}r,t)]\,\mathrm{d}z = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{B}}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

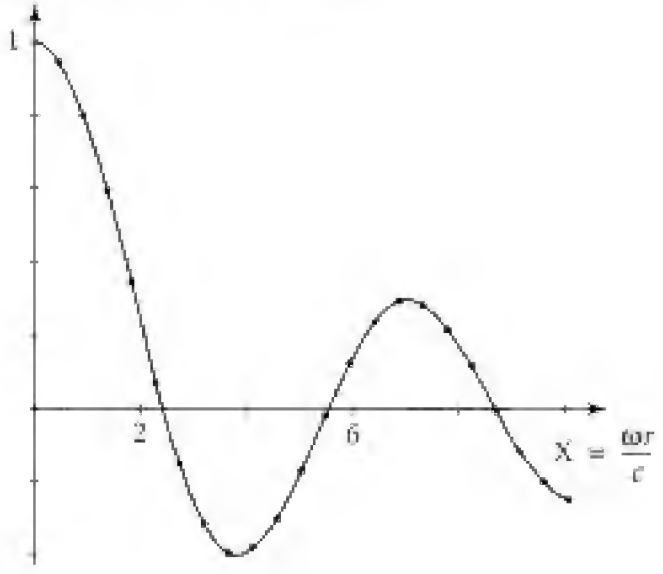
$$\text{d'où} \quad \mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{B}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial r} \qquad (11)$$

(10) et (11) donnent alors :

$$\frac{\mathrm{j}\omega}{c^2} r\underline{\mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mathrm{j}\omega}\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial r}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial r}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\mathbf{E}} = 0} \qquad (12)$$

dont (9) est bien solution… (fonction de Bessel).

■ On a tracé ci-dessous la courbe $X = \dfrac{\omega r}{c} \rightarrow \dfrac{F(r)}{F(0)}$.



→ courbe en trait plein obtenue à partir de la somme discrète tronquée à $n = 100$.

→ courbe représentée par des « ronds » associée à la fonction de Bessel solution de :

$X^2y'' + Xy' + X^2y = 0$ (équation différentielle conforme à 12).

■ L'hypothèse $E(r,t) = E_0(t)$ est acceptable pour $X \ll 2$ et donc pour $\dfrac{\omega a}{2c} \ll 1$ …

Copyrighted material

Copyrighted material

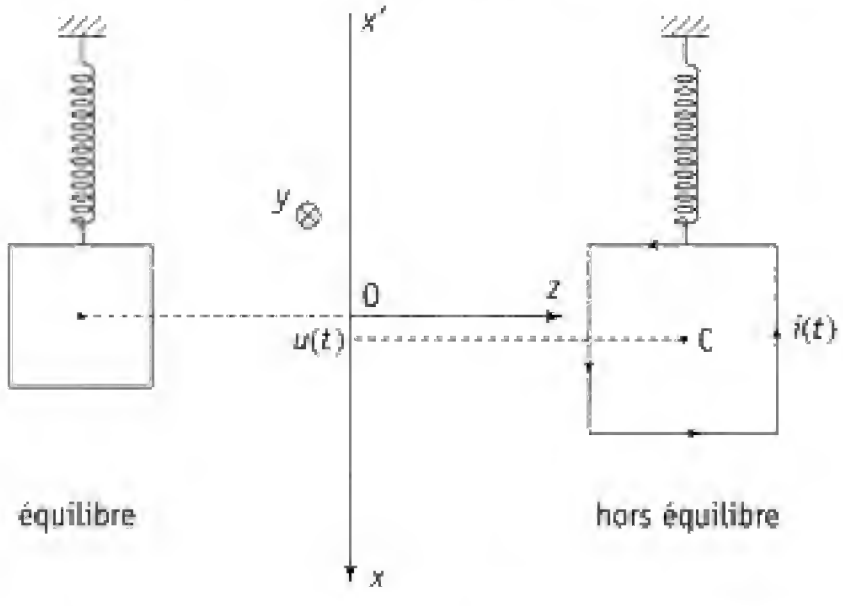
Chapitre

2

Induction électromagnétique

201 Mouvement d'une bobine en présence d'un champ magnétique

Une bobine plate de masse m est composée de N spires carrées de côté a. Les deux extrémités de l'enroulement sont reliées et, ainsi, la bobine forme un circuit linéique de résistance r et de coefficient d'auto-induction que l'on négligera. On veillera à respecter le sens positif du courant indiqué sur le schéma.



Cette bobine est suspendue à l'extrémité d'un ressort isolant d'axe vertical de longueur à vide l_0 et de raideur k. À l'équilibre, la longueur du ressort est $l_1 > l_0$ et le centre d'inertie C de la bobine possède une abscisse nulle.

Un aimant permanent crée dans la région $x > 0$ un champ magnétique horizontal orthogonal au plan des spires. On considère que ce champ est nul pour $x < 0$ et est uniforme égal à $B\vec{u}_y$ pour $x > 0$.

À l'instant $t = 0$, on écarte la bobine de sa position d'équilibre d'une distance $d < \frac{a}{2}$ vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale. On s'intéresse, en l'absence de tout frottement, au mouvement ultérieur de la bobine en considérant que celle-ci possède un mouvement de translation rectiligne, le centre d'inertie C se déplaçant parallèlement à l'axe $x'x$. On note $u(t)$ l'abscisse du centre d'inertie C de la bobine à l'instant t.

1. Faire une étude qualitative des phénomènes.

2. Faire une étude électrique du circuit et déterminer une relation faisant intervenir l'intensité $i(t)$ et la vitesse $v(t) = \frac{du}{dt}$.

3. Faire une étude mécanique du circuit et déterminer une seconde relation faisant intervenir l'intensité et l'abscisse de la bobine.

Copyrighted material

4. En déduire l'équation différentielle en $u(t)$ caractérisant le mouvement étudié. On introduira la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Montrer que le régime du mouvement est différent selon que B est supérieur ou inférieur à une valeur frontière B_c que l'on déterminera à l'aide de N, m, ω_0, r et a.

5. Représenter dans le cas où B est supérieur à B_c l'allure des variations temporelles de $u(t)$ sans chercher à déterminer précisément l'expression de $u(t)$.

6. Déterminer en utilisant d et ω_0 l'expression de $u(t)$ pour $B = \frac{B_c}{\sqrt{2}}$. Donner la représentation graphique de l'évolution temporelle de $u(t)$.

7. Déterminer à l'aide des équations de base vues en **2.** et **3.** l'égalité qui traduit le bilan global en puissance à l'instant t : donner la signification physique des trois termes qui figurent dans ce bilan.

En déduire l'égalité traduisant le bilan énergétique entre $t = 0$ et t suffisamment long ($t \to \infty$) et donner ainsi l'expression de l'énergie totale dissipée par effet Joule.

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de Faraday de l'induction.
- Cas de Lorentz : circuit se déplaçant dans un champ magnétique indépendant du temps.
- Force de Laplace.
- Équation différentielle linéaire du second ordre.

2. Ce qu'il faut comprendre

L'état initial correspondant à une vitesse nulle avec $d < \frac{a}{2}$, on aura toujours $|u| < \frac{a}{2}$ le mouvement s'amortissant du fait du couplage électromécanique dû au champ magnétique extérieur indépendant du temps $B\vec{u}_y$.

3. Solution

1. Lorsque la bobine est en mouvement, le flux du champ magnétique varie. La bobine est donc le siège de phénomènes d'induction et il y a ainsi création d'un courant induit. L'existence de ce courant s'accompagne de l'apparition de forces de Laplace qui vont, en accord avec la loi de Lenz, se comporter comme des forces de freinage.

2. Pour faire une étude électrique, il faut préalablement déterminer la f.é.m. d'induction qui prend naissance dans le circuit. On peut la calculer par l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes :

Copyrighted material

• on utilise $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ avec $\phi = N\varphi$, expression dans laquelle φ représente le flux à travers une spire :

$$\varphi_0 = \iint_{1\text{ spire}} \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{1\text{ spire}} \vec{B}\cdot(-\vec{u_y})\,\mathrm{d}S = \iint_{1\text{ spire}} -B\,\mathrm{d}S$$

et donc $\varphi = -Ba\cdot\left(\dfrac{a}{2}+u\right)$ dans la mesure où $|u| < \dfrac{a}{2}$.

Finalement $e = NBa\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

• On utilise la circulation du champ électromoteur $\overrightarrow{E_m} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x}\wedge\vec{B} = B\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$ (pour $x > 0$).

Donc $e = \oint \overrightarrow{E_m}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = N\displaystyle\int_{z_0}^{z_0+a} B\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}(\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}) = NaB\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

(en notant $z_0 + \dfrac{a}{2}$ la coordonnée de C selon $z'z$).

La loi des mailles conduit alors à l'égalité suivante :

$$\boxed{NaB\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = ri}$$ car on néglige l'auto-induction.

3. Il s'agit de faire un bilan des forces s'exerçant sur la bobine.

• La force exercée par le ressort s'écrit $\vec{T} = -k(l_1 + u - l_0)\overrightarrow{u_x}$.

• Le poids s'écrit $\vec{P} = mg\overrightarrow{u_x}$.

• La résultante des forces de Laplace s'écrit $\vec{F} = Ni\oint_{1\text{ spire}} \overrightarrow{\delta l}\wedge\vec{B}$.

Les seules parties de la spire à considérer sont les parties situées dans le domaine $x > 0$ (sinon $\vec{B} = \vec{0}$). Il est aisé de voir que les forces exercées sur les deux parties verticales s'annulent et il reste donc :

$$\vec{F} = Ni\int_{z_0}^{z_0+a} \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}\wedge B\overrightarrow{u_y} = -NiaB\overrightarrow{u_x}.$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la bobine conduit alors à l'égalité :

$$m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -k(l_1 + u - l_0) + mg - NiaB.$$

À l'équilibre $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 0\right)$, on a : $-k(l_1 - l_0) + mg = 0$. Donc :

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -ku - NiaB}$$

4. En éliminant $i(t)$ entre les deux équations trouvées précédemment, il vient :

$$m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -ku - \frac{N^2a^2B^2}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Copyrighted material

On note ici que la résultante des forces de Laplace s'écrit $-\dfrac{N^2a^2B^2}{r}\dfrac{du}{dt}$: on peut donc bien dire que ces forces agissent comme des forces de freinage.

Finalement :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{N^2a^2B^2}{mr}\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0}$$

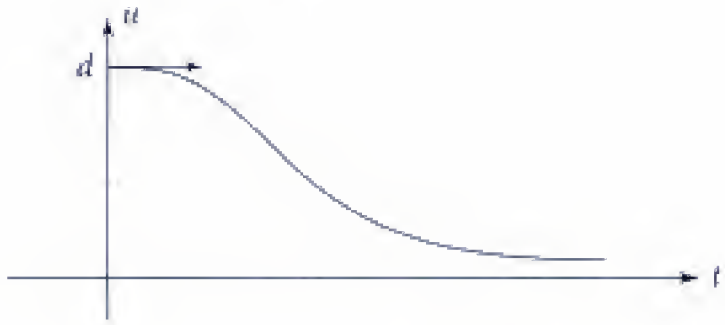
L'équation caractéristique associée admet pour discriminant $\Delta = \left(\dfrac{N^2B^2a^2}{mr}\right)^2 - 4\omega_0^2$.

Si ce discriminant est positif ou nul, le régime est apériodique. Si le discriminant est négatif, le régime est pseudo-périodique.

La valeur frontière du champ magnétique est donnée par :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{N^2B_c^2a^2}{mr} = 2\omega_0 \Leftrightarrow \boxed{B_c = \sqrt{\frac{2\omega_0 mr}{N^2a^2}}}$$

5. Si $B > B_c$, alors $\Delta > 0$: c'est le régime apériodique.



6. Pour $B = \dfrac{B_c}{\sqrt{2}}$, $\Delta = \omega_0^2 - 4\omega_0^2 = -3\omega_0^2$ car $\dfrac{N^2B^2a^2}{mr} = \omega_0$.

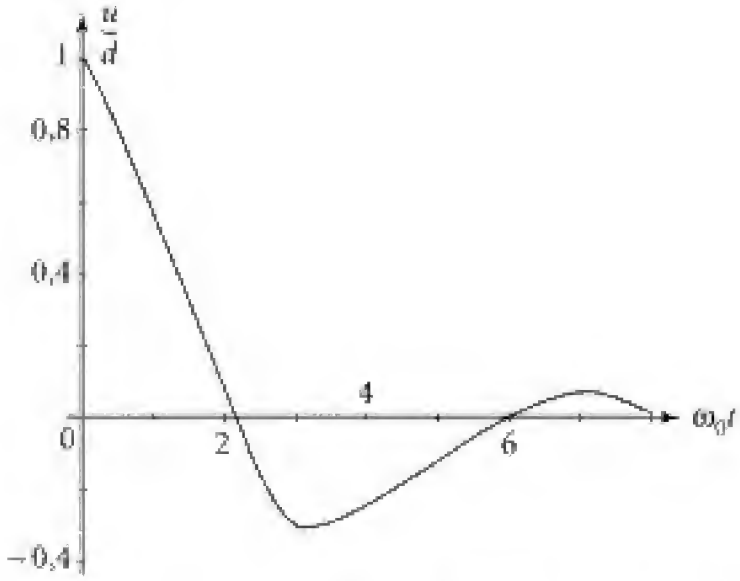
Donc $u(t) = \exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2}t\right)\left[A_1\cos\left(\omega_0\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + A_2\sin\left(\omega_0\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$.

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= d = A_1 \\ \frac{du}{dt}(0) &= 0 = -\frac{\omega_0}{2}A_1 + A_2\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = d \\ A_2 = \dfrac{d}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

D'où finalement :

$$\boxed{u(t) = d\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[\cos\left(\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]}$$

Copyrighted material



7. Pour avoir le bilan en puissance, il suffit de partir d'un terme de puissance dont on connait l'expression.

Par exemple, le terme ri^2.

D'après l'équation vue en **2.** : $ri^2 = NaBvi$. $\left(v = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)$

En multipliant par v l'équation vue en **3.** il vient : $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kuv - NaBvi$.

D'où : $$ri^2 = -mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - kuv = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2\right).$$

On obtient donc finalement :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2\right) = -ri^2}$$

Le terme entre parenthèses représente l'énergie du cadre à l'instant t (énergie cinétique et énergie potentielle). L'égalité traduit le fait que cette énergie diminue au cours du temps par dissipation d'énergie (effet Joule).

Pour faire le bilan global et faire apparaître l'énergie totale dissipée, il faut écrire :

$$\int_0^\infty ri^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2\right) = -\left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\int_0^\infty ri^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}kd^2}$$

C'est l'énergie potentielle initiale qui est dissipée par effet joule.

Commentaire

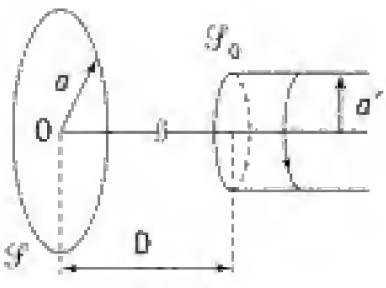
Le champ magnétique extérieur indépendant du temps assure la conversion électromécanique d'énergie.

Copyrighted material

202 Quantité d'électricité induite

$\mathscr{S}$ est une spire de centre O et de rayon a. Elle possède une résistance R et un coefficient d'auto-inductance L.

$\mathscr{S}_0$ est un solénoïde « semi-infini », de rayon a', comportant n spires par unité de longueur. Les axes de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ sont communs et le point O est situé à une distance D de la face d'entrée du solénoïde.



Dans toute la suite, on supposera que l'on a :

$$D \gg a' \quad \text{et} \quad D \gg a.$$

Le coefficient de mutuelle entre $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ est donné par :

$$M = \frac{1}{4}\mu_0 n \pi \frac{a^2 a'^2}{D^2}.$$

On crée un courant I constant dans le solénoïde.

1. Déterminer la quantité totale d'électricité q qui aura traversé toute section du fil constituant la spire. Commenter.

2. On suppose que le courant I est créé à partir de $t = 0$ de façon « suffisamment rapide ».

Préciser. Quelle est alors l'expression du courant $i(t > 0)$ circulant dans la spire ? Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Auto induction – Mutuelle induction.
- Loi de Faraday : force électromotrice d'induction.

2. Ce qu'il faut comprendre

Il n'y a plus de variation du flux extérieur à travers la spire $\mathscr{S}$ dès que I reste constant. Ce n'est pas pour autant que i s'annule à partir de ce moment. La charge q se calcule donc en prenant l'intégrale de $i(t)$ entre les instants $t = 0$ et $t \to +\infty$.

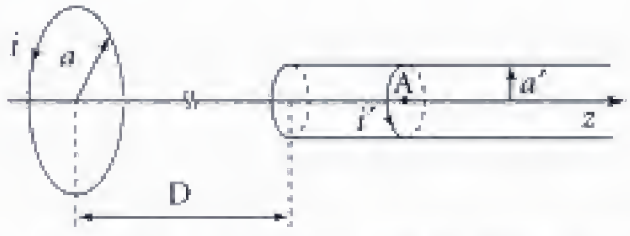
3. Solution

1. Quand on établit un courant dans le solénoïde il se crée un flux variable à travers la spire, et donc une force électromotrice donnée par la loi de Faraday :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi'}{dt} = -M\frac{di'}{dt}.$$

Copyrighted material

La mutuelle M définie positive correspond bien aux conventions associées au dessin ci-dessous :



Il y a donc naissance d'un courant induit $i(t)$ dont les variations sont déterminées par l'équation :

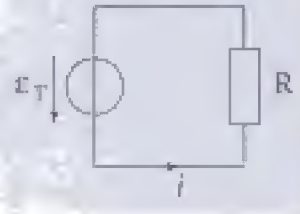
$$\varepsilon(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} \text{ d'où } L\frac{di}{dt} + Ri(t) = -M\frac{di'}{dt} \quad (1)$$

POINT MÉTHODE

Il revient au même d'écrire : $\varepsilon_T = Ri$

avec $\varepsilon_T = -\dfrac{d\phi_T}{dt}$, et $\phi_T = \Phi_p + \Phi^{ext} = Li + Mi'$

soit finalement $Ri = -L\dfrac{di}{dt} - M\dfrac{di'}{dt}\cdots$



Intégrons cette équation entre les instants $t = 0$ et t « infini » :

$$L\int_0^{+\infty} di + R\int_0^{+\infty} i(t)\,dt = -M\int_0^{+\infty} di'.$$

Or $\int_0^{+\infty} i(t)$ représente la charge totale q qui aura traversé toute section du fil constituant la spire. De plus :

$$\int_0^{\infty} di = i(+\infty) - i(0) = 0 - 0 = 0$$

$$\int_0^{\infty} di' = i'(+\infty) - i(0) = 1 - 0 = 1.$$

D'où $q = -\dfrac{MI}{R}$ et $\boxed{q = -\dfrac{I}{4R}\mu_0 n\pi\dfrac{a^2a'^2}{D^2}I}$ (2)

Le signe $\ominus$ provenant des sens choisis pour les orientations des courants dans la spire et dans le solénoïde (d'où un coefficient M ici positif) traduit que le courant induit créé dans la spire tend à s'opposer aux variations de flux que le solénoïde lui impose…

2. Le courant est créé dans le solénoïde en un temps très court devant $\tau_c = \dfrac{L}{R}$ (temps caractéristique du circuit L-R constitué par la spire). Reprenons alors l'équation (1) et intégrons-la entre les instants $t = 0$ et $t = \tau = 0^+$ ($\tau \ll \tau_c$) :

$$L[i(0^+) - i(0)] + R\int_0^{\tau} i(t)\,dt = -MI.$$

Copyrighted material

Le courant $i(t)$ reste nécessairement borné et $R\int_0^{\tau} i(t)\,dt$ est négligeable devant les autres termes, d'où (avec $i(0) = 0$) :

$$i(0^+) = -\frac{M}{L}I$$

Pour $t > 0^+$, l'évolution de $i(t)$ est régie par l'équation $Ri + L\frac{di}{dt} = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{i(t > 0) = -\frac{MI}{L}\exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)} \text{ où } \tau_c = \frac{L}{R}.$$

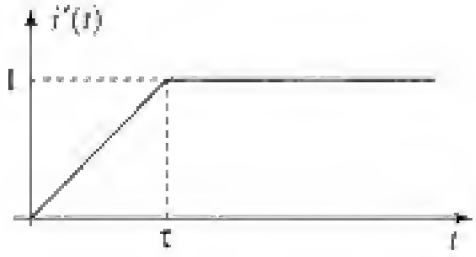
On a bien $q = \int_{0^+}^{\infty} i(t)\,dt = -\frac{MI}{L}\int_{0^+}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)dt$

soit $q = -\frac{MI}{L}\tau_c \rightarrow q = -\frac{MI}{R}$.

On retrouve le résultat (2).

Commentaires

▪ Pour apprécier l'hypothèse faite plus haut, $\left(i(0^+) = -\frac{MI}{L}\right)$, on peut envisager le cas où la loi d'établissement du courant dans le solénoïde est de la forme suivante :



– *Première phase* $0 \leqslant t \leqslant \tau$:

Le courant $i'(t)$ variant linéairement dans le temps, la force électromotrice extérieure ε induite dans la spire est constante et vaut $\varepsilon = -\frac{MI}{\tau}$, d'où :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = -\frac{MI}{\tau}$$

et après intégration $i(t) = \alpha\exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) - \frac{MI}{R\tau}$.

Or $i(0) = 0 \rightarrow i(t) = -\frac{MI}{R\tau}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)\right)$ et $i(\tau) = -\frac{MI}{R\tau}\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right)\right)$.

– *Deuxième phase* $t > \tau$:

Le courant $i'(t)$ est constant et la force électromotrice ε devient nulle. D'où :

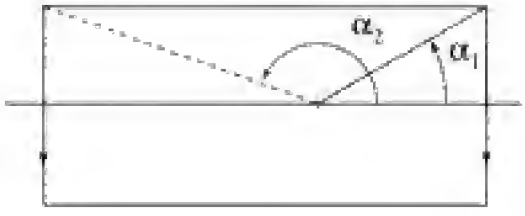
$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \text{ et } i(t > \tau) = i(\tau)\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_c}\right].$$

Copyright du matériel

Or, pour $\tau \ll \tau_c$: $i(\tau) \neq \left(-\frac{MI}{R\tau}\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)\right) \neq -\frac{M}{L}I$ et $i(t > 0^+) \neq -\frac{MI}{L}\exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)$.

Ainsi pour $t = 0^+$ il vient bien $i(0^+) \neq -\frac{MI}{L}$.

▪ Pour évaluer le coefficient de mutuelle M, on aurait pu calculer le flux Φ' envoyé par le solénoïde (lorsqu'il est parcouru par un courant i') dans la spire.

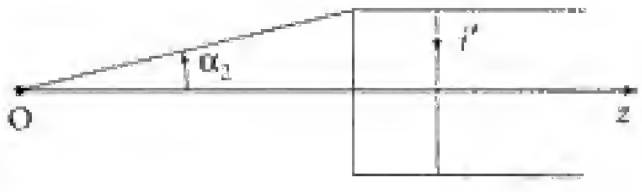


Le champ qu'il crée en O s'écrit :

$$B'(O) = \frac{1}{2}\mu_0 n i'(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

avec ici $\alpha_1 = 0$ (et $\cos\alpha_1 = 1$)

et $\cos\alpha_2 = \frac{D}{\sqrt{a'^2 + D^2}}$.



D'où :

$$B'(O) = \frac{1}{2}\mu_0 n i'\left(1 - \frac{D}{\sqrt{a'^2 + D^2}}\right)$$

$$B'(O) \neq \frac{1}{2}\mu_0 n i' \frac{a'^2}{2D^2} = \frac{1}{4}\mu_0 n i' \frac{a'^2}{2D^2}$$

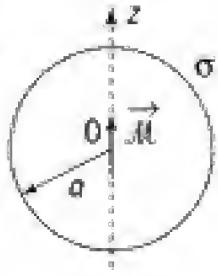
$(D \gg a')$.

Soit $\Phi' \neq B'(0)\pi a^2$ (champ magnétique quasi-uniforme sur les dimensions de la spire, $D \gg a$). D'où :

$$\Phi' \neq \frac{1}{4}\mu_0 n i' \frac{a'^2}{D^2}\pi a^2 = Mi' \Rightarrow \boxed{M = \frac{1}{4}\mu_0 n \pi \frac{a'^2 a^2}{D^2}}$$

203 Mise en rotation d'une sphère chargée

Une coquille sphérique isolante, de masse m et de rayon a, porte une charge répartie uniformément avec une densité σ (les charges sont liées à la sphère).



Elle peut tourner librement autour de l'axe vertical Oz.

Un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est placé en O (il modélise une petite spire d'axe Oz et d'intensité i que l'on peut faire varier).

On éteint progressivement l'intensité du dipôle à partir d'une valeur $\mathcal{M}_0$.

1. Faire une analyse qualitative du système proposé.

Copyrighted material

2. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ induit en un point M de la surface de la coquille. On introduira l'angle $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$, et on donnera $\vec{E}(M)$ en fonction de a, θ, μ_0 et $\frac{d\mathcal{M}}{dt}$.

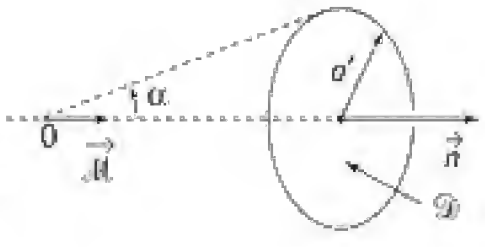
3. Établir l'expression de la vitesse finale ω_f de rotation de la sphère.

Commenter le résultat obtenu.

Données :

• Le flux Φ créé par $\vec{\mathcal{M}}$ à travers le disque $\mathcal{D}$ est donné par l'expression :

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a'} \sin^3\alpha.$$



• Le moment d'inertie de la coquille par rapport à l'axe Oz est :

$$J = \frac{2}{3}ma^2.$$

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de Maxwell-Faraday : forme locale – forme intégrale.
- Règles de symétrie.
- Théorème du moment cinétique scalaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

La coquille étant initialement fixe, seul un champ électrique $\vec{E}$, agissant sur les charges qui lui sont liées, pourra provoquer une rotation du système. L'existence de ce champ résulte des variations dans le temps du champ magnétique crée par le moment magnétique dont l'intensité est variable.

3. Solution

1. Analyse qualitative :

Le moment magnétique diminuant en intensité, le champ magnétique qu'il crée varie dans le temps. Il y a donc apparition d'un champ électrique d'induction $\vec{E}$ lié au champ $\vec{B}$ par l'équation de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

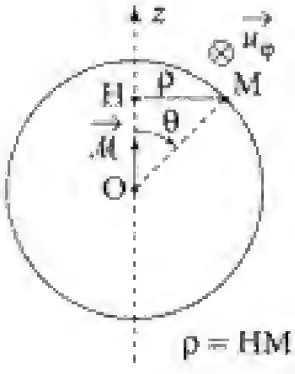
Copyright Editions Ellipses

Le champ $\vec{E}$ crée sur l'élément de surface $\delta\Sigma$ centré sur le point M de la coquille une force $\vec{\delta F}$ telle que :

$$\vec{\delta F} = \sigma\delta\Sigma\vec{E}(M)$$

et un couple élémentaire par rapport à l'axe Oz (d'après les symétries du système $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_\varphi}$) :

$$\delta F = (\sigma\delta\Sigma)\cdot\rho\cdot E(M) \quad (\rho = HM).$$



La coquille sphérique va donc se mettre à tourner autour de son axe Oz. La vitesse ω_f ne dépend pas de la façon dont on fait varier $\mathcal{M}$ mais simplement de la valeur initiale $\mathcal{M}_0$ ($\mathcal{M}_f = 0$ ici).

2. Détermination du champ $\vec{E}(M)$

La cause de $\vec{E}$ étant associée aux variations de $\vec{\mathcal{M}}$, on peut considérer que le plan contenant Oz et OM est plan d'antisymétrie ($\vec{\mathcal{M}}$ modélise une petite spire d'axe Oz parcourue par un courant $i(t)$) et que par là-même $\vec{E}$, perpendiculaire à ce plan, est orthoradial.

D'où : $$\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_\varphi}$$

De plus le système est invariant par rotation autour de Oz. Il en résulte que :

$E(M) = E(\theta)$ pour tout point M situé sur la sphère et repéré par l'angle θ (*cf.* figure).

Considérons alors le cercle $\mathscr{C}$ d'axe Oz et passant par le point M (pour tous les points de $\mathscr{C}$ on a θ = cste).

L'équation locale (1) prend alors la forme intégrale suivante :

$$\oint_{\mathscr{C}}\vec{E}\cdot\vec{\delta l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (\mathscr{C}\text{ fixe})$$

Φ désigne le flux du champ $\vec{B}$ (créé par le moment magnétique) à travers le disque s'appuyant sur $\mathscr{C}$.

Or $$\oint_{\mathscr{C}}\vec{E}\cdot\vec{\delta l} = E(\theta)2\pi\rho = E(\theta)2\pi a\sin\theta.$$

L'expression de Φ est celle donnée dans l'énoncé avec ($a' \to \rho$ et $\alpha \to \theta$) :

$$\Phi = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2\rho}\sin^3\theta = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2a}\sin^2\theta \quad (\rho = a\sin\theta).$$

D'où

$$2\pi a\sin\theta E(\theta) = -\frac{\mu_0}{2a}\sin^2\theta\frac{d\mathcal{M}}{dt}.$$

Soit

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi a^2}\sin\theta\frac{d\mathcal{M}}{dt}\vec{u_\varphi}}$$

Copyrighted material

Commentaire

Pour calculer $\vec{E}$, on aurait pu écrire :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{avec } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}.$$

Soit $\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi a^2}\sin\theta \vec{u_\varphi}$ d'où $\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi a^2}\sin\theta \frac{d\mathcal{M}}{dt}\vec{u_\varphi}$.

3. ■ Calculons le couple instantané s'exerçant sur la coquille sphérique.

Nous avons $\delta\Gamma = \sigma a \sin\theta E(M)\delta\Sigma$.

D'où $$\delta\Gamma = \sigma\left(-\frac{\mu_0}{4\pi a^2}\sin\theta\frac{d\mathcal{M}}{dt}\right)(a\sin\theta)\delta\Sigma.$$

Soit, pour une « couronne » comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$:

$$\delta\Sigma = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$$

et $$\delta\Gamma = -\frac{1}{2}\sigma a\mu_0\frac{d\mathcal{M}}{dt}\sin^2\theta\sin\theta\, d\theta.$$

Intégrons sur toute la sphère, θ variant de 0 à π :

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\sigma a\mu_0\frac{d\mathcal{M}}{dt}\int_0^\pi \sin^2\theta\sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\sigma a\mu_0\frac{d\mathcal{M}}{dt}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)d(-\cos\theta)$$

Soit $$\boxed{\Gamma = -\frac{2}{3}\sigma a\mu_0\frac{d\mathcal{M}}{dt}}$$

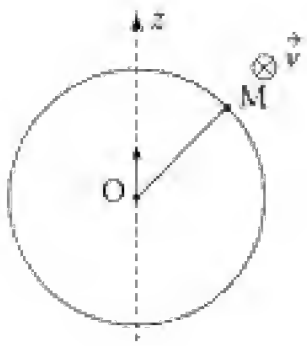
■ Appliquons maintenant, à la coquille, le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz.

$$\boxed{\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}^{ext}}$$

Remarquons alors que la force magnétique :

$$\overrightarrow{\delta F_m} = \sigma\delta\Sigma\vec{v} \wedge \vec{B}$$

est perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$.



Elle est contenue dans le plan (Oz, OM) et ne contribue donc pas à $\mathcal{M}_{Oz}^{ext}$.

D'où $$\mathcal{M}_{Oz}^{ext} = \Gamma$$

et $$\frac{dL_{Oz}}{dt} = -\frac{2}{3}\sigma a\mu_0\frac{d\mathcal{M}}{dt}.$$

Intégrons cette équation entre l'instant initial, où $L_{Oz} = 0$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$, et et l'état final pour lequel $\mathcal{M}$ est nul :

$$L_{Oz} - 0 = -\frac{2}{3}\sigma\mu_0 a(0 - \mathcal{M}_0).$$

Copyrighted material

Si l'on désigne par J le moment d'inertie de la coquille par rapport à Oz, nous avons :

$$L_{Oz} = J\omega_F \quad \text{et} \quad \omega_F = \frac{2}{3}\frac{\sigma a \mu_0 \mathcal{M}_0}{J}.$$

Or $J = \frac{2}{3}ma^2$ d'où $\boxed{\omega_F = \frac{\mu_0 \sigma \mathcal{M}_0}{ma}}$

À l'instant initial la coquille ne possède pas de moment cinétique puisqu'elle est immobile. Dans l'état final son moment cinétique est $J\omega_F$. Il ne se conserve donc pas alors que le système $\overrightarrow{\mathcal{M}}(t)$ -coquille est mécaniquement « isolé » par rapport aux rotations d'axe Oz.
Le paradoxe peut être levé en attribuant au champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ un moment cinétique...

Commentaire

Une étude plus poussée montrerait qu'il est possible de définir pour le champ :

– une quantité de mouvement de densité volumique $\frac{\vec{\Pi}}{c^2}$ $(\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$: vecteur de Poynting).

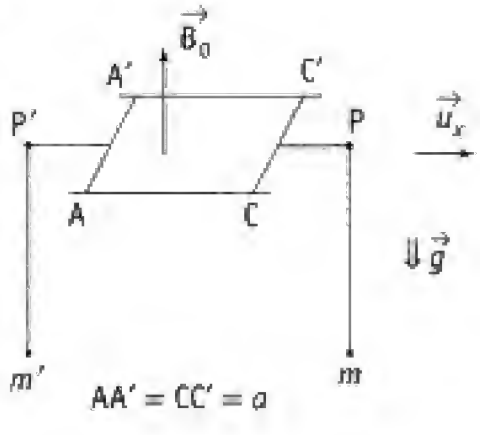
– un moment cinétique de densité volumique $\overrightarrow{OP} \wedge \frac{\vec{\Pi}}{c^2}$.

Le lecteur pourra vérifier que, dans l'état initial, le moment cinétique L'_{Oz} associé au champ est donné par : $L'_{Oz} = \frac{2}{3}\mu_0 \sigma \mathcal{M}_0 a$.

$(\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < a$ et $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi a^2 \sigma)\frac{\vec{u}}{r^2}$ pour $r > a)$...

204 Barres sur rails

Les deux barres AA′ et CC′ se déplacent, sans frottement, sur deux rails horizontaux et parallèles dans un champ vertical uniforme $\vec{B}_0$.
On fait les hypothèses suivantes :
- les poulies P et P′ sont idéales ;
- les masses des barres AA′ et CC′ négligeables ;
- Chaque barre possède une résistance R ;
- les fils sont inextensibles ;



Copyrighted material

– on néglige la résistance des rails ainsi que les phénomènes d'auto-induction.

On pose : $\frac{1}{\tau} = \frac{B_0^2 a^2}{2R}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$.

1. a. On note $\vec{v} = v(t)\vec{u}_x$ et $\vec{v}' = v'(t)\vec{u}_x$ les vitesses des barres CC' et AA'. Établir l'équation électrique donnant le courant $i(t)$ traversant ACC'A'A.

b. Donner les deux équations mécaniques traduisant le mouvement des deux barres.

c. Résoudre le système précédent. On déterminera $v(t)$ et $v'(t)$ sachant qu'à $t = 0$ $v = v' = 0$ (faire apparaître les grandeurs $mv + mv'$ et $v - v'$).

Tracer les grandeurs $\frac{t}{\tau} \to \frac{v(t)}{g\tau}$ et $\frac{t}{\tau} \to \frac{v'(t)}{g\tau}$.

Commenter.

2. Faire un bilan énergétique. Commenter.

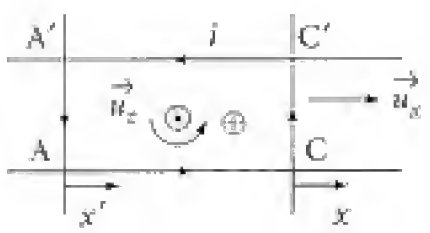
Solution

1. a. Sous l'effet des masses m et m' les barres vont avoir tendance à s'éloigner. La surface du circuit AA'C'C va donc varier, entraînant la création d'une force électromotrice ε et d'un courant induit i.

Les forces de Laplace qui en résultent ont pour effet de s'opposer à la cause qui leur a donné naissance.

Notons $x(t)$ le déplacement de la barre CC' à l'instant t, et $x'(t)$ celui de la barre AA'.

Nous sommes dans la configuration de Lorentz (champ magnétique indépendant du temps et « circuit mobile »).



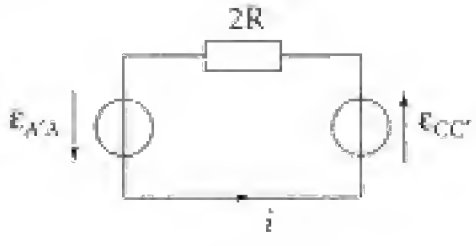
La force électromotrice induite par le déplacement du brin AA' est :

$$\varepsilon_{A'A} = \int_{A'}^{A} (\vec{v} \wedge B_0\vec{u}_z) \cdot \vec{\delta\ell} = +B_0 \frac{dx'}{dt} a = B_0 a v'.$$

De même $\varepsilon_{C'C} = \int_{C}^{C'} (\vec{v} \wedge B_0\vec{u}_z) \cdot \vec{\delta\ell} = -B_0 a \frac{dx}{dt} = -B_0 a v.$

Le courant induit s'obtient, si l'on néglige les phénomènes d'auto-induction, par la relation :

$$\varepsilon_T = 2Ri \to \boxed{i = -\frac{B_0 a}{2R}(v - v')} \quad (1)$$

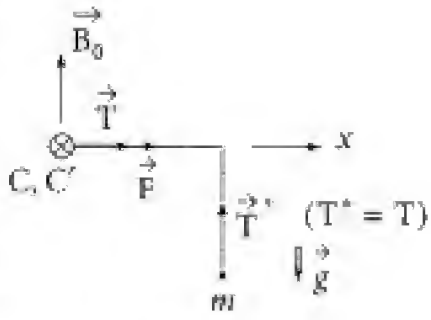


Copyrighted material

b. Considérons la tige CC′ de masse négligeable (en fait il suffit que l'on ait masse (CC′) $\ll m$) :

$m_{CC'} \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_L + T$ où T désigne la tension du fil,

soit : $F_L + T = 0$.



D'autre part, le théorème de la quantité de mouvement appliqué à la masse m se traduit par (fil inextensible) :

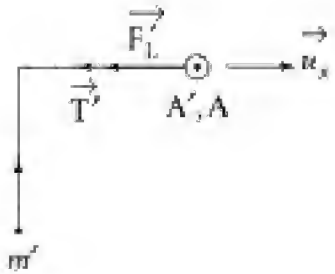
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T$$

soit $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg + B_0 a\, i \rightarrow \boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} = g + \dfrac{B_0 a}{m} i}$ (2)

De même, pour la tige AA′, il vient :

$$-T' - iB_0 a = 0$$

et $m'\left(-\dfrac{d^2x'}{dt^2}\right) = m'g - T'$



D'où :

$$-m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'g + B_0 a\, i \rightarrow \boxed{\frac{d^2x'}{dt^2} = -g - \frac{B_0 a}{m} i} \quad (3)$$

c. Remplaçons i à l'aide de (1) dans les équations (2) et (3) :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{(B_0 a)^2}{2R}(v - v') \quad \text{et} \quad m'\frac{dv'}{dt} = -m'g + \frac{(B_0 a)^2}{2R}(v - v').$$

En combinant convenablement ces deux équations, nous obtenons :

$$\begin{cases} d(mv + m'v') = (m - m')g & (4) \\ \dfrac{d}{dt}(v - v') = 2g - \dfrac{B_0^2 a^2}{2R}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'}\right)(v - v') & (5) \end{cases}$$

Et, en tenant compte des conditions initiales $v = v' = 0$ à $t = 0$, nous avons :

$$mv + m'v' = (m - m')gt.$$

De plus, en posant $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{B_0^2 a^2}{2R}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'}\right)$:

$$\frac{d}{dt}(v - v') + \frac{1}{\tau}(v - v') = 2g$$

Soit en intégrant $v - v' = 2g\tau + \lambda \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $0 - 0 = 2g\tau + \lambda$.

D'où $$v - v' = 2g\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

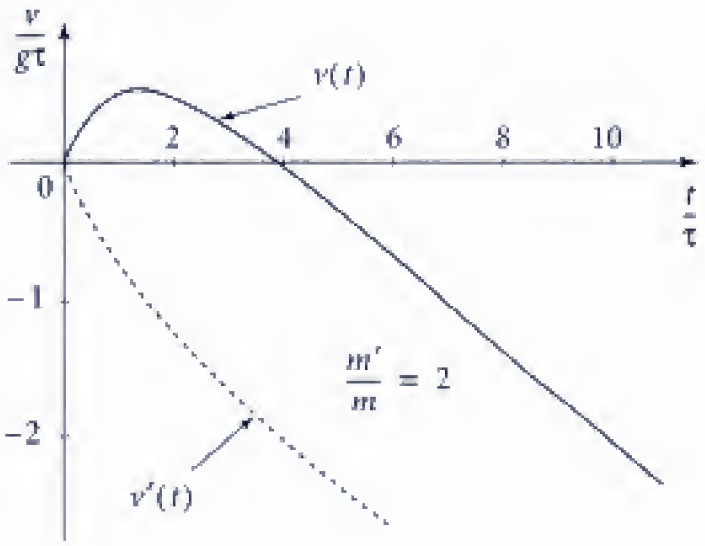
Copyrighted material

Finalement, les vitesses de deux barres sont fournies par les relations :

$$v = \frac{1}{m+m'}\left\{(m-m')gt + m'2g\tau\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\right\}$$

$$v' = \frac{1}{m+m'}\left\{(m-m')gt - m2g\tau\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\right\}$$

On donne ci-dessous les graphes de $v(t)$ et $v'(t)$.



Commentaire

▪ La prise en compte des masses $m_{AA'}$ et $m_{CC'}$ des barres revient à remplacer dans **1. b.**

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} \rightarrow (m+m_{CC'})\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} \rightarrow (m'+m_{AA'})\dfrac{d^2x'}{dt^2} \end{cases}$$

▪ Le système approche, pour $t \gg \tau$ un état limite où les deux barres se déplaceraient à la même vitesse et dans le même sens. Dans cet état limite on a $i = 0$ (*cf.* (1)) et les phénomènes électromoteurs, dûs aux mouvements des deux barres, se compensent…

POINT MÉTHODE

Pour établir un bilan énergétique le plus simple est de reprendre les équations électrique (1) et mécaniques (2) et (3) et de faire apparaître, après multiplication par i pour (1) et par v et v' pour (2) et (3), des grandeurs énergétiques usuelles.

■ (1) donne : $R\,i^2 = -B_0 a\,v\,i + B_0\,a\,v i' \rightarrow \mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{e.m}$ (6)

où $\underbrace{(\mathcal{P}_J = 2Ri^2)}_{\text{Puissance Joule}}$ et $\mathcal{P}_{e.m} = \underbrace{\varepsilon_{CC'}\cdot i + \varepsilon_{AA'}\cdot i}_{\text{Puissance des phénomènes électromoteurs}}$.

Copyright material

■ (1) s'écrit après multiplication par v :

$$mv\frac{dv}{dt} = mgv + (B_0 a i)v \rightarrow \frac{d}{dt}(E_c(m)) + \frac{d}{dt}E_p(m) = F_L \cdot v \quad (7)$$

où $E_c(m) = \frac{1}{2}mv^2$, $E_p(m) = mgz_m$ et $F_L \cdot v = \mathcal{P}_L(CC')$.

■ De même avec (3) $\quad \frac{dE_c(m')}{dt} = -mgv' + (-B_0 a i)v'$

or $\frac{dE_p(m')}{dt} = mg\frac{dz_{m'}}{dt} = mgv'$ et $F_L(A'A) = -B_0 a i$, d'où :

$$\frac{d}{dt}E_c(m') + \frac{d}{dt}E_p(m') = F_L v' \quad (8)$$

■ Remarquons alors que :

$$\underbrace{\varepsilon_{A'A} i}_{(B_0 a v') \cdot i} + \underbrace{F_L(A'A) \cdot v'}_{(-B_0 a i) \cdot v'} = 0 \quad \text{et} \quad \underbrace{\varepsilon_{C'C} i}_{(-B_0 a v) \cdot i} + \underbrace{v \cdot F_L(C'C)}_{(B_0 a i) \cdot v} = 0$$

d'où en sommant (6), (7) et (8) :

$$\frac{dE_{c_T}}{dt} + \frac{dE_{p_T}}{dt} + \mathcal{P}_J = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dE_m}{dt} + \mathcal{P}_J = 0}$$

où $E_m = E_{c_T} + E_{p_T} = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv'^2\right) + (mgz_m + mgz_{m'})$

soit encore $\quad E_m(t) - E_m(0) = -\int_0^t \mathcal{P}_J \, dt \quad (9)$.

Le système transforme de l'énergie mécanique en effet joule (énergie dissipée)…

Dans l'état limite on a $v = v'$, et donc E_c = cste et E_p = cste, ce qui est compatible avec (9) puisqu'alors $i = 0$.

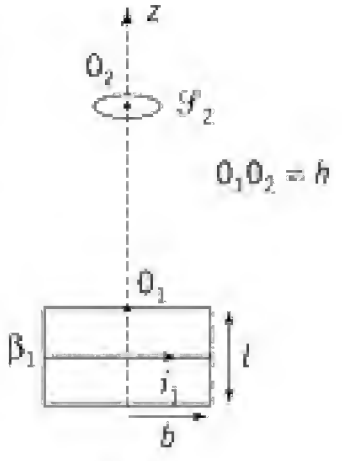
Le champ magnétique $B_0 \vec{u}_z$ assure la conversion électromécanique d'énergie.

Copyrighted material

205 Lévitation d'une spire conductrice

Une bobine β_1 est constituée de N spires circulaires de rayon b réparties sur une longueur l et parcourues par un courant $i_1(t) = I_m \cos(\omega t)$.

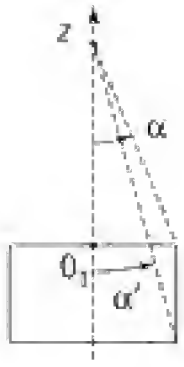
À la cote $z = h$ ($z = O_1O_2$) est disposée une petite spire $\mathcal{S}_2$ conductrice de rayon a et de section $s = \pi e^2$. On note R et L la résistance et le coefficient d'auto-inductance de $\mathcal{S}_2$.



La bobine crée, sur son axe, un champ magnétique $\vec{B}_{1_0}(z, t) = B_m(z)\cos(\omega t)\vec{u}_z$ avec

$$B_m(z) = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N}{l}(\cos\alpha' - \cos\alpha) \cdot I_m .$$

On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe O_1z.



1. Déterminer, en régime sinusoïdal établi, l'intensité $i_2(t)$ circulant dans la spire $\mathcal{S}_2$: on confondra $B_{1_z}(r, z)$ avec $B_{1_0}(z, t)$ (« petite spire »).

2. a. Montrer que la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur $\mathcal{S}_2$ est portée par $\vec{u}_z$.

Exprimer cette résultante $\vec{F}_{L_2}$ en fonction de a, $i_2(t)$ et de la composante radiale $B_{1_r}(r = a, z)$ du champ $\vec{B}_1$ crée par la bobine au niveau du fil de la spire $\mathcal{S}_2$.

b. Montrer que l'on a :

$$B_{1_r}(a, z, t) = -\frac{a}{2}\frac{dB_m(z)}{dz} \cdot \cos(\omega t).$$

On se rappellera que $\vec{B}_1$ est à flux conservatif.

c. On pose $\vec{F}_{L_2} = F_{L_2}\vec{u}_z$. Déterminer la valeur moyenne temporelle $\langle F_{L_2} \rangle$ de F_{L_2}, et donner son expression pour $\omega \gg \frac{R}{L}$. Commenter.

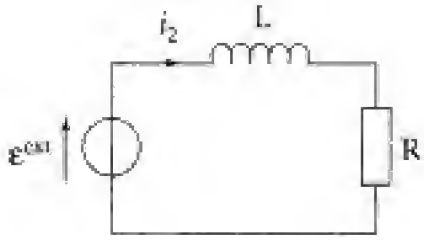
3. *A.N.* : Calculer la valeur efficace $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ du courant $i_1(t)$ pour que la spire en cuivre de masse volumique ρ puisse léviter à une hauteur h au-dessus de la bobine.

On donne : $R = 1{,}7 \cdot 10^{-4}\ \Omega$; $L = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ H ; $e = 1$ mm ;
$a = 5$ mm ; $l = 10$ cm ; $b = 2{,}5$ cm ;
$h = 1$ cm ; $g = 9{,}8$ m . s^{-2} ; $\rho = 9 \cdot 10^3$ kg · m^{-3} ;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H · m^{-1}.

Copyrighted material

Solution

1. Équation électrique :



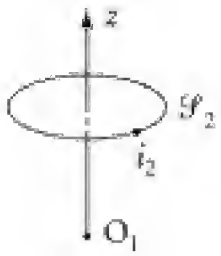
$$\mathcal{E}^{ext} = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt}$$

$$\mathcal{E}^{ext} = -\frac{d\phi^{ext}}{dt} \quad \text{où} \quad \phi^{ext} = \pi a^2 B_m \cos\omega t$$

où $B_m = B_m(z = h)$

soit : $Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} = \pi a^2 B_m \omega \sin(\omega t)$.

En régime sinusoïdal établi :



$$i_2(t) = \mathrm{Im}(\underline{i_2}(t)) = \mathrm{Im}[\underline{I_2}\exp(j\omega t)]$$

avec

$$(R + jL\omega)\underline{I_2} = \pi a^2 B_m \omega \rightarrow \underline{I_2} = \frac{\pi a^2 B_m \omega}{R^2 + L^2\omega^2}(R - jL\omega)$$

d'où :

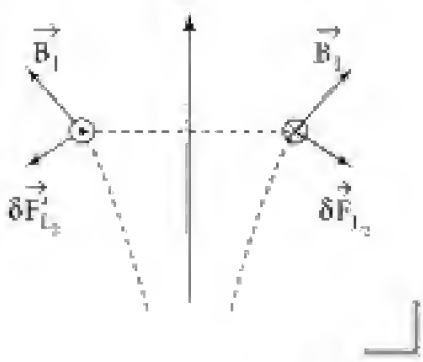
$$\boxed{i_2(t) = \frac{\pi a^2 B_m \omega}{R^2 + L^2\omega^2}\{R\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)\}} \quad (1)$$

2. a. Le système est invariant par rotation autour de Oz il doit donc en être de même de la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur $\mathcal{S}_2$, d'où :

$$\vec{F}_{L_2} = F_{L_2}\vec{u}_z.$$

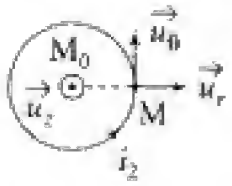
Commentaire

On peut également remarquer qu'en associant deux éléments δl_2 diamétralement opposés on a :



$$\delta\vec{F}_{L_2} + \delta\vec{F}'_{L_2} \,//\, \vec{u}_z.$$

Soit $F_{L_2} = \oint(i_2\vec{\delta l_2} \wedge \vec{B}_1)\cdot\vec{u}_z$



$$F_{L_2} = i_2\oint(a\,d\theta\vec{u}_\theta \wedge \vec{B}_1)\cdot\vec{u}_z = i_2 a\oint(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta)\cdot\vec{B}_1\,d\theta$$

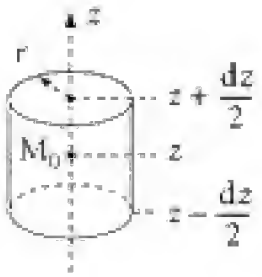
ou encore : $F_{L_2} = -i_2 a\oint(\vec{B}_1\cdot\vec{u}_r)d\theta$.

Copyrighted material

La symétrie axiale implique que la quantité $\vec{B}_1 \cdot \vec{u}_z$ est indépendante du point M de la spire, d'où :

$$\boxed{F_{1_z} = -2\pi a \cdot i_2(t) \cdot B_{1_r}(r = a, z)} \quad (2)$$

b. $\vec{B}_1$ est le champ créé par la bobine. En coordonnées cylindriques d'axe Oz, on a :



$$\vec{B}_1 = B_{1_z}\vec{u}_z + B_{1_r}\vec{u}_r.$$

Le champ magnétique étant à flux conservatif, il vient :

$$\phi_{\Sigma_f}(\vec{B}) = 0 \rightarrow B_{1_r} 2\pi r\,dz + \phi\left(z + \frac{dz}{2}\right) - \phi\left(z - \frac{dz}{2}\right) = 0$$

($\Sigma_f \equiv$ surface fermée entourant le point M_0 de cote z).

Or $\phi\left(z + \frac{dz}{2}\right) - \phi\left(z - \frac{dz}{2}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$, où $\phi(z) = \pi r^2 B_{1_z}(r = 0, z, t)$.

Finalement : $B_{1_r}(r, z, t) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_{1_z}(0, z, t)}{\partial z}$.

Soit au niveau de la spire où $r = a$ et $B_{1_z}(0, z, t) = B_m(z)\cos(\omega t)$:

$$\boxed{B_{1_r}(a, z, t) = -\frac{a}{2}\frac{dB_m(z)}{dz}\cos(\omega t)}$$

c. Les résultats (2) et (3) donnent :

$$F_{1_z} = (-2\pi a\, i_2(t))\left(-\frac{a}{2}\frac{dB_m}{dz}\cos(\omega t)\right)$$

et avec (1) :

$$F_{1_z} = \pi a^2 \frac{\pi a^2 \omega}{R^2 + L^2\omega^2}\{R\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)\}\cos(\omega t) \cdot B_m(z)\frac{dB_m}{dz}$$

d'où $\langle F_{1_z}\rangle = \frac{\pi^2 a^4 \omega}{R^2 + L^2\omega^2} B_m \frac{dB_m}{dz}\{R\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle - L\omega\langle \cos^2(\omega t)\rangle\}$

or $\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$, soit :

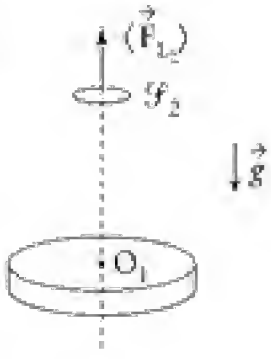
$$\boxed{\langle F_{1_z}\rangle = \frac{\pi^2 a^4 L\omega^2}{4(R^2 + L^2\omega^2)} \cdot \left(-\frac{dB_m^2}{dz}\right)}$$

C'est une fonction croissante de la pulsation ω, et pour $\omega \gg \frac{R}{L}$ on a :

$$\langle F_{1_z}\rangle = \frac{\pi^2 a^4}{4L} \cdot \left(-\frac{dB_m^2}{dz}\right).$$

Copyrighted material

De plus le module du champ créé par la bobine sur son axe décroit quand z augmente (origine des z positifs en O_1) ; dès lors $\left(-\dfrac{dB_m^2}{dz} > 0\right)$, et la force moyenne de Laplace s'exerçant sur la spire est positive, ce qui peut lui permettre d'équilibrer le poids de $\mathcal{S}_2$...



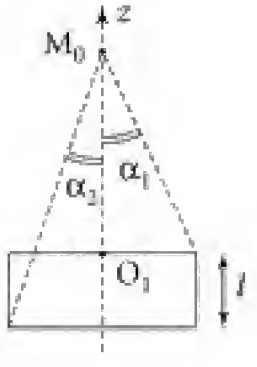
3. *Application numérique :*

■ $R = 1{,}7 \cdot 10^{-4}\ \Omega$; $L = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ H $\rightarrow f \gg 2{,}25$ kHz.

■ $B_1 = \dfrac{\mu_0 n I_m}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\cos(\omega t) = B_m(z)\cos(\omega t)$

soit $B_m(z) = \dfrac{\mu_0 n I_m}{2} \cdot \left[\dfrac{l+z}{\sqrt{(l+z)^2+b^2}} - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right]$;

$\left(n = \dfrac{N}{l}\right)$



et $B_m(h) = KI_m$ avec $K = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ SI.

D'autre part :

$$\frac{dB_m}{dz} = \frac{\mu_0 n I_m}{2} b^2 \left[\frac{1}{((l+z)^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2+b^2)^{3/2}}\right] = K' I_m$$

avec $K' = -9{,}9 \cdot 10^{-2}$.

La spire est en équilibre à une altitude h de la bobine pour I_m tel que :

$$\frac{\pi^2 a^4}{2L} K I_m \cdot (-K' I_m) = mg = \rho 2\pi a \cdot \pi e^2 \cdot g$$

soit $I_m^2 = \dfrac{4\rho e^2 L g}{(-KK')a^3} \rightarrow I_m = 13{,}4$ A $\rightarrow I_{eff} = 9{,}5$ A.

206 Moteur synchrone

On modélise un moteur synchrone de la façon suivante :

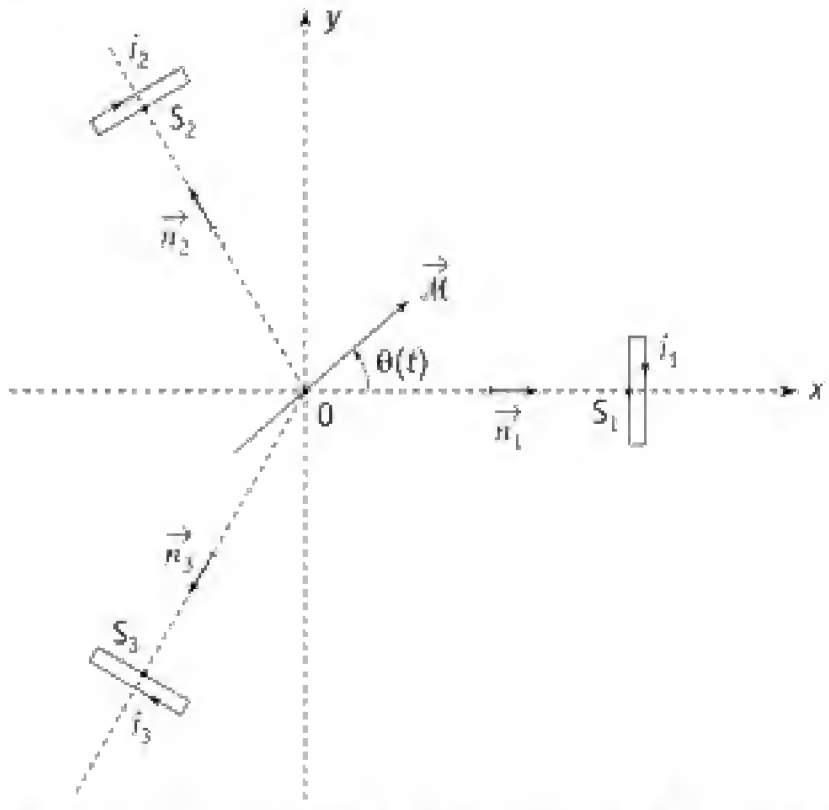
• La partie fixe (stator) est constituée de trois bobines plates identiques de centres S_1, S_2, S_3, de résistance négligeable et possédant chacune N spires de rayon a. Ces bobines sont disposées comme l'indique la figure avec des axes coplanaires faisant entre eux des angles de $\dfrac{2\pi}{3}$ concourants en O. On donne $OS_1 = OS_2 = OS_3 = d \gg a$.

Elles créent en O un champ magnétique $\vec{B}(t)$.

• Le rotor est modélisé par un dipôle magnétique placé en O de moment magnétique $\mathcal{M}$ de norme constante. Ce dipôle est mobile en rotation autour de l'axe $z'Oz$ ortho-

Copyrighted material

gonal au plan de figure : la position du dipôle à l'instant t est caractérisée par l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{\mathcal{M}})$.



Les bobines du stator sont alimentées en triphasé par des sources de courant sinusoïdal : les intensités des courants dans les trois bobines sont respectivement $i_1(t) = I\cos(\omega t)$, $i_2(t) = I\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ et $i_3(t) = I\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$. Les vecteurs unitaires normaux aux spires sont respectivement $\vec{n}_1 = \vec{u}_x$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ (voir figure).

Le rotor tourne à vitesse angulaire $\omega_0 > 0$ constante en entraînant une charge mécanique dont le moment résultant (sur le rotor) par rapport à l'axe $z'z$ est $-\Gamma_r$ (avec $\Gamma_r > 0$). Ainsi, on pourra écrire $\theta(t) = \omega_0 - \varphi$ (avec $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). On néglige tout frottement et on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents.

1. Le champ magnétique créé au point O par la bobine n° 1 peut s'écrire $ki_1(t)\vec{u}_x$. Préciser l'expression de k à l'aide de N, a et d.

2. Montrer que le champ magnétique créé au point O par les trois bobines est un champ magnétique tournant : préciser la norme de ce champ et l'angle $(\vec{u}_x, \vec{B})$ qu'il fait à l'instant t avec l'axe $x'x$.

3. Déterminer le moment résultant par rapport à l'axe $z'z$ des forces électromagnétiques s'exerçant sur le dipôle et indiquer la valeur moyenne de ce moment résultant : on rappelle qu'un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ placé en O dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumis à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(0)$.

Copyrighted material

Quelle est la condition pour que cette valeur moyenne ne soit pas nulle ? **On suppose dans la suite cette condition réalisée** : préciser alors la valeur de φ et indiquer la valeur maximum de la charge Γ, compatible avec le fonctionnement étudié.

4. La charge restant inférieure à la limite vue précédemment, quelle est l'expression faisant intervenir $\mathcal{M}$, k, I, ω et φ de la puissance mécanique utile du moteur ?

5. On s'intéresse maintenant à la puissance fournie par l'alimentation des bobines du stator.

Pour simplifier, on ne considérera ni le phénomène d'auto-induction dans chaque bobine ni le phénomène d'induction mutuelle entre les différentes bobines.

a. Étudier alors le phénomène d'induction dans la bobine n° 1 : déterminer l'expression de la f.é.m. d'induction $e_1(t)$. En déduire l'expression faisant intervenir k, I, $\mathcal{M}$, ω, φ et t de la puissance $P_1(t)$ fournie par l'alimentation à la bobine n °1.
b. Déterminer de façon analogue les puissances $P_2(t)$ et $P_3(t)$ fournies par l'alimentation aux deux autres bobines.

c. En déduire la puissance totale fournie aux bobines du stator. Conclure.

Solution

1. On utilise l'expression du champ magnétique sur l'axe d'une bobine plate dans le cadre de l'ARQP :

$$\vec{B}_1(0) = \frac{N\mu_0 i_1 a^2}{2(a^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_x = \frac{N\mu_0 i_1 a^2}{2d^3}\vec{u}_x \text{ car } d \gg a.$$

On a donc $\boxed{k = \dfrac{N\mu_0 a^2}{2d^3}}$

2. Le champ magnétique au point O est la somme des trois champs. On peut utiliser la notation complexe :

$$\underline{\vec{B}}(0) = k\mathrm{I}\exp(i\omega t)\left[\vec{u}_x + \vec{u}_2\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right) + \vec{u}_3\exp\left(-i\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

avec $\vec{u}_2 = \vec{u}_x\cos\dfrac{2\pi}{3} + \vec{u}_y\sin\dfrac{2\pi}{3}$

et $\vec{u}_3 = \vec{u}_x\cos\dfrac{2\pi}{3} - \vec{u}_y\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

D'où :

$$\underline{\vec{B}}(0) = k\mathrm{I}\exp(i\omega t)\left[\vec{u}_x\left(1 + \exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} + \exp\left(-i\frac{4\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left. + \vec{u}_y\left(\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{3} - \exp\left(-i\frac{4\pi}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

On utilise : $1 + \cos\dfrac{2\pi}{3}\left[\exp\left(-i\dfrac{2\pi}{3}\right) + \exp\left(-i\dfrac{4\pi}{3}\right)\right] = 1 - \cos\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$

Copyrighted material

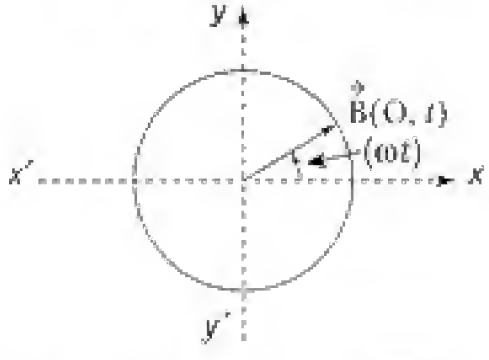
et $\sin\frac{2\pi}{3}\left[\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)-\exp\left(-i\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left[-2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \left(-\frac{3}{2}\right)i$.

D'où $\underline{\vec{B}}(0) = \frac{3}{2}kI\exp(i\omega t)[\vec{u}_x - i\vec{u}_y]$.

En repassant en notations réelles :

$$\vec{B}(0) = \frac{3}{2}kI[\vec{u}_x\cos(\omega t) + \vec{u}_y\sin(\omega t)].$$

Il s'agit donc bien d'un champ magnétique tournant à la vitesse angulaire ω.



avec $\boxed{\left\|\vec{B}(0)\right\| = \frac{3}{2}kI}$ et $\boxed{(\vec{u}_x, \vec{B}(0)) = \omega t}$

3. Le moment résultant des forces par rapport à O est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(0) = \frac{3}{2}k\mathcal{M}I \times \sin[(\omega - \omega_0)t + \varphi].$$

Le moment résultant par rapport à l'axe est donc :

$$\boxed{\Gamma_z = \frac{3}{2}k\mathcal{M}I\sin[(\omega - \omega_0)t + \varphi]}$$

Si $\omega \neq \omega_0$, $\langle\Gamma_z\rangle = 0$.

Si $\omega = \omega_0$, $\langle\Gamma_z\rangle = \Gamma_z = +\frac{3}{2}k\mathcal{M}I\sin\varphi$.

La condition cherchée est donc $\omega = \omega_0$.

Le théorème du moment cinétique appliqué au rotor conduit à l'égalité :

$\Gamma_z - \Gamma_r = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\sin\varphi = \frac{2\Gamma_r}{3k\mathcal{M}I}}$

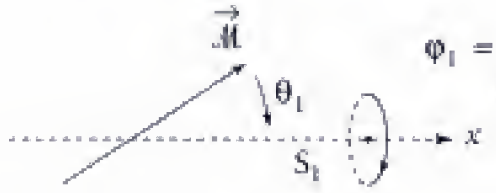
Il faut $0 \leqslant \sin\varphi < 1 \Rightarrow$ $\boxed{\Gamma_r < \frac{3}{2}k\mathcal{M}I}$

4. La puissance mécanique utile du moteur correspond à l'opposé de la puissance de la charge :

$P_{méca} = \Gamma_r\omega \Rightarrow$ $\boxed{P_{méca} = \frac{3}{2}k\mathcal{M}I\,\omega \cdot \sin\varphi}$

Copyrighted material

5. a. Le flux du champ magnétique crée par le dipôle à travers une spire de la bobine n °1 est :



$$\varphi_1 = \iint_{1\text{ spire}} \vec{B}_{\text{dipôle}} \cdot \vec{u}_x \, dS$$

Comme $d \gg a$, on peut considérer qu'en tout point de la surface du disque $\vec{B}_{\text{dipôle}} \approx \vec{B}_{\text{dipôle}}(S_1)$.

Or $\vec{B}_{\text{dipôle}}(S_1) \cdot \vec{u}_x$ représente la composante radiale du champ magnétique au point S_1. Donc :

$\vec{B}_{\text{dipôle}}(S_1) \cdot \vec{u}_x = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M} \cos\theta_1}{2\pi d^3}$ d'après l'expression du champ créé par un dipôle.

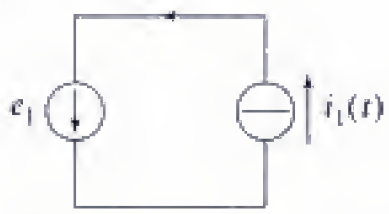
D'où $\phi_1 = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M} \cos\theta_1}{2\pi d^3} \pi a^2 = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M} a^2}{2d^3} \cos(\omega t - \varphi)$ avec $\theta_1 = -(\omega t - \varphi)$

et $\phi_1 = k\mathcal{M}\cos(\omega t - \varphi)$ pour le flux à travers la bobine n° 1.

On obtient alors la f.é.m. d'induction :

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} \Rightarrow \boxed{e_1 = +k\mathcal{M}I\omega \cdot \sin(\omega t - \varphi)}$$

Le circuit de la bobine n° 1 est alors équivalent à :



la puissance fournie par l'alimentation (la source de courant) est alors :

$$P_1 = -e_1 i_1 \Rightarrow \boxed{P_1 = -k\mathcal{M}I\omega \cdot \sin(\omega t - \varphi)\cos(\omega t)}$$

b. Pour la f.é.m. d'induction dans la bobine n° 2, il faut remplacer θ_1 par $\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{2\pi}{3} = -(\omega t - \varphi) + \dfrac{2\pi}{3}$.

On a alors $\phi_2 = \dfrac{1}{2} k\mathcal{M}\cos\left(\omega t - \varphi - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$e_2 = +\frac{1}{2} k\mathcal{M}\omega \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

et $$\boxed{P_2 = -k\mathcal{M}I\omega \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Copyrighted material

De façon analogue,

$$\boxed{P_3 = -k\mathcal{M}I\omega\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)}$$

c. La puissance totale fournie aux bobines est alors

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = -k\mathcal{M}I\omega\left[\sin(\omega t - \varphi)\cos\omega t + \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

On utilise :

$$\sin(\omega t - \varphi)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}[\sin(2\omega t - \varphi) - \sin\varphi]$$

$$\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) - \sin\varphi\right]$$

$$\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{8\pi}{3}\right) - \sin\varphi\right]$$

comme $\sin(2\omega t - \varphi) + \sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{8\pi}{3}\right) = 0$,

il reste

$$P = -k\mathcal{M}I\omega\left[-\frac{3}{2}\sin\varphi\right] \Rightarrow \boxed{P = \frac{3}{2}k\mathcal{M}I\omega\sin\varphi}$$

On retrouve bien le bilan énergétique : il y a transfert de puissance des alimentations du stator vers la charge mécanique.

207 Déplacement de deux spires

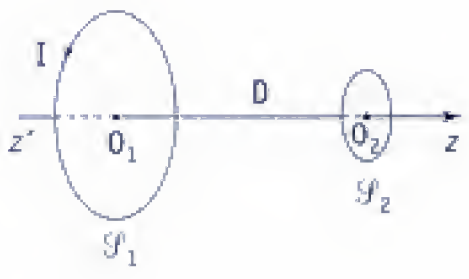
Deux spires $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ont même axe $z'z$.

Leurs rayons respectifs sont a_1 et a_2.

La spire $\mathcal{S}_1$ est parcourue par un courant I maintenu constant.

La spire $\mathcal{S}_2$ possède une résistance R et on néglige son auto-inductance.

Elle peut coulisser sans frottements sur l'axe $z'z$. Les deux spires étant initialement immobiles on déplace $\mathcal{S}_1$ d'une distance d.



L'expérience envisagée montre que $\mathcal{S}_2$ se déplace de la même distance d, et dans le même sens, avant de s'immobiliser.

Copyrighted material

1. Proposer une analyse qualitative des phénomènes physiques mis en jeu.

2. a. On note M(D) le coefficient de mutuelle entre les deux spires. Établir l'équation donnant l'expression du courant $i(t)$ circulant dans $\mathscr{S}_2$, en fonction de I, R et $\dfrac{dM}{dt}$.

b. On cherche à déterminer la résultante $\vec{F}_L$ des forces de Laplace s'exerçant sur $\mathscr{S}_2$. À cet effet, on se place dans le cadre simplificateur suivant :

- $D(t) \gg a_1$ et a_2.
- Au voisinage de l'axe Oz, et au premier ordre en r :

$$B_z(r, z) = B_0(z) \quad \text{et} \quad B_r(r, z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}.$$

$B_0(z)$ représentant le champ magnétique crée par $\mathscr{S}_1$ sur son axe.

Évaluer $\vec{F}_L$ en fonction de i, I, μ_0, a_1, a_2 et D, puis montrer que l'on a à l'approximation considérée :

$$\vec{F}_L = i\,I\frac{dM}{dD}\vec{u}_z$$

résultat dont on admettra la généralité (dans l'AEQS...).

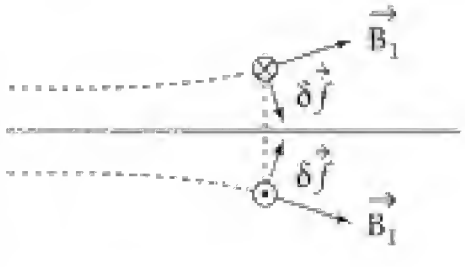
c. Justifier alors que $\mathscr{S}_2$ s'immobilise bien après avoir parcouru la même distance que $\mathscr{S}_1$ et dans le même sens.

Solution

1. *Analyse qualitative*

■ Le déplacement de $\mathscr{S}_1$ provoque une variation du champ magnétique au niveau de la spire $\mathscr{S}_2$. Il en résulte la création d'un courant induit i qui, au moins dans un premier temps, est de sens opposé à I. Ce courant i contribue à compenser l'augmentation initiale de flux dû au rapprochement de la spire $\mathscr{S}_1$.

L'examen des forces de Laplace montre l'existence d'une force résultante qui met en mouvement la spire $\mathscr{S}_2$ dans le même sens que $\mathscr{S}_1$ (effet de modération : loi de lenz).



■ L'état final doit correspondre à un système immobile et à un courant i nul, le mouvement de $\mathscr{S}_2$ s'amortissant du fait de la dissipation d'énergie par effet Joule.

■ À partir du moment où la spire $\mathscr{S}_1$ est de nouveau immobile le champ qu'elle crée redevient indépendant du temps. On sait alors que la puissance des efforts de Laplace agissant sur $\mathscr{S}_2$ et la puissance des phénomènes électromoteurs dûs au déplacement de $\mathscr{S}_2$ doivent se compenser :

$$\mathscr{P}_L^{ext} + \mathscr{P}_{em}^{ext} = 0.$$

Copyrighted material

Or d'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à $\mathcal{S}_2$:

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_L^{ext}.$$

Et d'après les lois de l'électrocinétique :

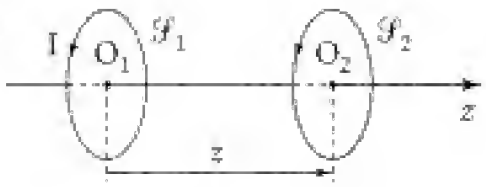
$$\mathcal{P}_{em}^{ext} = R\,i^2 \quad \text{(auto-induction négligée)}.$$

On a donc à partir de cet instant :

$$\frac{dE_c}{dt} = -R\,i^2.$$

Et la vitesse de $\mathcal{S}_2$ ne peut que diminuer. Elle finira par s'annuler (un état permanent où v_2 = cste et où $\mathcal{S}_2$ est à distance finie étant physiquement exclu : variation de flux → courant induit → v_2 diminue...).

2. a. Notons $M(z)$ la mutuelle entre les deux spires. Le flux traversant $\mathcal{S}_2$ est donné par :



$$\Phi_{1\to 2} = MI.$$

Soit une force électromotrice d'induction :

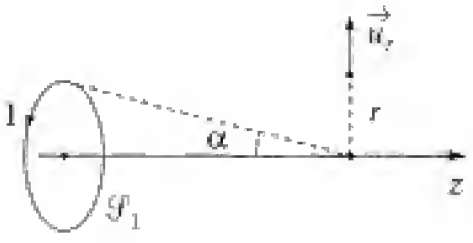
$$\varepsilon^{ext} = -\frac{d\Phi_{1\to 2}}{dt} = -I\frac{dM}{dt} \quad (I \text{ maintenu constant}).$$

On a donc (phénomènes d'auto-induction négligés) :

$$\varepsilon^{ext} = R\,i \Rightarrow \boxed{R\,i = -I\frac{dM}{dt}} \quad (1)$$

b. Déterminons une expression de la force de Laplace en fonction du coefficient de mutuelle M. Cette force ne doit dépendre que des courants i et I et de la géométrie du système dans la configuration étudiée (que l'on fige à l'instant t).

Plaçons-nous dans le cas plus simple indiqué par l'énoncé ($O_1O_2 \gg a_2$ et a_2) :



le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par $\mathcal{S}_1$ sur son axe et d'après le cours :

$$\vec{B}_1 = B_0(z)\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2a_1}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z$$

avec $\sin\alpha = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + D^2(t)}} \sim \dfrac{a_1}{D(t)}$

$(a_1 \ll D(t))$

soit $B_0(z) \sim \dfrac{\mu_0 I}{2a_1}\cdot\left(\dfrac{a_1}{D}\right)^3$.

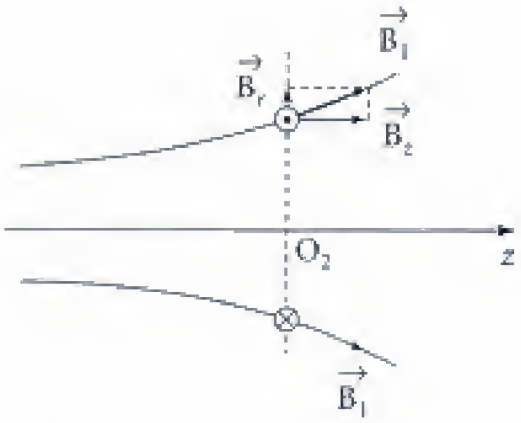
D'où $\vec{B}_{r_1} = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_0}{dz}\vec{u}_r = +\dfrac{3}{4}r\left(\dfrac{\mu_0 I a_1^2}{D^5}\right)\vec{u}_r$.

Copyrighted material

Or

$$\delta\vec{F}_L = i\vec{\delta l}\wedge\vec{B}_1 = i\vec{\delta l}\wedge\vec{B}_{z_1} + i\vec{\delta l}\wedge\vec{B}_{r_1}$$

$$\oint i\vec{\delta l}\wedge\vec{B}_{z_1}(r,z) = \underbrace{i\left(\oint\vec{\delta l}\right)}_{0}\wedge\vec{B}_{z_1}(r,z) = \vec{0}.$$



Il reste :

$$\delta\vec{F}_L = i\vec{\delta l}\wedge B_{r_1}\vec{u}_r = i\delta l B_{r_1}(-\vec{u}_z).$$

Finalement $\vec{F}_L = -i2\pi a_2 B_{r_1}(a_2, z)\vec{u}_z$.

D'où :

$$\vec{F}_L = -i2\pi a_2\frac{3}{4}a_2\left(\frac{\mu_0 I a_1^2}{D^4}\right)\vec{u}_z \rightarrow F_L = iI\left\{-\frac{3\mu_0 a_1^2 a_2^2\pi}{4D^4}\right\} \quad (3)$$

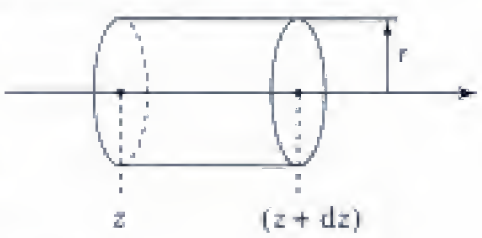
Or à la même approximation : $\phi_{1\to 2} = MI \approx \pi a_2^2 \cdot B_0(z = D)$.

$$MI = \pi a_2^2\frac{\mu_0 I}{2a_1}\frac{a_1^3}{D^3} \rightarrow M \approx \frac{1}{2}\pi a_2^2 a_1^2\mu_0\frac{1}{D^3} \quad (4)$$

(3) et (4) se traduisent par : $F_L = iI\dfrac{dM}{dD}$ (5) $\dfrac{d}{dD}\left(\dfrac{1}{D^3}\right) = -\dfrac{3}{D^4}$.

Commentaires

- L'expression (5) ne dépend pas en fait de l'approximation faite ici pour la démontrer.
- L'expression donnant B_r au premier ordre par rapport à r (distance à l'axe) se déduit simplement de $\text{div}\vec{B} = 0$, soit encore $\phi_{\Sigma_f}(\vec{B}) = 0$: choisissons pour Σ_f le cylindre de hauteur dz, d'axe Oz et de base circulaire de rayon r. Notons $B_0(z)$ le champ sur l'axe (ici de $\mathcal{S}_1$).



$$\phi_{\Sigma_f}(\vec{B}) = \underbrace{\{B_0(z+dz)\pi r^2 - B_0(z)\pi r^2\}}_{\text{à l'ordre le plus bas par rapport à } r} + 2\pi r\,dz B_r(r,z)$$

d'où : $2\pi r\,dz B_r + \dfrac{dB_0}{dz}dz\pi r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{B_r(r,z) = -\dfrac{1}{2}r\dfrac{dB_0}{dz}}$

c. • Il reste à traduire que la spire se met en mouvement sous l'action des forces de Laplace.

Le théorème de la résultante dynamique s'écrit en notant m la masse de la spire $\mathcal{S}_2$:

$$\boxed{m\frac{dv_2}{dt} = F_L} \quad (6)$$

Copyrighted material

On a donc d'après (6) et (5) :

$$m\frac{dv_2}{dt} = iI\cdot\frac{dM}{dD} \quad (7) \text{ (où } D = D(t)\text{)}.$$

Les équations (1) et (7) donnent alors :

$$m\frac{dv_2}{dt} = -\frac{I^2}{R}\frac{dM}{dt}\cdot\frac{dM}{dD}$$

soit encore avec $\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dD}\cdot\frac{dD}{dt}$:

$$m\frac{dv_2}{dt} = -\frac{I^2}{R}\left(\frac{dM}{dD}\right)^2\frac{dD}{dt}$$

d'où : $m\int_{v_2=0}^{v_2=0} dv_2 = 0 = -\frac{I^2}{R}\int_{D_0}^{D_F}\left(\frac{dM}{dD}\right)^2\cdot dD.$

À l'instant initial les deux spires sont distantes de D_0. À l'instant final $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont fixes et leur distance est devenue D_F.

Ce qui impose : $$\int_{D_0}^{D_F}\left(\frac{dM}{dD}\right)^2 dD = 0,$$

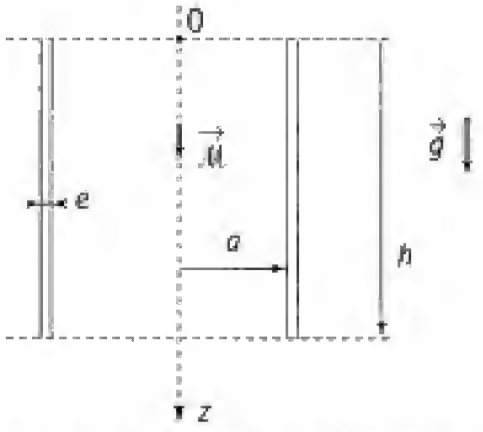
soit $D_F = D_0$ $\left(\left(\frac{dM}{dD}\right)^2 \text{ fonction continue et positive}\right)$.

La spire $\mathcal{S}_2$ se sera donc également translatée, et dans le même sens que $\mathcal{S}_1$, d'une distance d (où d représente le déplacement imposé à $\mathcal{S}_1$).

208 Chute d'un aimant dans un tuyau cylindrique

Un aimant de masse m est assimilé à un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}_z$. Il est initialement placé en O puis abandonné sans vitesse initiale : il décrit dans sa chute l'axe vertical Oz d'un cylindre de rayon a, de hauteur h et d'épaisseur e (cf. figure). On suppose $e \ll a$.

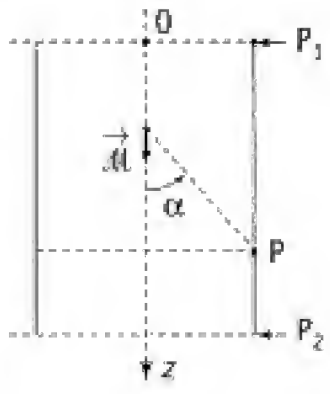
On mesure le temps de chute correspondant à h (t_c pour un cylindre conducteur, t'_c pour un cylindre non conducteur).



1. L'expérience montre que $t_c > t'_c$. Justifier, et préciser la nature des phénomènes physiques à l'origine de cette différence.

Copyrighted material

2. a. Déterminer, dans le cas du cylindre conducteur (conductivité électrique γ), les expressions de la densité volumique $\vec{j}(P, t)$ des courants induits et du champ électrique $\vec{E}(P, t)$. On négligera les phénomènes d'autoinduction, et on exprimera ces champs en fonction de $\mu_0 M$, a, v (vitesse de l'aimant à l'instant t) et de l'angle α (*cf.* figure).



b. Soit $\vec{F}$ la force exercée par les courants induits sur l'aimant. Montrer qu'elle s'exprime sous la forme $\vec{F} = -K\vec{v}$ avec :

$$K = \frac{8}{9}\frac{\mu_0^2 M^2 \gamma e}{\pi a^4}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin^6\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha$$

(α_1 et α_2 angles associés aux points P_1 et P_2).

Que devient ce résultat pour $\vec{M}$ suffisamment éloigné des bords des cylindre (on a $h \gg a$).

On donne : $\int_0^{\pi} \sin^6\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{5\pi}{128}$.

Commenter.

3. A.N. on a : $h = 1\text{m}$; $g = 9{,}81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a = 7{,}5\text{mm}$; $e = 1\text{mm}$

$\|\vec{M}\| = 0{,}75\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$; $m = 8\cdot 10^{-3}\text{kg}$

$\gamma_{Cu} = 5{,}98\cdot 10^7\ \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$; $\gamma_{Al} = 3{,}77\cdot 10^7\ \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

L'expérience donne $t_c' = 0{,}46\text{s}$; $t_c(\text{Cu}) \approx 10\text{s}$; $t_c(\text{Al}) \approx 7\text{s}$.

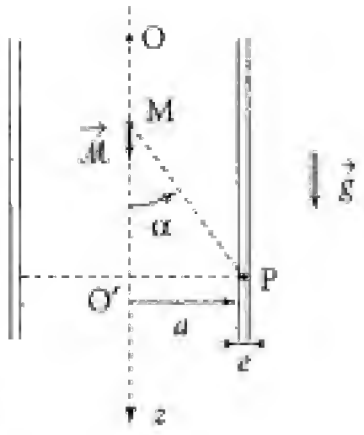
Commenter ces résultats.

Solution

1. Analyse qualitative :

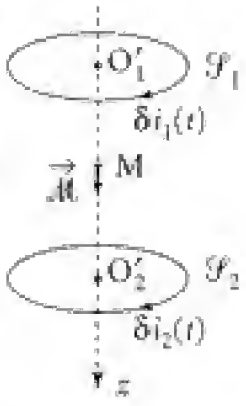
■ On assimile l'aimant à un moment magnétique $\vec{M} = M\vec{u}_z$ en chute verticale (effets de $\vec{g}$) selon l'axe Oz. L'aimant crée en P, point fixe du cylindre, un champ magnétique $\vec{B}(P, t)$ variable dans le temps (α et MP variables) qui induit un champ électrique $\vec{E}(P, t)$ (*cf.* loi de Faraday).

Dans le cas où le cylindre est conducteur, le champ $\vec{E}(P, t)$ va induire des courants de densité volumique $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (loi d'Ohm ; γ = conductivité électrique du métal).



Copyrighted material

Un élément de cylindre de hauteur dz centré en O′ est alors « réductible » à une spire parcourue par un courant induit $\delta i(t)$, et :

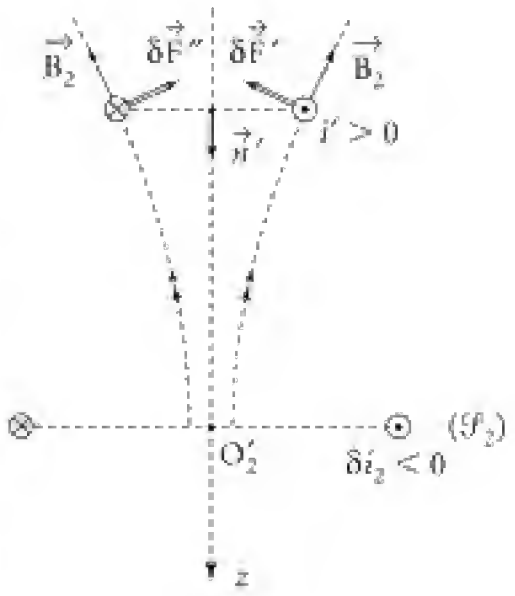


• Le flux crée par ce courant induit à travers une spire $\mathscr{S}_2$ située en dessous de $\vec{\mathcal{M}}$ doit tendre à compenser l'augmentation de flux résultant du déplacement de l'aimant (normale à la spire selon $\vec{u}_z$).

On doit donc avoir $\delta i_2 < 0$. Pour une spire $\mathscr{S}_1$ située au dessus de $\vec{\mathcal{M}}$ il vient $\delta i_1 > 0$, l'aimant s'éloignant de $\mathscr{S}_1$.

• Ces courants vont créer à leur tour un champ magnétique $\vec{b}$ qui va exercer sur $\vec{\mathcal{M}}$ une « force de Laplace » dirigée selon Oz d'après les symétries du problème : $\vec{F} = F\vec{u}_z$. D'après la loi de Lenz (loi de modération) on peut prévoir que $F < 0$ (la force subie en réaction s'oppose à la cause, à savoir la chute de l'aimant). Vérifions-le en considérant l'interaction {spire $\mathscr{S}_2$/$\vec{\mathcal{M}}$}. À cet effet, modélisons $\vec{\mathcal{M}}$ par une petite spire $\mathscr{S}'$ telle que $\vec{\mathcal{M}} = i's'\vec{u}_z$.

Sur le dessin ci-contre on a représenté, en coupe, la spire $\mathscr{S}_2$, le champ $\vec{B}_2$ qu'elle crée au niveau de $\mathscr{S}'$, et les forces de Laplace élémentaires associés à deux éléments de même longueur $\delta l'$ diamétralement opposés.



On a bien $\delta\vec{F}' + \delta\vec{F}''$ porté par $\vec{u}_z$ et dirigé vers le haut.

Cette force $\vec{F} = F\vec{u}_z$ va donc ralentir la descente de l'aimant, le temps de chute mesuré t_c devenant plus grand en présence du cylindre conducteur.

Dans le cas où le cylindre est isolant (cylindre en plastique par exemple) il n'y a plus de courants induits et l'aimant subit une chute « libre » selon :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}gt_c'^2 \rightarrow t_c' = \sqrt{\frac{2h}{g}} < t_c \quad (1)$$

2. Détermination du champ électrique $\vec{E}$ induit par la chute de l'aimant :

Le plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie. Il en résulte que $\vec{E}$ et $\vec{j}$ ($\vec{j} = \gamma\vec{E}$) sont perpendiculaires à ce plan.

Les courants sont donc annulaires : $\vec{j} = j\vec{u}_\theta$ et $\vec{E} = E\vec{u}_\theta$.

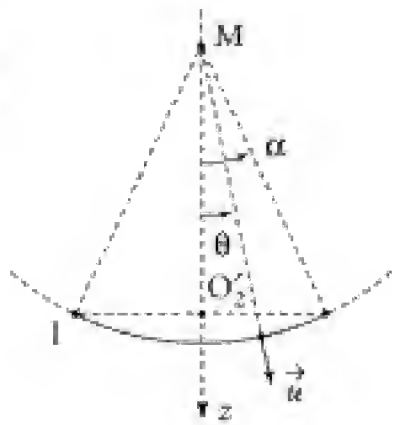
Du fait de la faible épaisseur e du « tuyau » cylindrique, on peut considérer que j et E ne dépendent que de z et de t.

Copyrighted material

Considérons alors la spire $\mathcal{S}_2$ de rayon a et de section $e\,dz$. Elle est parcourue par un courant $\delta i_2(t)$ donné par la loi de l'électrocinétique (on néglige les phénomènes d'autoinduction associés à ces courants induits) :

$$\varepsilon = R\delta i_2 \quad (2) \quad \text{avec} \begin{cases} \varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt} & \text{(loi de Fraraday)} \\ \text{où } \phi = \iint \overrightarrow{B_M} \cdot \vec{u}_z \delta\Sigma_2 \end{cases}$$

or, $\vec{B}$ étant à flux conservatif le flux de ce champ à travers la spire $\mathcal{S}_2$ est le même que celui calculé à travers la calotte sphérique de centre M s'appuyant sur $\mathcal{S}_2$, d'où :



$$\phi = \iint B_\rho \delta\Sigma \quad \text{avec} \begin{cases} B_\rho = \dfrac{2\mu_0 \mathcal{M}\cos\theta}{4\pi\rho^3} ; (\rho = MI) \\ \delta\Sigma = 2\pi\rho^2 \sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad \phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{\rho}\int_0^\alpha \cos\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\rho}\sin^2\alpha$$

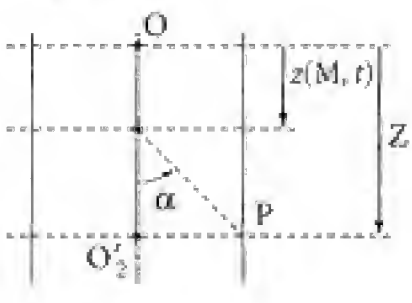
$$\text{et avec } \rho\sin\alpha = a \rightarrow \boxed{\phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a}\sin^3\alpha} \quad (3)$$

l'équation (2) devient :

$$R\delta i_2 = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a}\frac{d}{dt}(\sin^3\alpha) = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{a}\sin^2\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\text{or} \quad \text{cotan}\alpha = \frac{z_{O'_2} - z_M}{a} \rightarrow -\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{a}\frac{dz_M}{dt} = -\frac{v}{a}$$

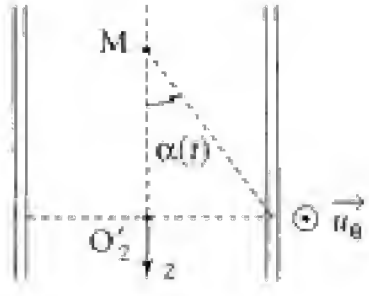
$$\text{d'où} \quad R\cdot\delta i_2 = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{a^2}\sin^4\alpha\cos\alpha\cdot v \quad (4)$$



La résistance R de la « spire » $\mathcal{S}_2$ est $R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{2\pi a}{e\,dZ}$; $(Z = z_{O'_2})$

$$\text{soit : } \delta i_2 = -\frac{3\mu_0 \mathcal{M}\gamma e}{4\pi a^2}\sin^4\alpha\cos\alpha\cdot v\cdot dZ \quad (4)$$

On peut alors en déduire la densité volumique de courant $\vec{j}$ $(\delta i_2 = je\,dZ)$ et le champ électrique $\vec{E}$ $(\vec{j} = \gamma\vec{E})$:



$$\boxed{\vec{j} = -\frac{3\mu_0 \mathcal{M}\gamma}{4\pi a^3}\sin^4\alpha\cos\alpha v\vec{u}_\theta}$$

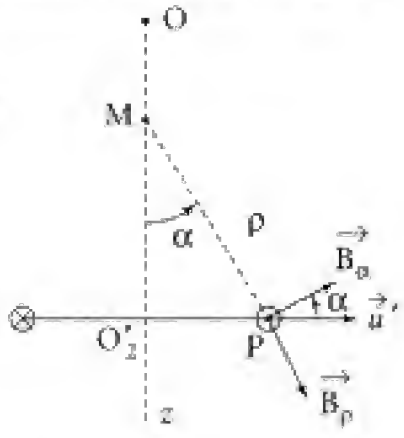
$$\text{et} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi a^3}\sin^4\alpha\cos\alpha v\vec{u}_\theta}$$

Copyrighted material

b. Pour calculer la force de Laplace $\vec{F} = F\vec{u_z}$ s'exerçant sur l'aimant on va plutôt rechercher celle créée par l'aimant sur le cylindre conducteur puis appliquer le principe de l'action et de la réaction. Commençons donc par nous intéresser à l'interaction $\vec{\mathcal{M}}/\mathcal{S}_2$.

On a $\delta\vec{F}' = \delta i_2 \cdot \delta\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_{\mathcal{M}}(P)$.

Par symétrie (invariance par rotation autour de Oz) la force résultante $\vec{F}'_L$ est portée par $\vec{u_z}$, d'où :



$$\delta\vec{F}' = \delta i_2 \oint_{\mathcal{S}_2} a\,d\theta\,\vec{u}_\theta \wedge (B_\alpha\cos\alpha + B_\rho\sin\alpha)\vec{u}'$$

$$\delta\vec{F}' = \delta i_2 2\pi a(B_\alpha\cos\alpha + B_\rho\sin\alpha)(-\vec{u_z})$$

or $B_\rho = \dfrac{2\mu_0\mathcal{M}\cos\alpha}{4\pi\rho^3}$

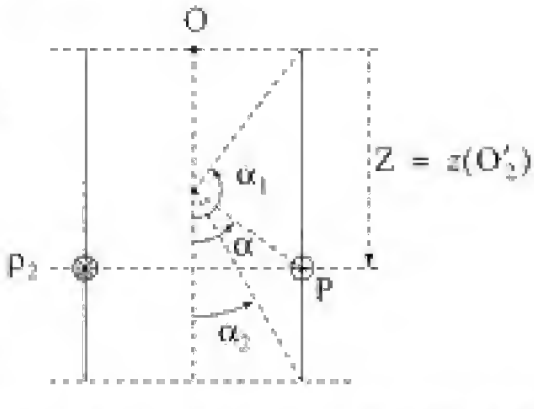
et $B_\alpha = \dfrac{\mu_0\mathcal{M}\sin\alpha}{4\pi\rho^3} \rightarrow \delta\vec{F}' = -\dfrac{\mu_0\mathcal{M}a^2}{2\rho^3}\delta i_2 3\cos\alpha\sin\alpha\vec{u_z}$

et avec $\rho = \dfrac{a}{\sin\alpha}$: $\delta\vec{F}' = -\delta i_2 \cdot \dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{2a}3\sin^4\alpha\cos\alpha\vec{u_z}$

et avec (4) : $\delta\vec{F}' = \dfrac{9}{8}\dfrac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{\pi a^5}\sin^8\cos^2\alpha v\,dZ\vec{u_z}$ avec $Z = z(O'_2)$.

D'où

$$\vec{F} = \ominus\,\frac{9}{8}\frac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{\pi^2 a^5} v \int_{Z=0}^{Z=h} \sin^8\alpha\cos^2\alpha\,dZ\vec{u_z}$$



or, à t fixé α varie avec P de α_1 à α_2 avec

$$\text{cotan}\alpha = \frac{Z - z_M(t)}{a} \rightarrow \frac{dZ}{a} = -\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

soit $\vec{F} = -\dfrac{9}{8}\dfrac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{\pi^2 a^5}\vec{v}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sin^6\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha\vec{u_z}$.

■ Pour une position de l'aimant suffisamment éloignée des bords on peut faire ($a \ll h$) :

$\alpha_1 \sim \pi$ et $\alpha_2 \sim 0$, d'où $\displaystyle\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sin^6\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha = \int_0^{\pi}\sin^6\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha \approx \frac{5}{128}\pi$ (*cf.* énoncé)

soit : $\vec{F} = -\dfrac{45}{1\,024}\dfrac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{a^4}\vec{v} \rightarrow \boxed{\vec{F} \approx -4{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot \dfrac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{a^4}\vec{v} = -K\vec{v}}$

Commentaires

Le coefficient K est proportionnel à $\mathcal{M}^2$ ce qui est normal puisque l'expression de la force s'exerçant sur $\mathcal{M}$ est directement proportionnelle à $\mathcal{M}$ et que le champ $\vec{b}$ est induit par le mouvement de $\mathcal{M}$.

Copyrighted material

Il augmente également avec la conductivité du milieu, les courants induits étant d'autant plus intenses que γ est grand…

3. Application numérique

■ Cylindre non conducteur : $t_c' \sim \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9{,}81}} = 0{,}45$ s, résultat conforme à l'indication de l'énoncé ($t_c' = 0{,}46$ s).

■ Cylindre conducteur :

L'équation du mouvement (en négligeant l'action de l'air) est donnée par :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mathrm{K}v = mg$$

soit en posant $\tau = \frac{m}{\mathrm{K}}$: $\tau\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = v_l = \frac{mg}{\mathrm{K}}$.

Il apparaît une vitesse limite $v_l = \frac{mg}{\mathrm{K}}$. Soit en supposant le temps de chute t_c suffisamment grand devant τ :

$$t_c \sim \frac{h}{v_l} = \frac{h\mathrm{K}}{mg}$$

pour un cylindre en cuivre on obtient : $\mathrm{K} = 0{,}74$ kg · s^{-1}

$\tau = 0{,}01$ s et $t_c \sim 9{,}5$ s

pour un cylindre en aluminium : $\mathrm{K} = 0{,}47$

$\tau = 0{,}02$ s et $t_c \sim 6$ s

Ces résultat semblent convenables…

Copyrighted material

Partie

3

Physique des ondes

Copyrighted material

Chapitre

1

Corde vibrante

101 Deux cordes mises bout à bout

Une corde « infinie » est constituée de deux parties :

■ $x < 0$: masse linéique μ_1, tension T (constante) ;

■ $x > 0$: masse linéique μ_2, même tension T.

Une onde progressive se dirige vers le point O en provenant de la région des $x < 0$.

1. Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission τ relatifs à la vitesse.

On introduira la quantité $n = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$.

Commenter les résultats obtenus.

Que se passe-t-il pour les cas limites $\mu_2 = 0$ et μ_2 infini ?

2. Définir la puissance $\Pi(x, t)$ transférée en x dans le sens des $x > 0$, puis vérifier la conservation de l'énergie en $x = 0$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Ondes transversales sur une corde vibrante.
- Ondes progressives, ondes régressives, ondes stationnaires.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On écrira la continuité de la vitesse et de la pente de la corde au point O.

2. Seule la composante transversale T_y développe une puissance. On écrira qu'il n'y a ni création ni déperdition d'énergie en $x = 0$.

3. Solution

1. ■ Les célérités des ondes susceptibles de se propager sur chaque partie de corde sont données par :

$$c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \text{ pour } x < 0 ; \quad c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \text{ pour } x > 0 .$$

L'onde progressive incidente est associée à une élongation de la corde de la forme :

$$y_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right).$$

Il lui correspond une onde de vitesse $v_i(x, t) = \dfrac{\partial y_i}{\partial t} = f'\left(t - \dfrac{x}{c_1}\right)$ (la dérivée est prise par rapport à la variable t ou encore par rapport à $t - \dfrac{x}{c_1}$).

Copyrighted material

De même pour les ondes réfléchies et transmises :

$$y_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \rightarrow v_r(x, t) = g'\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$$

$$y_t(x, t) = h\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \rightarrow v_t(x, t) = h'\left(t - \frac{x}{c_2}\right).$$

■ Les relations de passage en $x = 0$ doivent réaliser :

– la continuité de la position (c'est-à-dire de la vitesse) :

$$y(0^-, t) = y(0^+, t) \text{ ou } v(0^-, t) = v(0^+, t), \text{ pour tout } t.$$

Soit $y_i(0, t) + y_r(0, t) = y_t(0, t)$ ou $v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t)$

– la continuité de la dérivée par rapport à x : une discontinuité de la tangente impliquerait une force résultante non nulle qui, agissant sur le point (sans masse) O, lui conférerait une accélération infinie. D'où :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0^-, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0^+, t) \text{ soit } \frac{\partial y_i}{\partial x}(0, t) + \frac{\partial y_r}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y_t}{\partial x}(0, t).$$

Remarquons alors que l'on a en notant $\xi = t - \frac{x}{c_1}$:

$$v_i(x, t) = \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c_1}\frac{df}{d\xi} = -\frac{1}{c_1}v_i(x, t) \qquad (1)$$

On peut vérifier que l'on a également :

$$\frac{\partial y_t(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c_2}v_t(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y_r(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{c_1}v_r(x, t) \qquad (2)$$

Les relations de passage deviennent en utilisant les vitesses :

$$\left\{\begin{array}{l} v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t) \\ -\frac{1}{c_1}(v_i(0, t) - v_r(0, t)) = -\frac{1}{c_2}v_t(0, t) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Définissons les coefficients de réflexion et de transmission (pour la vitesse ou pour l'élongation) par les relations :

$$r = \frac{v_r(0, t)}{v_i(0, t)} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{v_t(0, t)}{v_i(0, t)}.$$

Les équations (1) s'écrivent alors : $1 + r = \tau$ et $1 - r = \frac{c_1}{c_2}\tau$.

D'où nous tirons : $r = \dfrac{1 - \frac{c_1}{c_2}}{1 + \frac{c_1}{c_2}}$ et $\tau = \dfrac{2}{1 + \frac{c_1}{c_2}}$.

Copyrighted material

Et en faisant intervenir la quantité $n = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$:

$$\boxed{r = \frac{1 - n}{1 + n} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2}{1 + n}} \quad (2)$$

Commentaires

On retrouve exactement les mêmes coefficients que ceux obtenus en optique lors de la réflexion, en incidence normale, d'une onde sur un milieu diélectrique d'indice n (interface vide / diélectrique), ou sur la surface de séparation de deux diélectriques (n est alors l'indice relatif qui, par définition pour des milieux transparents, s'identifie à $n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$).

■ Étude des cas particuliers :

– dans le cas où $\mu_2 = 0$, le coefficient n vaut zéro, et l'on trouve :

$$\boxed{r = 1 \quad \text{et} \quad \tau = 2}$$

La signification physique de $r = 1$ est évidente : l'onde incidente est réfléchie sans changement de signe. Il s'agit du phénomène connu de réflexion à l'extrémité libre d'une corde.

La signification de $\tau = 2$ est intuitive : on peut l'interpréter en remarquant que le point $x = 0$ est un ventre d'amplitude double de celle de l'onde incidente. La corde de masse nulle (c'est-à-dire très faible dans la pratique) ne sert qu'à assurer la tension de l'ensemble.

– Dans le cas où μ_2 tend vers l'infini, le coefficient n tend vers l'infini et l'on trouve :

$$\boxed{r = -1 \quad \text{et} \quad \tau = 0}$$

La très grande inertie de la partie ($x > 0$) de la corde est telle que le point O ne peut plus bouger.

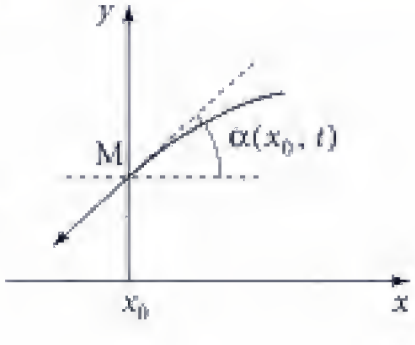
Les deux cas particuliers qui viennent d'être étudiés correspondent, dans la région de gauche ($x < 0$) à des ***ondes stationnaires***. En effet, dans chacun de ces deux cas, le mouvement est la superposition de deux ondes sinusoïdales de même amplitude ($|r| = 1$) se propageant en sens inverse.

2. La force exercée en x_0 par la partie de la corde située en x_0^- sur l'extrémité x_0^+ est :

$$T_y \# - T \cdot \alpha(x_0, t) \# - T\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t).$$

La puissance transférée dans le sens des x positifs est alors donnée par :

$$\Pi = -T_y v = -T\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)v(x_0, t).$$



Copyrighted material

Soit pour une onde progressive $\left(\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{c}v\right)$:

$$\Pi_+(x, t) = +\frac{T}{c}v^2(x, t)$$

et pour une onde régressive (se propageant dans le sens des $x < 0$) :

$$\Pi_-(x, t) = -\frac{T}{c}v^2(x, t).$$

La conservation de l'énergie en $x = 0$ doit prendre la forme (O est sans masse) :

$$\Pi_{\text{total}}(0^-, t) = \Pi_{\text{total}}(0^+, t) \quad (3)$$

Or $\Pi_{\text{total}}(0^+, t) = \Pi_t(0, t) = \frac{T}{c_2}v_t^2(0, t) = c_2\mu_2 v_t^2(0, t)$.

D'autre part :

$$\Pi_{\text{total}}(x < 0, t) = -T_i v = -T\left(\frac{\partial y_i}{\partial x} + \frac{\partial y_r}{\partial x}\right)(v_i + v_r)$$

et d'après (1) et (2) :

$$\Pi_{\text{total}}(x < 0, t) = +\frac{T}{c_1}(v_i + v_r)(v_i - v_r) = c_1\mu_1(v_i^2 - v_r^2).$$

L'égalité (3) devient :

$$\mu_1 c_1[v_i^2(0^-, t) - v_r^2(0, t)] = c_2\mu_2 v_t^2(0, t).$$

D'où : $\mu_1 c_1[1 - r^2] = \mu_2 c_2 \tau^2 \Rightarrow 1 - r^2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{c_2}{c_1}\tau^2$.

Or $n = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \frac{c_1}{c_2}$, et l'équation précédente devient : $\boxed{1 - r^2 = n\tau^2}$

Relation qui se vérifie aisément en y reportant les résultats (2) :

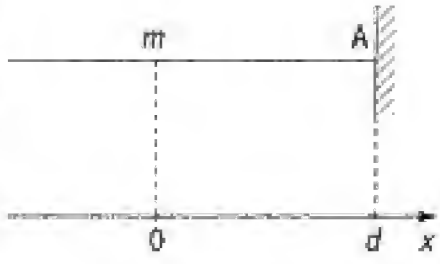
$$\left.\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 &= \frac{(1+n)^2 - (1-n)^2}{(1+n)^2} = \frac{4n}{(1+n)^2} \\ n\tau^2 &= n\left(\frac{2}{1+n}\right)^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{1 - r^2 = n\tau^2}$$

Copyrighted material

102 Absence d'onde réfléchie

Une corde horizontale est fixée en A. Elle est tendue avec une tension T_0 que l'on supposera constante et donc indépendante des petits mouvements que l'on va étudier. Une onde plane progressive harmonique, de pulsation ω, est générée du côté des x négatifs.

La corde a une masse linéique μ et elle est plombée en $x = 0$ à l'aide d'un point matériel de masse m.



On admet de plus que lors de son déplacement transverse la masse m subit une force de frottement fluide $\vec{f} = -\beta \vec{v}(m)$.

On négligera l'action de la pesanteur.

1. En étudiant les ondes qui se propagent le long de la corde préciser les conditions pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie en 0. Ces conditions porteront sur les grandeurs α et kd (où $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$).

2. a. Déterminer l'expression de α à partir d'un bilan d'énergie.

b. Reprendre l'exercice en termes d'impédances : vérifier que l'on peut ainsi retrouver les équations fixant les valeurs de α et kd.

1. Ce qu'il faut savoir

- Ondes transversales sur une corde vibrante.
- Onde progressive – onde stationnaire.
- Impédance.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Se placer dans le cas où il n'y a pas d'onde réfléchie. Remarquer que l'on a une onde progressive pour $x < 0$ et une onde stationnaire pour $x > 0$.

2. a. Écrire qu'en moyenne (temporelle) la puissance arrivant en $x = 0^-$ est entièrement dissipée par la force de frottement, ce qui définit le coefficient α.

b. L'impédance est le rapport de la variable de tension $-\vec{T} \cdot \vec{u}_y$ par la variable d'intensité v. Définir les impédances $Z^- = Z(0^-)$ et $Z^+ = Z(0^+)$.

3. Solution

1. • Supposons qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie. En notation complexe l'onde incidente est de la forme ($x < 0$) :

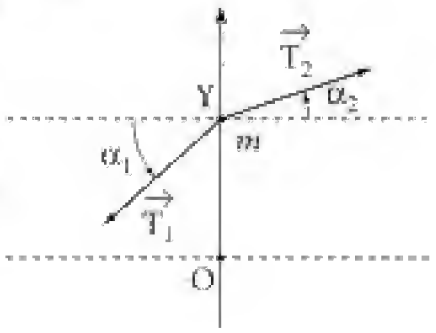
$$y(x, t) = ae^{j(\omega t - kx)} \quad \text{où} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

Copyrighted material

L'espace compris entre $x = 0$ et $x = d$ est nécessairement le siège d'une onde stationnaire, puisqu'en $x = d$ la corde doit être immobile. Ainsi en notant $y'(x, t)$ l'équation de la corde entre ces deux points :

$$y'(x > 0, t) = b\sin k(x - d)e^{j\omega t} \quad (y'(d, t) = 0).$$

• Traduisons maintenant le mouvement de la masse m. Selon l'approximation des petits mouvements elle se déplace sur l'axe Oy.



On a : $m\ddot{Y} = -\beta\dot{Y} + T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1$.

Or $T_1 = T_2 = T_0$ (mouvements selon Ox d'un ordre supérieur).

et $\sin\alpha \sim \alpha \sim \tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

Soit : $m\ddot{Y} + \alpha\dot{Y} = T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{0^+} - T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{0^-}$

avec d'autre part $Y(t) = y(0, t) = y'(0, t)$; il y a continuité des déplacements mais pas des pentes.

D'où, avec en notation complexe $Y = Y_0e^{j\omega t}$:

$$\text{et} \quad \begin{cases} -m\omega^2Y_0 + j\beta\omega Y_0 = T_0kb\cos kd + T_0\mu jk \\ Y_0 = a = -b\sin kd \end{cases}.$$

En éliminant a et b nous obtenons :

$$(-m\omega^2 + j\beta\omega)Y_0 = T_0kY_0(j - \operatorname{cotan}(kd)).$$

Ce qui impose automatiquement :

$$m\omega^2 = T_0k\operatorname{cotan}(kd) \quad \text{et} \quad \beta\omega = T_0k$$

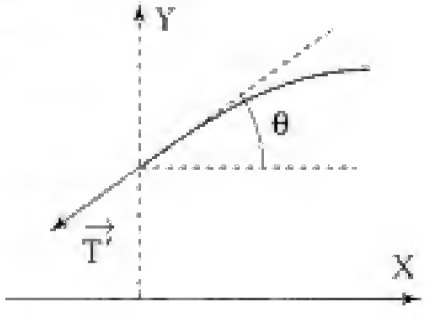
relations que l'on peut réécrire en remarquant que $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

soit : $$\beta = \frac{T_0}{c} \Rightarrow \boxed{\beta = \sqrt{T_0\mu}}$$

$$mc^2k^2 = T_0k\operatorname{cotan}(kd) \Rightarrow \boxed{\operatorname{cotan}(kd) = \frac{m}{\mu d}(kd)}$$

Les valeurs possibles de kd ne dépendent que du paramètre $\dfrac{m}{\mu d}$, c'est-à-dire du rapport de la masse m à celle de la partie de la corde comprise entre 0 et d.

2. a. Le flux d'énergie associé à l'onde incidente est donné par la quantité $\Pi = +T'_y v$, où T'_y est la projection de la tension $\vec{T}$. Or :



$$T'_y = -T_0\sin\theta \approx -T_0\theta = -T_0\frac{\partial y}{\partial x}.$$

D'où : $$\boxed{\Pi = -T_0\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}}$$

Copyright protected material

d'où, avec $y(x < 0, t) = a\cos(\omega t - kx)$ (onde progressive) :

$$\Pi(x < 0, t) = +T_0 a^2 k\omega \sin^2(\omega t - kx).$$

Soit encore en moyenne $\langle \Pi(x, t) \rangle = \frac{1}{2} T_0 a^2 k\omega$.

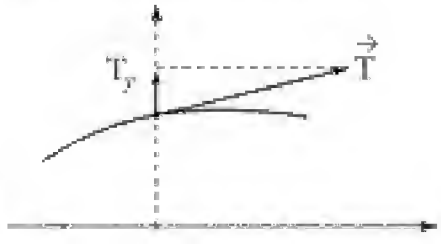
Cette puissance doit être absorbée par les phénomènes dissipatifs, c'est-à-dire par la force de frottement. On doit donc avoir :

$$\frac{1}{2} T_0 a^2 k\omega = \langle \beta v^2 \rangle = \frac{1}{2}\beta a^2 \omega^2.$$

D'où : $$\beta = T_0 \frac{k}{\omega} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{T_0}{c}} \left(k = \frac{\omega}{c}\right)$$

2. b. D'autre part si on note Z^- la valeur $Z(0^-)$ de l'impédance calculée selon :

$$Z = \frac{-T_y}{v} = \frac{-T_0 \dfrac{\partial y}{\partial x}}{\dfrac{\partial y}{\partial t}}.$$



La partie $x < 0$ est le siège d'une onde progressive $y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ d'où :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial \xi} \text{ où } \xi = t - \frac{x}{c} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} Z^- = \frac{T_0}{c} = \sqrt{\mu T_0}.$$

De même pour $x = 0^+$ nous avons, avec $y = b\sin k(x - d)e^{j\omega t}$:

$$Z^+ = Z(0^+) = \frac{-T_0 bk\cos kd}{-b\omega j \sin kd} = \frac{T_0}{jc}\cot an(kd).$$

Enfin l'équation du mouvement de la masse m se traduit par :

$$-m\omega^2 Y = -j\omega\beta Y + T_y(0^+) - T_y(0^-)$$

avec : $$T_y(0^+) = -Z^+ v(0^+) = -Z^+ j\omega Y$$
$$T_y(0^-) = -Z^- v(0^-) = -Z^- j\omega Y.$$

Finalement :

$$(-m\omega^2 + j\omega\beta)Y = j\omega Y(-Z^+ + Z^-).$$

Z^- est purement réelle et Z^+ purement imaginaire, d'où :

$$\left|\begin{aligned} m\omega^2 &= j\omega Z^+ \rightarrow m\omega = \frac{T_0}{c}\cot an(kd) \\ \omega\beta &= \omega Z^- \rightarrow \beta = \frac{T_0}{c} \end{aligned}\right.$$

Copyrighted material

On retrouve bien les mêmes résultats.

On n'aura donc pas d'onde réfléchie si le coefficient de frottement est judicieusement choisi, et si la « cavité » de longueur d est convenablement accordée pour une pulsation ω donnée.

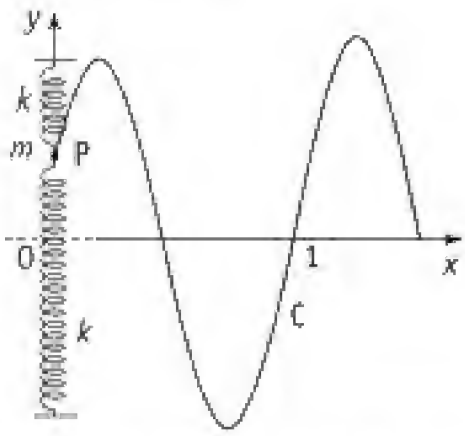
103 Amortissement par « rayonnement »

Le système est contenu dans un plan horizontal. Les actions des deux ressorts (k, l_0) se compensent exactement quand le point matériel P (masse m) se trouve en O.

La corde est tendue (tension T_0).

Sa masse linéique est μ.

On note $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.



1. Faire une analyse qualitative de l'évolution d'un tel système.

2. a. Rappeler l'équation différentielle vérifiée par le déplacement $y(x, t)$ de la corde. Donner la forme de la solution en $y(x, t)$. En déduire que la corde exerce sur la masse m une force dont la composante selon OY est $F_y = -\dfrac{T_0}{c}\dfrac{dY}{dt}$, $Y(t)$ repérant la position de m.

b. Déterminer les expressions de $Y(t)$ et $y(x, t)$ en supposant qu'à $t = 0$ la corde est au repos confondue avec l'axe Ox, la masse m située en O possédant une vitesse $v_0 \vec{u}_y$.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ et $\lambda = \dfrac{T_0}{2mc\omega_0}$.

On suppose que $\lambda < 1$.

3. Proposer un bilan énergétique.

Solution

1. Analyse qualitative

Le mouvement de la masse m sur l'axe OY va mettre la corde en mouvement. De l'énergie va être transférée du système {masse + ressorts} vers la corde, ce qui va provoquer un amortissement du mouvement du point matériel m.

Une onde transversale va se propager le long de l'axe Ox. Les points de la corde affectés étant ceux pour lesquels le signal aura eu le temps de se propager, c'est-à-dire ceux associés à des abscisses x telles que :

$$0 \leqslant x \leqslant ct \quad \text{(à l'instant } t\text{)}.$$

Copyrighted material

On peut donc s'attendre :

– pour la masse m, à un mouvement d'oscillations pseudo-périodiques (si le transfert d'énergie n'est pas très important). Soit ω sa pulsation.

– à une onde se propageant le long de la corde avec une amplitude qui s'amortit à l'émission (c'est-à-dire en $x = 0$).

On peut donc prévoir, dans les conditions retenues ci-dessus, une élongation $y(x, t)$ telle que :

$$\begin{cases} y(x,t) = y_0 e^{-\eta\left(t-\frac{x}{c}\right)} \cdot \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] & \text{pour } x < ct \\ y(x,t) = 0 & \text{pour } x > ct \end{cases}.$$

2. a. Notons T_0 la tension de la corde. Pour des élongations faibles on peut supposer que le mouvement d'un brin de corde s'effectue selon $\vec{u}_y$, et que le mouvement selon Ox est négligeable.

Ce qui implique : $T\cos\alpha = \text{cste}$.

Et donc (étude des petits mouvements : $\cos\alpha \approx 1$) : $T = \text{cste} = T_0$.

À l'approximation considérée la tension de la corde est une constante.

L'équation de propagation de d'Alembert s'écrit alors (*cf. cours*) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

Le mouvement de la masse m entraine celui de la corde ce qui provoque une onde plane selon Ox :

$$y(x,t) = f\left(t-\frac{x}{c}\right) \quad (1)$$

Si $Y(t)$ désigne le mouvement de la masse m nous avons nécessairement :

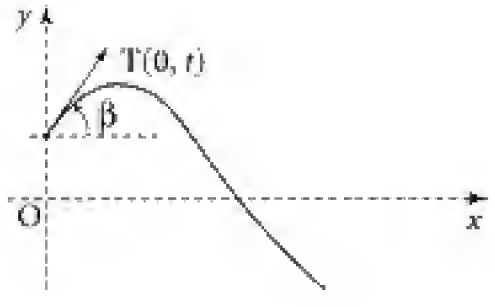
$$Y(t) = y(0,t) = f(t) \quad (2)$$

La composante selon OY de la force qu'exerce la corde sur la masse m est alors :

$$F_y = T_0 \sin\beta \# T_0\beta$$

où $$\beta = \alpha(0,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0,t).$$

Or $$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = -\frac{1}{c}\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{dY}{dt}.$$



Et la force F_y s'écrit :

$$\boxed{F_y = -\frac{T_0}{c}\frac{dY}{dt}}$$

Copyrighted material

Commentaire

Pour la masse m il s'agit d'une force du type « force de frottement fluide ». C'est cette force qui est responsable de l'amortissement du mouvement de m.

2. b. L'équation du mouvement de m devient :

$$m\ddot{Y} = -2kY - \frac{T_0}{c}\dot{Y}$$

ou encore

$$\ddot{Y} + \frac{T_0}{mc}\dot{Y} + \frac{2k}{m}Y = 0$$

(quand $Y = 0$ la force résultante exercée par les ressorts doit être nulle).

Posons $\frac{T_0}{mc} = 2\lambda\omega_0$ où $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$:

$$\ddot{Y} + 2\lambda\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0.$$

Déterminons la solution à cette équation dans l'hypothèse $\lambda < 1$ (amortissement suffisamment faible).

On a $$\Delta = \lambda^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = (\lambda^2 - 1)\omega_0^2 < 0.$$

D'où : $$Y(t) = e^{-\lambda\omega_0 t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) \text{ avec } \omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}.$$

On a bien dans ce cas ($\lambda < 1$) un régime d'oscillations pseudo-périodiques.

Le mouvement de la corde s'en déduit par l'intermédiaire des équations (1) et (2). Nous avons donc (pour $x < ct$) :

$$y(x,t) = e^{-\lambda\omega_0\left(t-\frac{x}{c}\right)} \cdot \left\{A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] + B\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\right\}.$$

Application au cas particulier proposé dans le texte :

– à $t = 0$ $\quad Y(0) = 0$ et $y(x, 0) = 0$.

Ce qui impose $B = 0$.

– à $t = 0$ $\quad \dot{Y}(0) = v_0$, (et $\dot{y}(x, 0) = 0$ pour $x > 0$).

On a donc $A\omega = v_0$, et la solution s'écrit dans ce cas :

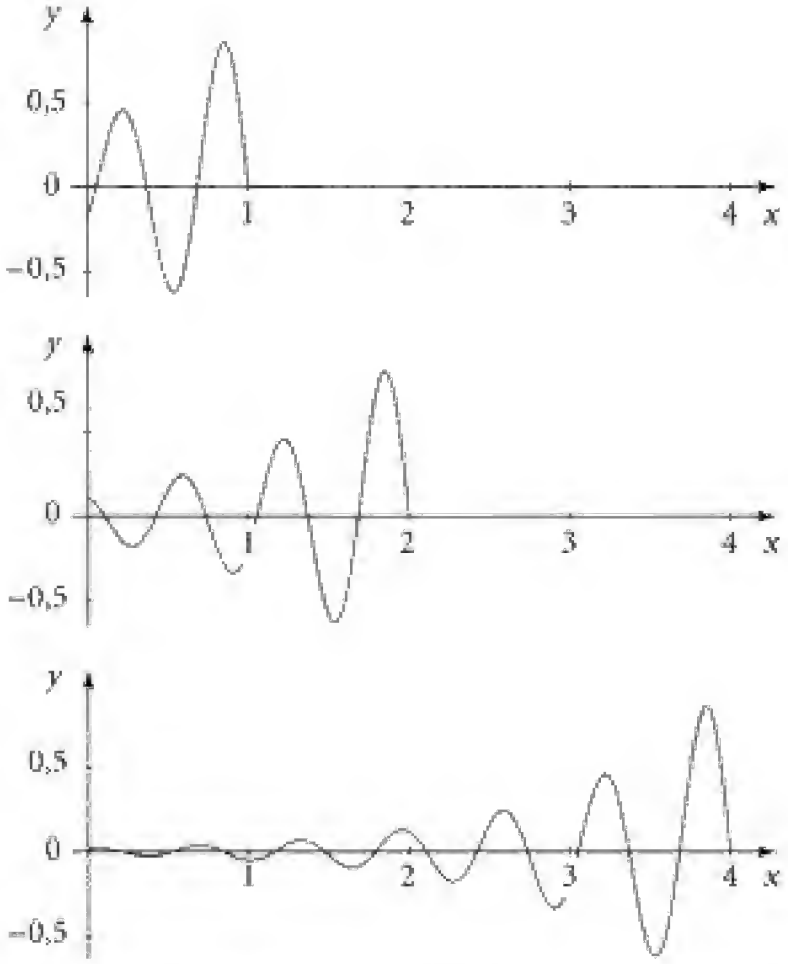
$$Y(t) = \frac{v_0}{\omega}e^{-\lambda\omega_0 t}\sin\omega t$$

$$y(x,t) = \frac{v_0}{\omega}e^{-\lambda\omega_0\left(t-\frac{x}{c}\right)} \cdot \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] \text{ pour } x < ct$$

$$y(x,t) = 0 \text{ pour } x > ct$$

Donnons quelques courbes représentant le mouvement de la corde à différents instants.

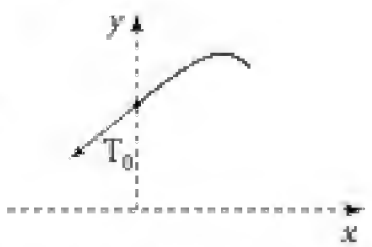
Copyrighted material



3. ■ On peut vérifier que la puissance transférée à la corde correspond bien à une diminution de l'énergie mécanique du système masse-ressorts. À savoir :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathrm{Y}}^2 + 2\times\frac{1}{2}k\mathrm{Y}^2\right) = -\mathrm{T}_0\beta\dot{\mathrm{Y}} \quad \left(\beta = \frac{\partial y}{\partial x}(0,t)\right).$$

Le membre de gauche s'identifie à $\frac{\mathrm{dE_m}}{\mathrm{d}t}$ (masse-ressorts). Celui de droite représente la puissance $\Pi(0, t)$ transférée en $x = 0$ à la corde. En effet on a :



$$\Pi(0,t) = \mathrm{T}_y(0,t)v(0,t) = -\mathrm{T}_0\frac{\partial y}{\partial x}(0,t)\cdot v(0,t).$$

■ Une autre façon de traduire le bilan énergétique serait d'écrire que l'énergie totale du système se conserve.

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\mathrm{Y}}^2}_{(1)} + \underbrace{k\mathrm{Y}^2}_{(2)} + \underbrace{\mathrm{E_c(corde)}}_{(3)} + \underbrace{\mathrm{E_p(corde)}}_{(4)} = \mathrm{E_0}.$$

(1) : énergie cinétique de la masse m.

(2) : énergie potentielle élastique des deux ressorts.

$$(3) : \mathrm{E_c(corde)} = \int_0^a \frac{1}{2}\mu\left[\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right]^2 \mathrm{d}x$$

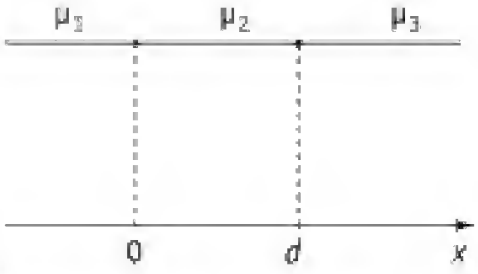
Copyrighted material

(4) : $E_p(\text{corde}) = \int_0^{ct} \frac{1}{2} T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x, t)\right]^2 dx$ (énergie « potentielle » élastique liée à la déformation de la corde).

104 Trois cordes

Une corde vibrante est tendue avec une tension T_0. Elle est constituée de trois parties :

- $x < 0$ → masse linéique μ_1
- $0 \leqslant x \leqslant d$ → masse linéique μ_2
- $x > d$ → masse linéique μ_3



On note $Z_1 = \mu_1 c_1$, $Z_2 = \mu_2 c_2$ et $Z_3 = \mu_3 c_3$ les impédances caractéristiques de chaque domaine (c représente la célérité des ondes transverses pouvant s'y propager).

Une onde plane progressive transverse harmonique (pulsation ω) est créée du côté des $x < 0$. On appelle r le coefficient de réflexion en amplitude, et R en énergie.

On posera : $\alpha = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ et $\beta = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}$.

1. Exprimer, dans le cas général, le coefficient complexe r en fonction de α, β et $\phi = k_2 d$ (où $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$). En déduire l'expression de R.

2. Établir les conditions pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie dans le cas où $Z_1 \neq Z_3$. Commenter.

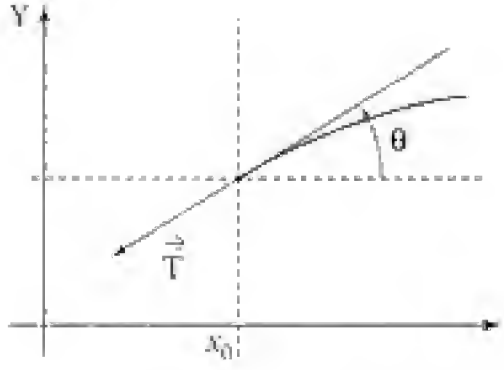
3. On fait maintenant $Z_1 = Z_3$. Déterminer le coefficient T de transmission en énergie. On exprimera T en fonction de ϕ et de $F = \left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}\right)^2$. Tracer les courbes $\phi \to T(\phi)$ pour différentes valeurs de α. Commenter.

Solution

1. On définira l'impédance, au point x_0, selon :

$$Z(x_0) = \frac{F_y}{v}$$

où F_y est la composante, selon y, de la force (tension) exercée par la partie $x < x_0$ sur la partie $x > x_0$.



Copyrighted material

Or : $F_y = -T_0 \sin\theta(x_0, t) \approx -T_0\theta(x_0, t) \approx -T_0 \dfrac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)$.

Et $v = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x_0, t)$

d'où $$\boxed{Z(x_0) = -T_0 \dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)}{\dfrac{\partial y}{\partial t}(x_0, t)}}$$

Pour une corde infinie, de masse linéique μ, parcourue par une onde progressive telle que $y = f(x - ct)$, où $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$, on aurait :

$\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{df}{du} \cdot 1$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{df}{du} \cdot (-c)$ avec $u = x - ct$.

Dès lors : $Z = \dfrac{T_0}{c} \rightarrow \boxed{Z = \mu c}$ comme il se doit.

Sur le brin $x < 0$ on aura, dans le cas général, une onde progressive et une onde régressive, soit :

$$y(x, t) = ae^{j(\omega t - k_1 x)} + are^{j(\omega t + k_1 x)} \quad \text{où } k_1 = \frac{\omega}{c_1}$$

r représente le coefficient de réflexion, en amplitude, relatif à l'élongation.

Commentaire

r tient compte de la réflexion de l'onde incidente en $x = 0$ et des réflexions multiples en $x = 0^+$ et $x = d^-$ qui donnent finalement naissance à de multiples ondes régressives dans le domaine $x < 0$.

• Dès lors calculons l'impédance en $x = 0^-$, notée Z^- :

$$Z^+ = -T_0 \frac{-jk_1(1 - r)}{j\omega(1 + r)} \rightarrow Z^- = T_0 \frac{k_1}{\omega} \frac{1 - r}{1 + r}.$$

D'où $$Z^- = \frac{T_0}{c_1} \frac{1 - r}{1 + r} \Rightarrow \boxed{Z^- = Z_1 \frac{1 - r}{1 + r}}$$

• Quant au domaine $x > d$ il n'est le siège que d'une seule onde progressive, ce qui implique :

$$\boxed{Z(d^+) = Z_3}$$

Copyrighted material

Commentaire

Pour $x > d$ l'élongation peut s'écrire $y(x, t) = a\tau \exp j(\omega t - k_3(x-d))$

On a donc avec $F_y = -T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}$ et $v = \dfrac{\partial y}{\partial t}$:

$$Z(x > d) = \frac{-T_0 a\tau \cdot (-k_3)\exp j(\omega t - k_3(x-d))}{a\tau\omega\exp j(\omega t - k_3(x-d))} = \frac{T_0 k_3}{\omega}.$$

Or $k_3 = \dfrac{\omega}{c_3}$ (*cf.* équation de d'Alembert), d'où : $Z(x > d) = \dfrac{T_0}{c_3} = \mu_3 c_3 = \sqrt{T_0\mu_3}$.

• Pour l'espace $0 < x < d$ les multiples ondes qui s'y propagent sont réductibles à deux ondes, une progressive et l'autre régressive selon :

$$y(x, t) = Ae^{j(\omega t - k_2 x)} + Be^{j(\omega t + k_2 x)} \quad \text{où} \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}.$$

On a alors : $$Z(x) = -T_0\frac{-jk_2(Ae^{-jk_2x} - Be^{jk_2x})}{j\omega(Ae^{-jk_2x} + Be^{jk_2x})}.$$

Soit avec $$Z_2 = \frac{T_0 k_2}{\omega} : \quad Z(x) = Z_2\frac{Ae^{-jk_2x} - Be^{jk_2x}}{Ae^{-jk_2x} + Be^{jk_2x}}.$$

• Il reste à écrire les conditions de continuité en $x = 0$ puis en $x = d$. Elles se traduisent par l'égalité des impédances puisque :

– il y a continuité des élongations et donc des vitesses ;

– il y a continuité des pentes (les « points » $x = 0$ et $x = d$ étant sans masse, il vient $T_y(0^+) = T_y(0^-)$ et $T_y(d^+) = T_y(d^-)$)

d'où : $Z^- = Z(0^+)$ et $Z_3 = Z(d^-)$

ce qui donne :
$$\begin{cases} Z_2\dfrac{1-r}{1+r} = Z_2\dfrac{A-B}{A+B} & (1) \\ Z_3 = Z_2\dfrac{Ae^{-jk_2d} - Be^{jk_2d}}{Ae^{-jk_2d} + Be^{jk_2d}} & (2) \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire deux expressions de A et B :

À partir de (2) nous obtenons : $\dfrac{A}{B}e^{-2jk_2d} = \dfrac{Z_2 + Z_3}{Z_2 - Z_3}$, d'où $\dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{\beta}\exp(2jk_2d)$.

(1) fournit : $(1-r)Z_1(A+B) = (1+r)Z_2(A-B)$.

Soit : $$r = \frac{Z_1(A+B) - Z_2(A-B)}{Z_2(A-B) + Z_1(A+B)} = \frac{\dfrac{A}{B}(Z_1 - Z_2) + Z_1 + Z_2}{\dfrac{A}{B}(Z_1 + Z_2) + Z_1 - Z_2}$$

et avec $\alpha = \dfrac{Z_2 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ il vient : $r = \dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}\exp(2jk_2d) + 1}{\dfrac{1}{\beta}\exp(2jk_2d) + \alpha} \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{\alpha\exp(2jk_2d) + \beta}{\exp(2jk_2d) + \alpha\beta}}$ (3)

Copyrighted material

Le coefficient de réflexion énergétique R est relié classiquement à r selon $R = |r|^2$.

Commentaires

Considérons deux ondes progressives dans le domaine $x < 0$:

$$y = a_1\cos(\omega t - k_1 x) + r_0 a_1\cos(\omega t + k_1 x + \varphi_0).$$

Dès lors : $v = -a_1\omega[\sin(\omega t - k_1 x) + r_0\sin(\omega t + k_1 x + \varphi_0)]$

$$\mathcal{P}_y = (-T_0)(a_1 k_1)[\sin(\omega t - k_1 x) - r_0\sin(\omega t + k_1 x + \varphi_0)].$$

Le flux d'énergie est associé à la grandeur $\Pi = \mathcal{P}_y v$ (force × vitesse), d'où :

$$\Pi(x < 0, t) = T_0\omega k_1 a_1^2\sin^2(\omega t - k_1 x) - T_0\omega k_1 a_1^2 r_0^2\sin^2(\omega t + k_1 x + \varphi_0).$$

On a donc $\Pi(x < 0, t) = \Pi_i(x, t) + \Pi_r(x, t)$ (Π_i associé à l'onde incidente et défini positif : l'onde incidente véhicule à elle seule une puissance dans le sens des $x > 0$; $\Pi_r < 0$ correspond à l'onde réfléchie : puissance transportée dans le sens des $x < 0$.)

On peut alors définir le coefficient de réflexion – en énergie – en $x = 0$ par :

$$R = \frac{\langle \Pi_r(0^-, t)\rangle}{\langle \Pi_i(0^-, t)\rangle} \rightarrow R = r_0^2.$$

Or en écriture complexe le coefficient de réflexion, relatif à l'élongation est : $r = r_0\exp(j\varphi_0)$.

On a bien : $R = |r|^2$,

et d'après (3) : $$R = \frac{\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos 2k_2 d}{1 + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta\cos 2k_2 d}.$$

D'où la relation cherchée en posant $\phi = k_2 d$:

$$\boxed{R = \frac{\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos 2\phi}{1 + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta\cos 2\phi}} \quad (4)$$

2. Pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie, il faut $r = 0$ soit encore $R = 0$, c'est-à-dire :

$$(\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta) + 2\alpha\beta(1 + \cos 2k_2 d) = 0.$$

Soit : $(\beta - \alpha)^2 + 4\alpha\beta\cos^2 k_2 d = 0$.

Cette équation est notamment vérifiée pour $\alpha = \beta$ et $\cos k_2 d = 0$ $((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$.

Or $\alpha = \beta \rightarrow \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \dfrac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}$

d'où $(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) \rightarrow \boxed{Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}}$

$$\cos k_2 d = 0 \rightarrow k_2 d = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow \boxed{d = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_2}{2}}$$

Copyrighted material

Commentaire

• On retrouve ici une situation tout à fait *analogue* à celle rencontrée pour la couche antireflet en électromagnétisme.

• La deuxième condition traduit simplement que l'onde 1 se réfléchissant en O et l'onde secondaire se réfléchissant en d se retrouvent, en $x = 0^-$, en opposition de phase.

En effet sachant que α et β sont de même signe (puisque $\alpha = \beta$) il faut alors que :

$$\Delta\varphi = 2k_2 d = (2p+1)\pi \rightarrow k_1 d = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi \ldots$$

• On aurait également pu écrire la condition sous la forme :

$$(\beta+\alpha)^2 + 2\alpha\beta(\cos 2\phi - 1) = 0 = (\beta+\alpha)^2 - 4\alpha\beta\sin^2 k_2 d$$

équation qui est vérifiée dès que $\beta = -\alpha$ et $\sin k_2 d = 0$. Mais $\beta = -\alpha$ se réduit, à $Z_1 = Z_3$ relation qui ne correspond pas au cas étudié ici.

• On aurait pu également reprendre les résultats partiels précédents :

$$r = 0 \rightarrow Z_1 = Z_2\frac{A-B}{A+B} \rightarrow \frac{A}{B} = -\frac{1}{\alpha}$$

et avec $\frac{A}{B} = \frac{1}{\beta}e^{2j\phi} \rightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = e^{2j\phi}$

ce qui permet de retrouver les résultats établis plus haut :

– soit $\frac{\beta}{\alpha} = -1$ et $\phi = p\pi$ (solution à rejeter)

– soit $\frac{\beta}{\alpha} = +1$ et $\phi = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi$ (solution à retenir).

3. On suppose maintenant que les milieux extrêmes sont identiques ($Z_1 = Z_3$). On a donc $\beta = -\alpha$.

Dès lors d'après (4) : $R = \dfrac{\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2\cos 2\phi}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2\cos 2\phi} = \dfrac{2\alpha^2(1-\cos 2\phi)}{1+\alpha^4 - 2\alpha^2\cos 2\phi}$.

L'énergie emmagasinée en moyenne sur le brin $0 < x < d$ est constante. On a donc si T désigne le coefficient de transmission en énergie : $R + T = 1$.

Soit $T = \dfrac{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2\cos 2\phi - 2\alpha^2(1-\cos 2\phi)}{1+\alpha^4 - 2\alpha^2\cos 2\phi} = \dfrac{1 - 2\alpha^2 + \alpha^4}{(1-\alpha^2)^2 + 2\alpha^2(1-\cos 2\phi)}$.

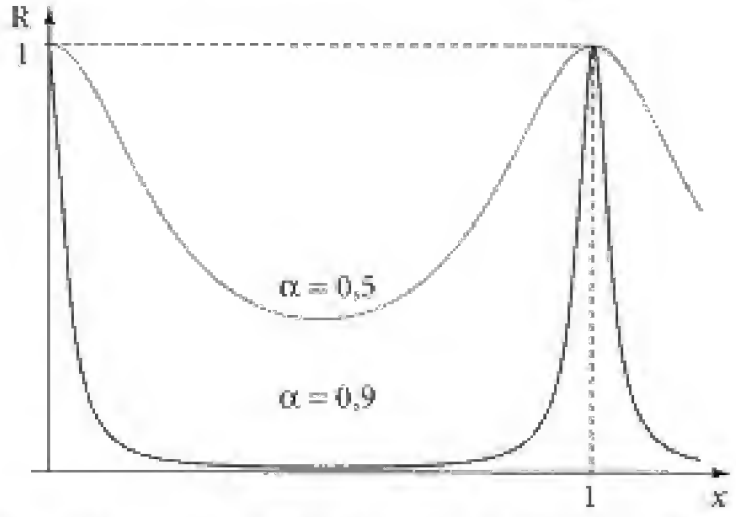
Finalement : $\boxed{T = \dfrac{1}{1 + F\sin^2\phi}}$ où $F = \left(\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right)^2$.

T est une fonction π- périodique par rapport à la variable $\phi = k_2 d = 2\pi\dfrac{d}{\lambda_2}$.

Elle prend sa valeur minimale pour $\phi = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ $\left(T_{min} = \dfrac{1}{1+F} = \left(\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2\right)$ et sa valeur maximale ($T_{max} = 1$) pour $\phi = 0[\pi]$.

Copyrighted material

D'où la courbe donnant T en fonction de la variable $x = \frac{\phi}{\pi}$:



La transmission sera d'autant plus sélective, pour les valeurs $\phi = p\pi$ que $|\alpha| = |\beta|$ (avec ici $\alpha = -\beta$) est proche de l'unité.

C'est ainsi en quelque sorte l'analogue du Pérot-Fabry…

Pour $\alpha = 0$ (c'est-à-dire ici $Z_1 = Z_2 = Z_3$) on a bien entendu $T = 1$ quel que soit ϕ (le système se réduit à une corde unique).

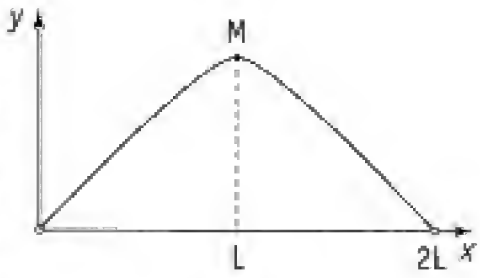
D'autre part, pour $\alpha \neq 0$ les valeurs de ϕ associées à T_{max} (= 1) correspondent bien à $R = 0$ (cas $\alpha = -\beta$: *cf.* commentaire question 2.).

105 Corde plombée

Une corde de longueur 2L et de masse linéique μ_0 a ses deux extrémités fixées sur un axe Ox.

Une masse ponctuelle M solidaire de la corde a été placée à égales distances de ses extrémités.

On ne tiendra pas compte de la pesanteur et on se limitera aux petits mouvements selon un axe Oy perpendiculaire à Ox. La corde est tendue avec une tension T_0.



On note $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$, et $m = 2\mu_0 L$ (masse totale de la corde).

1. Soit $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$ les élongations de la corde respectivement pour $0 \leqslant x \leqslant L$ et pour $L \leqslant x \leqslant 2L$. $Y(t)$ repère le mouvement de la masse M. Déterminer les modes de vibrations sinusoïdales (modes propres) de ce système.

2. Étudier les cas particuliers :

- $M \to 0$ [$M \ll m$].

Copyrighted material

- $M \to \infty$ $[M \gg m]$.
- M fini non nul et $\mu_0 \to 0$: retrouver simplement le résultat obtenu.

Solution

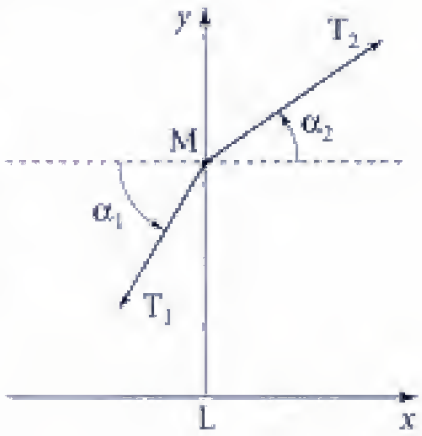
1. Notons $y(x, t) = \psi_1(x, t)$ le déplacement de la corde pour $0 < x < L$ et $y(x, t) = \psi_2(x, t)$ pour $L < x < 2L$, le mouvement de la masse M étant repéré par $Y(t)$.

■ La continuité du déplacement implique :

$$\psi_1(L, t) = Y(t) = \psi_2(L, t) \quad (1)$$

■ Appliquons le théorème de la quantité de mouvement à la masse M. En projection sur $\vec{u}_y$ il vient :

$$M\ddot{Y} = T_2\alpha_2 - T_1\alpha_1 \quad (2)$$



Les angles restent petits, et on peut confondre $\sin\alpha$ avec α.

D'autre part les mouvements selon Ox sont négligeables devant ceux selon Oy. Il en résulte que :

$$T_1 \sim T_2 \sim T_0$$

$$(T_2\cos\alpha_2 \sim T_2 \text{ et } T_1\cos\alpha_1 \sim T_1).$$

L'équation (2) s'écrit alors :

$$M\ddot{Y} = T_0(\alpha_2 - \alpha_1) \text{ avec } \alpha_2 \# \frac{\partial\psi_2}{\partial x}(L, t) \text{ et } \alpha_1 \# \frac{\partial\psi_1}{\partial x}(L, t).$$

Finalement : $$\boxed{M\ddot{Y} = T_0\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}(L, t)\right]} \quad (3)$$

■ D'autre part les déformations de la corde obéissent à l'équation de d'Alembert avec une célérité $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu_0}}$ (*cf.* cours). On a donc :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} \text{ et } \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}. \quad (4)$$

On cherche alors des solutions vérifiant (1), (3) et (4) et les conditions aux limites :

$$\psi_1(0, t) = 0 \text{ et } \psi_2(2L, t) = 0 \quad (4')$$

Envisageons des ondes stationnaires pour $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$

$$\begin{cases} \psi_1(x, t) = A_1\sin(kx)\cdot e^{j\omega t} \\ \psi_2(x, t) = A_2\sin|k(2L - x)|\cdot e^{j\omega t} \end{cases}$$

Ces expressions sont en accord avec (4'). Elles vérifient (4) pour $k = \dfrac{\omega}{c}$. Il reste à vérifier la compatibilité avec (1) et (3) :

– (1) entraîne : $A_1\sin kL = A_2\sin kL \Rightarrow$ $\boxed{(A_1 - A_2)\sin kL = 0}$ (5)

Copyrighted material

– (3) donne : $M\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}(L, t) = T_0\left[\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}(L, t) - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}(L, t)\right]$

Soit : $\boxed{M\omega^2 A_1 \sin kL = T_0 k \cos kL(A_1 + A_2)}$ (6)

Discussion :

■ 1er cas $\sin kL = 0$ (c'est-à-dire $kL = n\pi$) soit encore $\psi_1(L, t) = \psi_2(L, t) = 0$.

Il s'agit là d'un mode propre habituel d'une corde de longueur 2L présentant un nœud en $x = 0$, $x = 2L$ mais aussi en $x = L$.

On a bien dans ce cas :

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \text{ ou encore } 2L = (2n)\frac{\lambda_n}{2}.$$

Et puisque $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda} \rightarrow kL = \dfrac{2\pi}{\lambda_n}\dfrac{\lambda_n}{2}n \Rightarrow kL = n\pi$.

Commentaire

Dans ce cas l'équation (6) donne $A_2 = -A_1$.

D'où : $\psi_1 = A_1 \sin\left(\dfrac{\omega x}{c}\right) \cdot e^{j\omega t}$ et : $\psi_2 = -A_1 \sin\left[\dfrac{\omega x}{c}(2L - x)\right]\exp(j\omega t)$

avec $kL = n\pi$ et $k = \dfrac{\omega}{c}$, soit $\dfrac{\omega L}{c} = n\pi \rightarrow \psi_2 = -A_1 \sin\left[2n\pi - \dfrac{\omega x}{c}\right]$.

Finalement $\psi_2(x) = A_1 \sin\left(\dfrac{\omega x}{c}\right) \cdot \exp(j\omega t)$.

Et $\psi_2(x, t)$ apparaît comme le prolongement de $\psi_1(x, t)$: ψ_1 et ψ_2 sont les restrictions aux intervalles (0, L) et (L, 2L) des modes propres $y_p(x, t)$ d'une corde de longueur 2L, présentant un nœud à ses extrémités et en son milieu ($2L = p\dfrac{\lambda}{2}$ avec p pair).

■ 2e cas $\sin kL \neq 0$:

L'équation (5) n'est alors satisfaite que pour $A_1 = A_2$, et l'équation (6) se traduit par :

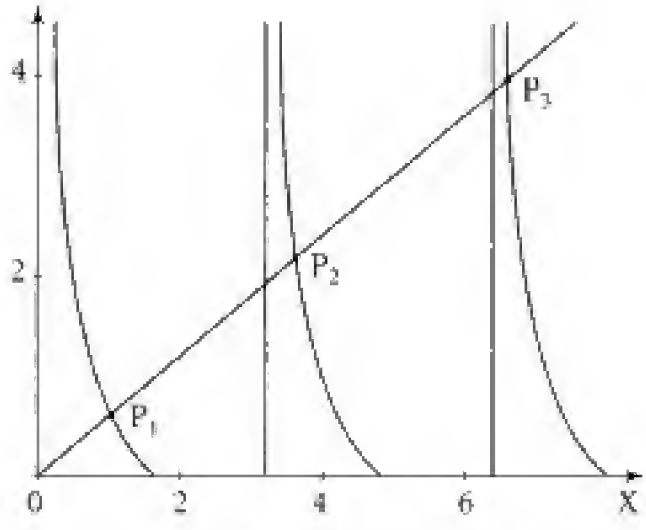
$M\omega^2 \sin kL = 2T_0 k \cos kL$ où $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu_0}}$.

$$\frac{\omega L}{c}\tan\frac{\omega L}{c} = \frac{2\mu_0 L}{M} = \frac{\text{masse de la corde}}{M} = \frac{m}{M}.$$

Soit encore : $\text{cotan}\left(\dfrac{\omega L}{c}\right) = \dfrac{M}{m} \cdot \left(\dfrac{\omega L}{c}\right)$.

Posons $X = \dfrac{\omega L}{c}$, X est solution de l'équation $\text{cotan}X = \dfrac{M}{m}X$:

Copyrighted material



Les modes propres correspondants sont représentés sur le graphe ci-dessus par les points $\{P_1, P_3, P_5 \ldots\}$.

■ **Cas où $M \to 0$ ($M \ll m$) :**

À la limite on doit retrouver les fréquences propres d'une corde de longueur 2L ce qui est bien le cas puisque l'on a déjà mis en évidence les modes « pairs » pour lesquels $2L = (2n)\frac{\lambda}{2}$ (ils correspondent à $\sin kL = 0$ et ne dépendent pas en fait de la valeur de M) quand aux modes P_i (*cf.* graphe ci-dessus avec $\frac{M}{m} \to 0$) ils tendent vers :

$$X_{2n+1} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{\omega_{2n+1}L}{c} \to (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

d'où $\frac{2\pi}{\lambda_{2n+1}}L = (2n+1)\frac{\pi}{2} \to 2L = (2n+1)\frac{\lambda_{2n+1}}{2}$.

Au total tous les modes se regroupent dans une même formule :

$$\boxed{2L = p\frac{\lambda_p}{2}} \text{ pour } \frac{M}{m} \to 0.$$

Ce qui est bien le résultat attendu.

■ **Cas où $M \to \infty$ ($M \gg m$) :**

Cette fois-ci $X(P_i) \to i\pi$ et on retrouve les modes pairs le point $x = L$ devant rester fixe à la limite.

■ Cas où M fini et μ_0 tend vers zéro à T_0 fixé :

Il en résulte dans ce cas que $c \to \infty$, et seul le mode P_1 est à retenir ($\omega(P_3) \to \infty \ldots$).

D'autre part la pente de la droite $X \to \frac{M}{m}X$ devenant très grande, X_1 est très petit. On peut donc envisager l'approximation suivante :

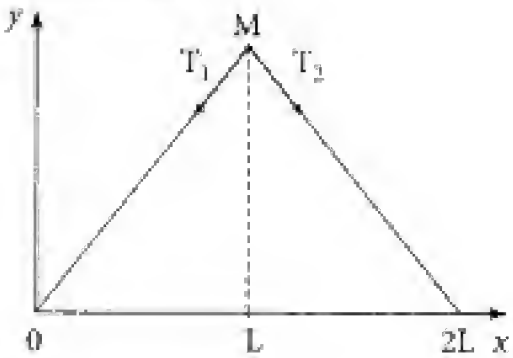
$$\operatorname{cotan} X_1 \sim \frac{1}{X_1} \to X_1 \frac{M}{m} \sim 1 \to \frac{\omega_1^2 L^2}{c^2}\frac{M}{m} \sim 1$$

Copyrighted material

et avec $c^2 = \dfrac{T_0}{\mu_0}$ et $m = \mu_0 2L$

$$\omega_1^2 \sim \frac{T_0}{\mu_0}\frac{m}{ML^2} \Rightarrow \boxed{\omega_1 \sim \sqrt{\frac{2T_0}{ML}}}$$

■ Il est possible de retrouver ce résultat en considérant, toujours à la même approximation, que la corde est assimilable à deux segments de droite. En effet :



$$\frac{\omega_1 L}{c} \ll 1 \rightarrow L \ll \lambda_1 .$$

Dès lors on a (avec $T_1 = T_2 = T_0$) :

$$M\ddot{Y} = +T_{2y} + T_{1y}.$$

Or $T_{2y} = -T_0\dfrac{Y}{L} = T_{1y}$.

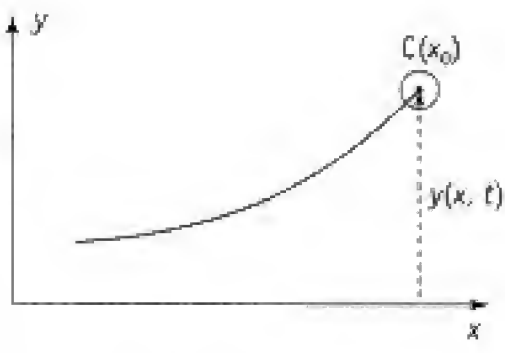
D'où $M\ddot{Y} = -\dfrac{2T_0}{L}Y \rightarrow \ddot{Y} + \dfrac{2T_0}{ML}Y = 0.$

Le mouvement de M s'effectue bien à la pulsation $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2T_0}{M}}$.

106 Corde avec raideur

On désire étudier la propagation d'ondes transversales sur une corde tendue (tension T_0) de masse linéique μ_0.

La corde n'est pas infiniment souple, et les effets de raideur sont caractérisés par un couple $C(x_0)$ exercé en tout point d'abscisse x_0 par la partie de la corde $x > x_0$ sur la partie $x < x_0$. Ce couple est donné par l'expression :



$$C(x_0) = JE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_0).$$

E est le module d'Young et J un coefficient dépendant de la géométrie. *On se place dans le cadre des petites déformations*, hypothèse que l'on adoptera par la suite.

On négligera les effets de la pesanteur.

Copyrighted material

1. Justifier que ce couple doit également s'accompagner d'une force $N(x_0)$ « perpendiculaire » à la corde. Montrer que $N(x_0) = -\dfrac{\partial C}{\partial x}(x_0)$.

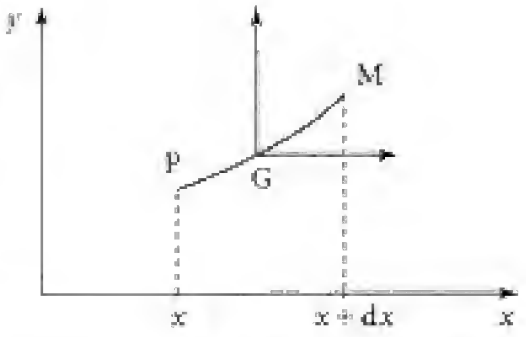
2. Établir l'équation de propagation vérifiée par $y(x, t)$. On posera $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu_0}}$ et $m = \dfrac{JE}{T_0}$.

3. a. En supposant que les effets dus à la raideur constituent une faible perturbation déterminer, au premier ordre en m, la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

b. Que dire des pulsations des modes propres pour une courbe de longueur L fixée à ses deux extrémités. Commenter.

Solution

1. Considérons un élément de corde PM. Appliquons-lui le théorème du moment cinétique barycentrique. On aurait en ne tenant compte que des couples s'exerçant à chaque extrémité (les effets dus à la tension $T_0\vec{u}$ sont d'ordre deux par rapport à dx) :



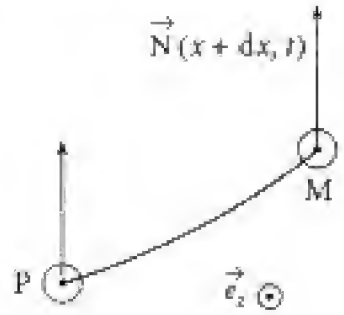
$$\frac{d\sigma}{dx} = C(x + dx, t) - C(x, t) = \frac{\partial C}{\partial x}dx \quad (1)$$

Or le moment cinétique scalaire σ est d'ordre supérieur à 1 en dx et donc négligeable.

L'équation (1) donnerait alors $\dfrac{\partial C}{\partial x} = 0$, ce qui est impossible (la courbure en M n'est pas égale à celle en P...).

Introduisons une force supplémentaire :

$$\vec{N}(x, t) \neq N(x, t)\vec{u}_y.$$



Reprenons le bout de corde PM. Il s'exerce :

– En M le couple $C(x + dx, t)\vec{u}_z$ et la force $N(x + dx, t)\vec{u}_y$.

– En P le couple $[-C(x, t)]\vec{u}_z$ et la force $[-N(x, t)]\vec{u}_y$.

Le théorème du moment cinétique scalaire s'écrit alors :

$$0 \equiv C(x + dx, t) - C(x, t) + N(x + dx, t)\frac{dx}{2} + N(x, t)\frac{dx}{2}.$$

Soit encore :

$$0 = \frac{\partial C}{\partial x}dx + N(x, t)\,dx \quad (\text{au } 1^{er} \text{ ordre en } dx).$$

Finalement nous obtenons :

$$\boxed{N(x, t) = -\frac{\partial C}{\partial x}} \quad (2)$$

Copyrighted material

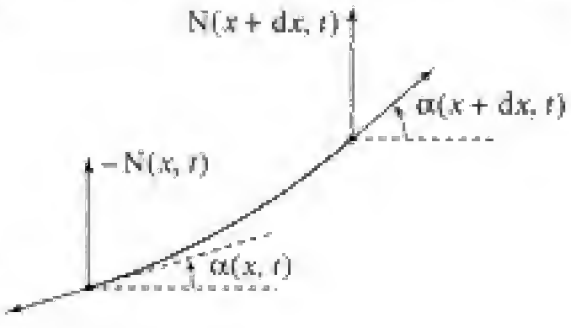
Ce qui se traduit ici par : $$N(x, t) = -J E \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Commentaires

• Le couple $C(x_0)$ est directement proportionnel à la dérivée seconde (par rapport à x) de $y(x, t)$ c'est-à-dire, dans le cadre des petites déformations, à la courbure locale de la corde (ou encore à l'inverse du rayon de courbure). Ainsi pour une corde droite ce couple disparaît.

• Physiquement ce couple résulte de la raideur du matériau associée à ce que les fibres les plus extérieures se sont allongées alors que les fibres les plus intérieures se sont contractées.

2. Écrivons l'équation de la quantité de mouvement, en projection sur l'axe Oy :



$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \# N(x + dx, t) - N(x, t) + [T\alpha]_{x+dx} - [T\alpha]_x.$$

On a confondu $\sin\alpha$ et l'angle α (petites déformations).

D'autre part on a, en négligeant les déplacements selon x par rapport à ceux selon y, et au premier ordre :

$$T(x + dx, t) \sim T(x, t) \sim T_0.$$

D'où : $$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \# \frac{\partial N}{\partial x} dx + T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx.$$

Or $\delta m = \mu_0 dx$ et $\alpha \approx \dfrac{\partial y}{\partial x}$, soit après simplification par dx :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Enfin en reportant l'expression de $N(x, t)$ déduite de (2) :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Utilisant la valeur du couple $C(x, t)$ et introduisant les grandeurs $c^2 = \dfrac{T_0}{\mu_0}$ et $m = \dfrac{JE}{T_0}$ il vient :

$$\frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{JE}{T_0} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - m \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}} \quad (3)$$

Commentaire

Pour $m = 0$ (corde sans raideur) on retrouve l'équation classique de d'Alembert associée à une célérité $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu_0}}$. Dans ce cas les vitesses de phase et de groupe s'identifient à c : il n'y a pas dispersion.

Copyrighted material

3. a. Cherchons des solutions à l'équation de propagation (3) sous la forme d'OPPH de pulsation ω. Posons à cet effet, en notation complexe :

$$\underline{y}(x, t) = a\, e^{j(\omega t - kx)}.$$

Dès lors : $\dfrac{\partial^2 \underline{y}}{\partial t^2} = -\omega^2\, \underline{y}(x, t)$; $\dfrac{\partial^2 \underline{y}}{\partial x^2} = -k^2\, \underline{y}(x, t)$; $\dfrac{\partial^4 \underline{y}}{\partial x^4} = k^4\, \underline{y}(x, t)$.

Il vient donc après simplification par $\underline{y}(x, t)$:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} = -k^2 - mk^4 \Rightarrow \boxed{k^2 + mk^4 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (4)$$

À ω fixée cette équation définit $k(\omega)$.

Commentaires

On pourrait rechercher une solution à l'équation de propagation (3) sous la forme d'onde plane progressive. Soit en reprenant la démonstration du cours :

$$y(x, t) = f(\zeta) \quad \text{et} \quad \zeta = x - ut$$

u représente la célérité d'une telle onde. On a alors :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\zeta^2} \cdot (-u)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^p y}{\partial x^p} = \frac{\mathrm{d}^p f}{\mathrm{d}\zeta^p} \cdot 1.$$

L'équation (3) se réécrit alors :

$$\frac{u^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\zeta^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\zeta^2} - m\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}\zeta^4} \quad \text{soit encore} \quad m\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}\zeta^4} + \left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\zeta^2} = 0.$$

Posons $g(\zeta) = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\zeta^2}$, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{1}{m}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right) g = 0.$$

Cette équation admet bien une solution sinusoïdale pour $u > c$:

$$g(\zeta) = g_0 \cos\left[\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right)}(x - ut) + \varphi\right].$$

Il en sera de même pour $f(\zeta)$, soit en posant $k = \sqrt{\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{u^2}{c^2} - 1\right)}$:

$$y(x, t) = f(\zeta) = f_0 \cos[k(x - ut) + \varphi'].$$

On aboutit à une OPPH d'équation de dispersion $ku = \omega$, soit encore :

$$k^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\omega^2}{c^2 k^2} - 1\right) \Rightarrow \boxed{mk^4 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

– À l'ordre zéro ($m = 0$), on obtiendrait bien évidemment $k = \dfrac{\omega}{c}$.

– À l'ordre un ($m \neq 0$), on pourra estimer le terme correctif mk^4 à :

$$mk^4 \sim m\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2.$$

Copyrighted material

D'où $$k^2 \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{m\omega^2}{c^2}\right] \Rightarrow \boxed{k \sim \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{m\omega^2}{2c^2}\right)}$$

Nous obtenons, de cette façon, l'expression de k au premier ordre en m. Cette expression suppose que l'on ait $\frac{m\omega^2}{c^2} \ll 1$.

Commentaire

• La condition $\frac{m\omega^2}{c^2} \ll 1$ se retrouve en écrivant directement que le terme de tension l'emporte sur celui dû à la raideur, c'est-à-dire : $\left|\frac{\partial N}{\partial x}\right| \ll T_0\left|\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|$.

Soit $$JE\left|\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right| \ll T_0\left|\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right| \rightarrow JEk^4 \ll T_0 k^2.$$

D'où : $$\frac{JE}{T_0}k^2 \ll 1 \underset{\text{et } m = \frac{JE}{T_0}}{\overset{\text{avec } k = \frac{\omega}{c}}{\Rightarrow}} \boxed{\frac{m\omega^2}{c^2} \ll 1}$$

• **La vitesse de phase** est définie selon $v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k}$ et **la vitesse de groupe** $v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk}$. On a donc :

$$v_\varphi(\omega) = \frac{c}{1 - \frac{m\omega^2}{2c^2}} \Rightarrow \boxed{v_\varphi(\omega) \neq c\left(1 + \frac{m\omega^2}{2c^2}\right)}$$

et d'après (4) $k\,dk(1 + 2mk^2) = \frac{\omega}{c^2}d\omega \rightarrow v_g(\omega) = c^2\frac{k}{\omega}(1 + 2mk^2)$

soit au 1er ordre par rapport à m $\left(k = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{m\omega^2}{2c^2}\right)\right)$:

$$v_g(\omega) = c\left(1 - \frac{m\omega^2}{2c^2}\right)\left(1 + 2m\frac{\omega^2}{c^2}\right)\cdots \Rightarrow \boxed{v_g(\omega) = c\left(1 + \frac{3}{2}m\frac{\omega^2}{c^2}\right)}$$

Ainsi les hautes fréquences se propagent plus rapidement que les basses fréquences. La corde avec raideur constitue un milieu **dispersif**.

3. b. Considérons maintenant une telle corde fixée en $x = 0$ et en $x = L$. Les modes propres correspondent à des ondes stationnaires de pulsation ω qui peuvent être associées à la superposition d'une OPPH progressive et d'une OPPH régressive :

$$\underline{y}(x, t) = \underline{a}\,e^{j(\omega t - kx)} + \underline{b}\,e^{j(\omega t + kx)}$$

avec $k^2 + mk^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

Les conditions aux limites imposent $\underline{y}(0, t) = \underline{y}(L, t) = 0$, soit :

$$\begin{cases} \underline{a} + \underline{b} = 0 \rightarrow \underline{y}(x, t) = 2\underline{b}\,j\sin kx\,e^{j\omega t} \\ \text{et } \sin kL = 0 \rightarrow kL = n\pi, \text{ d'où } k = n\frac{\pi}{L} \end{cases}$$

Copyrighted material

Les pulsations des modes propres sont alors définies selon :

$$\omega_n = \frac{c\,n\,\pi}{L} \cdot \left(1 + m\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Commentaires

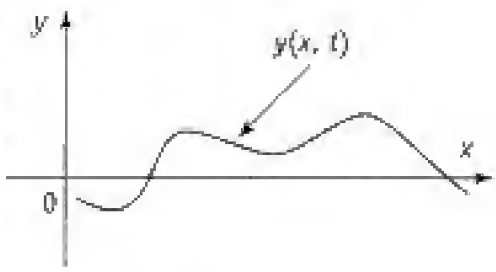
• Pour les faibles valeurs de n les pulsations propres s'identifient à peu près à celle $\left(\omega_n' = \frac{n\pi c}{L}\right)$ d'une corde sans raideur. Ce qui se produit dès que $m\frac{n^2\pi^2}{L^2} \ll 1$, c'est-à-dire dès que :

$$\frac{m\omega_n^2}{c^2} \ll 1.$$

• Les pulsations propres ne sont plus harmoniques (c'est-à-dire multiples entiers de ω_1).

107 Oscillations forcées – Bilan d'énergie

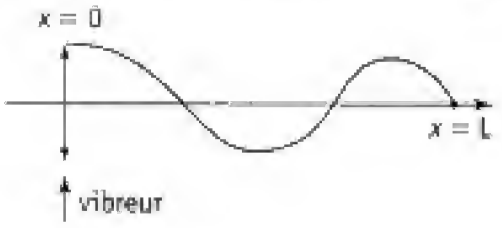
A. Une corde tendue se confond au repos avec l'axe Ox ; lorsqu'elle bouge, elle est animée de petits mouvements transversaux parallèles à Oy. On notera μ la masse linéique de la corde et T sa tension. On supposera que la tension de la corde reste constante tant que les écarts à la position d'équilibre restent faibles. Et on négligera les effets de la pesanteur.



1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles dont la fonction $y(x, t)$ est solution. Préciser la forme générale de cette solution, on notera c la vitesse de propagation.

2. La corde est tendue entre les points $x = 0$ et $x = L$. L'extrémité $x = L$ est fixe. L'extrémité en $x = 0$ est solidaire d'un vibreur qui lui impose un mouvement sinusoïdal de pulsation ω :

$$y(0, t) = U_0 \cos \omega t.$$

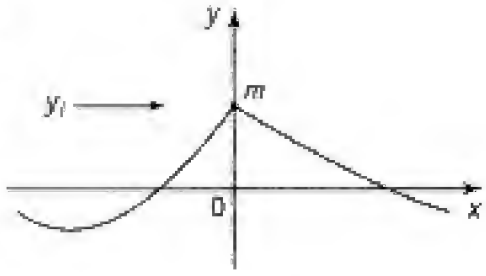


Établir l'expression de $y(x, t)$; préciser les caractéristiques intéressantes du mouvement. Pour quelles valeurs de ω y a-t-il résonance ? Commenter.

B. On reprend la corde étudiée (masse linéique μ et tension T).

Copyrighted material

La corde est maintenant considérée comme infinie, on ne se préoccupe pas du dispositif qui en assure la tension. En $x = 0$, on fixe sur la corde une petite masse m. Une onde incidente qui se propage dans le sens des x croissants est envoyée sur la masse m :



$$y_i = U_0 \cos\left[\omega\left(-\frac{x}{c} + t\right)\right] \text{ pour } x < 0.$$

Il apparaît alors une onde réfléchie $y_r = U_{0_r} \cos\left[\omega\left(\frac{x}{c} + t\right) + \varphi_r\right]$ et une onde transmise $y_t = U_0 \cos\left[\omega\left(-\frac{x}{c} + t\right) + \varphi_t\right]$.

1. Calculer les coefficients (complexes) de réflexion et de transmission :

$$\underline{r} = \frac{U_{0_r}}{U_0} e^{i\varphi_r} \quad \text{et} \quad \underline{\tau} = \frac{U_{0_t}}{U_0} e^{i\varphi_t}.$$

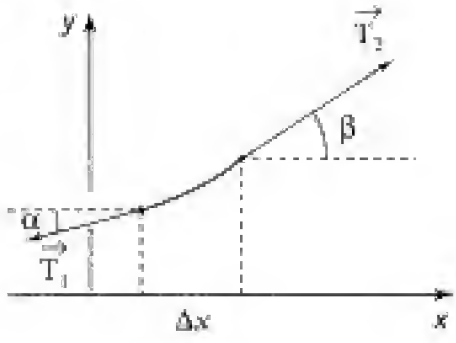
On posera $\omega_0 = \frac{2T}{mc}$. Commenter.

2. Faire un bilan d'énergie cinétique pour la masse m. On rappelle que le flux d'énergie le long de la corde est donné par l'expression $\Pi = -T_y \cdot \underline{v}$. ($T_y$ composante de la tension selon Oy et $\underline{v}$ vitesse du point de la corde).

Vérifier la conservation de l'énergie. Étudier les deux cas particuliers $m = 0$ et m infini.

Solution

1. L'élément de corde situé entre x et $x + \Delta x$, de masse $\mu\Delta x$, est soumis aux forces de liaisons $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ exercées en ses extrémités par le reste de la corde.



On a $\left\|\overrightarrow{T_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{T_2}\right\| = T$ (d'après l'énoncé).

Le théorème de la résultante dynamique, appliqué à cet élément de corde, s'écrit, en valeur algébrique sur la direction Oy :

$$(\mu\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left\|\overrightarrow{T_2}\right\| \sin\beta - \left\|\overrightarrow{T_1}\right\| \sin\alpha$$

($\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ sont tangents à la corde respectivement en x et $x + \Delta x$)

ou : $$(\mu\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot (\sin\beta - \sin\alpha) \quad (1)$$

Les angles α et β sont les angles des tangentes à la corde aux points x et $x + \Delta x$.

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \quad \text{et} \quad \tan\beta = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}.$$

Copyrighted material

Pour de faibles élongations, α et β restent petits et l'on peut écrire : $\sin\alpha \approx \tan\alpha$, $\sin\beta = \tan\beta$.

L'équation (1) devient :

$$(\mu\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\cdot\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \quad (2)$$

L'expression entre crochets est la variation de la fonction $\frac{\partial y}{\partial x}$ entre x et $x + \Delta x$, égale en première approximation à :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right]\Delta x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\Delta x.$$

Après simplification par Δx, l'équation (2) devient :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ ou bien } \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

C'est une équation de propagation de la forme :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } \boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Commentaire

- La célérité c est d'autant plus grande que la corde est plus tendue et que sa masse linéique est faible (effet d'inertie).
- Cette expression est l'analogue de la célérité des ondes acoustiques dans les fluides $c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_0}}$.

c_a diminue avec l'inertie du fluide (ρ_0) et la compressibilité du fluide (χ_0).

La solution générale d'une telle équation est :

$$\boxed{y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)}$$

f et g sont deux fonctions d'une variable dont la forme dépend des conditions initiales et des conditions aux limites.

2. Il s'agit d'un régime sinusoïdal permanent, les fonctions f et g introduites ci-dessus sont donc nécessairement, à x fixé, sinusoïdales par rapport au temps (pulsation ω).

Utilisons la notation complexe habituelle :

$$\underline{y} = Ae^{i\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)} + Be^{i\omega\left(-\frac{x}{c} - t\right)}, \quad y(x,t) = \mathrm{Re}(\underline{y}).$$

En $x = 0$, on doit avoir : $\underline{y}(0,t) = U_0 e^{-i\omega t}$, ce qui donne : $A + B = U_0$.

En $x = L$, $\underline{y}(L,t) = 0$, soit : $A\exp\left(i\omega\frac{L}{c}\right) + B\exp\left(-i\omega\frac{L}{c}\right) = 0$.

Copyrighted material

A et B, solutions d'un système de deux équations, valent :

$$A = \frac{U_0}{1 - e^{2i\omega\frac{L}{c}}} = -U_0 \frac{e^{-i\omega\frac{L}{c}}}{2i\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)} \quad \text{et} \quad B = \frac{U_0}{1 - e^{-2i\omega\frac{L}{c}}} = U_0 \frac{e^{i\omega\frac{L}{c}}}{2i\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)}.$$

Ces valeurs, reportées dans $\underline{u}$, donnent, en effectuant les simplifications :

$$\underline{y} = U_0 \cdot \frac{\sin\omega\left(\frac{L-x}{c}\right)}{\sin\left(\omega\frac{L}{c}\right)} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Soit, en passant à la partie réelle :

$$y(x, t) = \frac{U_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)} \sin\left(\omega\frac{L-x}{c}\right)\cos\omega t.$$

Il s'agit d'un phénomène **d'ondes stationnaires**, la longueur ℓ d'un fuseau est la demi-période de la fonction $\sin\left(\omega\frac{L-x}{c}\right)$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\ell = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi c}{\omega}}$$

l'amplitude maximum (ventre du fuseau) valant $\frac{U_0}{\left|\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)\right|}$. Cette amplitude maximum tend vers l'infini pour des valeurs de ω telles que $\frac{\omega L}{c} = p\pi$ (p entier), la longueur de la corde vaut alors un multiple de la demi-longueur d'onde : $L = p\frac{\pi c}{\omega} = p\frac{\lambda}{2}$ (la corde contient un nombre entier de fuseaux), c'est le phénomène de **résonance.**

Les modes propres susceptibles d'être excités ici sont ceux correspondant à un nœud de vibration en chaque extrémité de la corde (l'extrémité $x = L$ est fixe par hypothèse et $y(L, t) = 0$ pour tout t ; quand à l'extrémité $x = 0$ elle vibre avec une amplitude U_0 très faible devant l'amplitude maximale $\frac{U_0}{\left|\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)\right|}$ quand ω est proche d'une pulsation de résonance).

Au voisinage des pulsations de résonance, il faudrait affiner un peu notre modèle de corde sans rigidité dont la tension est uniforme pour décrire le phénomène réel dont on sait qu'il reste borné.

On a de plus négligé les phénomènes dissipatifs et les échanges énergétiques avec le milieu ambiant…

Copyrighted material

B 1. En utilisant la notation complexe, les ondes incidente, réfléchie et transmise s'écrivent :

• $x < 0$: $\underline{y_i} = U_0 e^{i\omega\left(-\frac{x}{c}+t\right)}$, $\underline{y_r} = \underline{r} U_0 e^{i\omega\left(\frac{x}{c}+t\right)}$

• $x > 0$: $\underline{y_\tau} = \underline{\tau} U_0 e^{i\omega\left(-\frac{x}{c}+t\right)}$

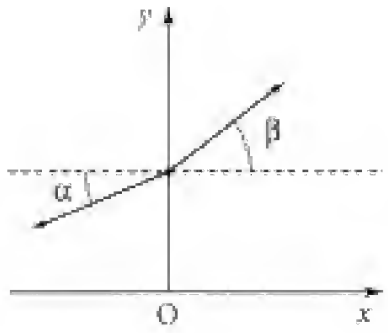
On a donc :

$$\text{pour } x < 0 : \underline{y} = \underline{y_i} + \underline{y_r} \text{ et pour } x > 0 : \underline{y} = \underline{y_\tau}$$

La position de m est aussi celle de la corde de part et d'autre de la masse :

$$\underline{y_m} = \underline{y}(x = 0^-) = \underline{y}(x = 0^+).$$

Ce qui donne notamment : $\boxed{1 + \underline{r} = \underline{\tau}}$ (3)



D'autre part l'équation de la quantité de mouvement appliquée à la masse m, s'écrit :

$$m\frac{d^2 y_m}{dt^2} = T\sin\beta - T\sin\alpha$$

avec : $\sin\alpha \approx \tan\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{(x=0^-)}$

et : $\sin\beta \approx \tan\beta = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{(x=0^+)}$

puis, en utilisant la notation complexe (y_m est aussi une fonction sinusoïdale de pulsation ω) :

$$-m\omega^2 \underline{y_m} = T \cdot \left[\left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial x}\right)_{(x=0^+)} - \left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial x}\right)_{(x=0^-)}\right] \quad (4)$$

Soit encore puisque $\underline{y_m} = \underline{y_\tau}(0^+, t) = U_0 \underline{\tau} e^{+i\omega t}$ et

$$\left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial x}\right)_{(x=0^-)} = -U_0 \frac{i\omega}{c}(1 - \underline{r}) e^{+i\omega t} \text{ et } \left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial x}\right)_{(x=0^+)} = -U_0 \frac{i\omega}{c} \underline{\tau} e^{+i\omega t}$$

$$\boxed{\underline{\tau} = -\frac{T}{m\omega^2}\left[\left(-\frac{i\omega}{c}\right)(\tau - 1 + \underline{r})\right]} \quad (5)$$

Éliminons $\underline{\tau}$ entre les relations (3) et (5) :

$$1 + \underline{r} = \frac{iT}{m\omega c} \cdot 2\underline{r} \Rightarrow \underline{r} = \frac{-1}{1 - \frac{2iT}{m\omega c}} \Rightarrow \boxed{\underline{r} = -\frac{i\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + i\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

et $\underline{\tau} = 1 + \underline{r}$, soit $\boxed{\underline{\tau} = \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_0}}}$

Copyrighted material

Commentaire

Pour ce qui est de la transmission la masse m joue le rôle de « filtre passe-bas » présentant une fréquence de coupure (à – 3 dB) égale à $\omega_0 = \dfrac{2T}{mc} = \dfrac{2}{m}\sqrt{T\mu}$ d'autant plus faible que m est importante.

2. Pour étudier le comportement énergétique du système appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la masse m :

$$\frac{de_{c_m}}{dt} = (T\sin\beta)\frac{\partial y}{\partial t}(0^+, t) - (T\sin\alpha)\frac{\partial y}{\partial t}(0^-, t).$$

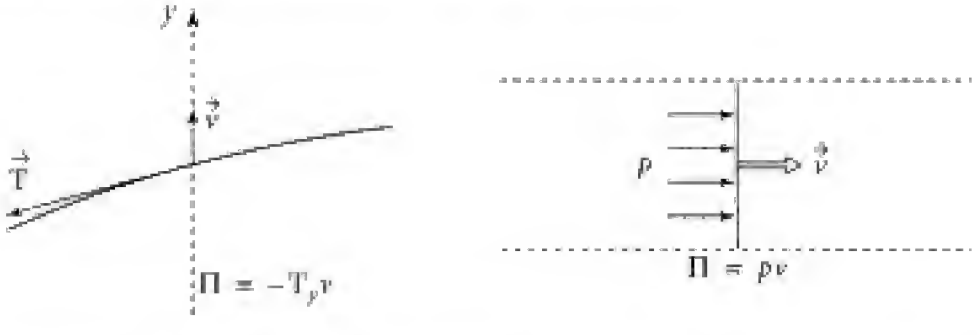
Or $T\sin\beta \# T\dfrac{\partial y}{\partial x}(0^+, t)$ et $T\sin\alpha = T\dfrac{\partial y}{\partial x}(0^-, t)$.

D'où : $\dfrac{de_{c_m}}{dt} = -T\dfrac{\partial y}{\partial x}(0^-, t)\dfrac{\partial y}{\partial t}(0^-, t) + T\dfrac{\partial y}{\partial x}(0^+, t)\dfrac{\partial y}{\partial t}(0^+, t)$ (7)

La quantité $\Pi = -\left(T\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right) = -T_y \cdot v$ représente donc le flux d'énergie transférée dans le sens des x positifs.

Commentaires

Π est l'analogue du vecteur de Poynting en électromagnétisme, et plus simplement pour des ondes acoustiques de la grandeur pv (où p est la surpression).



La quantité $-T\dfrac{\partial y}{\partial x}(0^+, t)\dfrac{\partial y}{\partial t}(0^+, t)$ s'identifie donc à $\Pi_t(0^+, t)$ puisque l'on a :

$$y(0^+, t) = y_t(0^+, t).$$

Pour la première expression de l'égalité (7) remarquons que :

$$y(0^-, t) = y_i(0^-, t) + y_r(0^-, t).$$

Or $y_i(x, t) = f\left(-\dfrac{x}{c} + t\right) = f(\xi)$ et $y_r(x, t) = g\left(\dfrac{x}{c} + t\right) = g(\gamma)$.

D'où : $\begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial x}(0^-, t) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{df}{d\xi} \text{ et } \dfrac{\partial y_i}{\partial t}(0^-, t) = \dfrac{df}{d\xi} \\ \dfrac{\partial y_r}{\partial x}(0^-, t) = \dfrac{1}{c}\dfrac{dg}{d\gamma} \text{ et } \dfrac{\partial y_r}{\partial t}(0^-, t) = \dfrac{dg}{d\gamma} \end{cases}$

Copyrighted material

Soit $\frac{\partial y}{\partial x}(0^-, t)\frac{\partial y}{\partial t}(0^-, t) = \frac{1}{c}\left[\frac{dg}{d\gamma} - \frac{df}{d\varepsilon}\right]\left[\frac{dg}{d\gamma} + \frac{df}{d\varepsilon}\right]$

$$= \frac{1}{c}\left[-\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\gamma}\right)^2\right].$$

Nous avons donc $-T\frac{\partial y}{\partial x}(0^-, t)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}(0^-, t) = \Pi_i(0^-, t) - \Pi_r(0^-, t)$

(avec $\Pi_i(0^-, t) = \frac{1}{c}\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)^2$; et $\Pi_r(0^-, t) = \frac{1}{c}\left(\frac{dg}{d\gamma}\right)^2$: flux dans le sens des $x < 0$).

L'équation de l'énergie pour la masse m s'écrit alors :

$$\frac{de_{c_m}}{dt} = \Pi_i(0^-, t) - \Pi_r(0^-, t) - \Pi_t(0^+, t).$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{\Pi_i(0^-, t) = \Pi_r(0^-, t) + \Pi_t(0^+, t) + \frac{de_{c_m}}{dt}}$$

Le flux incident d'énergie se retrouve d'une part dans les ondes réfléchies et transmises et d'autre part dans le taux de variation de l'énergie cinétique de la masse m.

Commentaire

Ce résultat n'est pas lié à la nature sinusoïdale des vibrations. La démonstration repose seulement sur les caractères progressif ou régressif des ondes.

Pour des phénomènes à variations périodiques (ici sinusoïdales) passons aux valeurs moyennes dans le temps :

$$\langle\Pi_i(0^-, t)\rangle = \langle\Pi_r(0^-, t)\rangle + \langle\Pi_t(0^+, t)\rangle + \langle\frac{de_{c_m}}{dt}\rangle.$$

La dernière quantité est évidemment nulle :

$$\langle\frac{de_{c_m}}{dt}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{de_{c_m}}{dt}dt = \frac{1}{T}[e_{c_m}(T) - e_{c_m}(0)] = 0.$$

On doit donc avoir :

$$\langle\Pi_i(0^-, t)\rangle = \langle\Pi_r(0^-, t)\rangle + \langle\Pi_t(0^+, t)\rangle.$$

Or ces flux moyens sont proportionnels au carré de l'amplitude réelle des ondes correspondantes, les coefficients de proportionnalité étant les mêmes (il s'agit de la même corde de part et d'autre de la masse m). La relation précédente doit donc se traduire par :

$$\boxed{1 = |\underline{r}|^2 + |\underline{\tau}|^2 \quad \text{soit} \quad \underline{r}\underline{r}^* + \underline{\tau}\underline{\tau}^* = 1}$$

Copyrighted material

Ce qui est bien vérifié par les expressions (6) des coefficients $\underline{r}$ et $\underline{\tau}$. En effet nous avons :

$$|\underline{r}|^2 = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{et} \quad |\underline{\tau}|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \rightarrow |\underline{r}|^2 + |\underline{\tau}|^2 = 1.$$

Étude des cas particuliers :

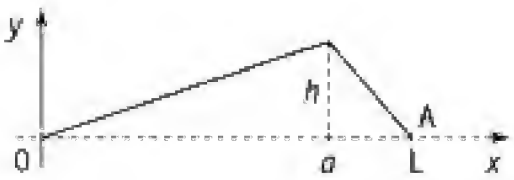
• Masse nulle ($m = 0$) : ω_0 tend alors vers l'infini et $\underline{r} \rightarrow 0$, $\underline{\tau} \rightarrow 1$. C'est normal, il n'y a pas de discontinuité et l'onde incidente est transmise intégralement sans donner lieu à une onde réfléchie.

• Masse m tendant vers « l'infini » : cette fois-ci ω_0 tend vers zéro, et l'on trouver $\underline{r} \rightarrow -1$ et $\underline{\tau} \rightarrow 0$. Tous se passe comme si la corde était fixée en O, l'onde incidente est réfléchie intégralement avec changement de signe.

108 Corde de guitare

Une corde de guitare de longueur L et de masse μ par unité de longueur est tendue (tension T_0) entre deux points O et A.

À l'instant $t = 0$ la corde est abandonnée dans la position représentée sur le schéma ci-contre (corde pincée) sans vitesse initiale :



$y(x, 0) = f(x)$ avec $f(x) = h\frac{x}{a}$ pour $x \in (0, a)$ et $f(x) = h\frac{L-x}{L-a}$ pour $x \in (0, L)$.

1. Donner l'équation $y(x, t)$ représentant la forme de la corde à un instant $t > 0$.

Rappel : la fonction 2 L-périodique impaire se confondant avec $f(x)$ sur l'intervalle [0, L] est développable en série de Fourier selon :

$$f(x) = \sum_1^{\infty} B_n \sin\left(n2\pi\frac{x}{2L}\right) \quad \text{où} \quad B_n = \frac{2hL^2}{\pi^2 a \cdot (L-a)} \times \frac{\sin\left(n\pi\frac{a}{L}\right)}{n^2}.$$

2. a. Déterminer la force F_y (composante selon $\vec{u}_y$) exercée par la corde sur l'extrémité A (chevalet).

b. Que se passe-t-il si l'« attaque » s'effectue en $a = \frac{L}{p}$ (p entier) ?

Copyrighted material

Solution

1.

POINT MÉTHODE
La corde étant fixée à ses deux extrémités la solution en $y(x, t)$ s'exprimera sous la forme d'une combinaison linéaire d'ondes stationnaires (modes propres).

Une onde stationnaire est de la forme $y(x, t) = F(t)G(t)$, et elle doit vérifier l'équation de d'Alembert : $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$).

Soit encore $$\frac{1}{c^2}\frac{1}{G(t)}\frac{d^2G}{dt^2} = \frac{1}{F(x)}\frac{d^2F}{dx^2}.$$

Le membre de gauche est une fonction du temps, celui de droite de x ; ce sont donc une même constante que l'on peut écrire $-k^2$ (où k est réel) : ainsi $F(x)$ sera une fonction sinusoïdale de x qui pourra bien s'annuler en $x = 0$ et $x = L$.

D'où $G(t) = A\cos(kct) + B\sin(kct)$ et $F(x) = A'\cos(kx) + B'\sin(kx)$.

Or $\left.\begin{cases} y(0, t) = 0 \Rightarrow A' = 0 \\ y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \end{cases}\right\}$ $A' = 0$ et $k = \frac{n\pi}{L}$.

D'autre part les vitesses initiales sont nulles, soit $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \rightarrow B = 0$.

Posant alors $\omega = kc$, les modes propres sont donnés par :

$$y_n(x, t) = B_n \sin(k_n x) \cdot \cos(\omega_n t) \quad \text{avec } k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ et } \omega_n = \frac{n\pi c}{L}.$$

Ils vérifient séparément $\begin{cases} y(0, t) = y(L, t) = 0 & (1) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 & (2) \\ \text{l'équation de d'Alembert} & (3) \end{cases}$

On peut alors construire une solution plus générale en superposant les $\{y_n(x, t)\}$. Envisageons donc :

$$y(x, t) = \sum B_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\cos\left(n\frac{\pi c}{L}t\right).$$

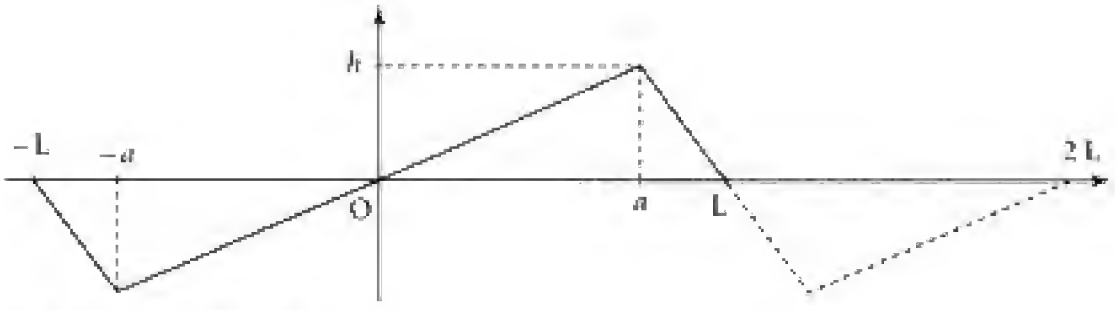
Cette solution convient si elle s'identifie, sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant L$, à $f(x) = y(x, 0)$ à $t = 0$ (forme imposée à la corde à l'instant initial).

Il faut donc que l'on ait pour $x \in (0, L)$:

$$f(x) = \sum B_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) = \sum B_n \sin\left(2\pi n\frac{x}{2L}\right).$$

Ainsi $f(x)$ apparait comme la restriction à l'intervalle $(0, L)$ d'une fonction impaire 2 L-périodique (*cf.* $\sin 2\pi n\frac{x}{2L}$) dont B_n sont les coefficients de Fourier :

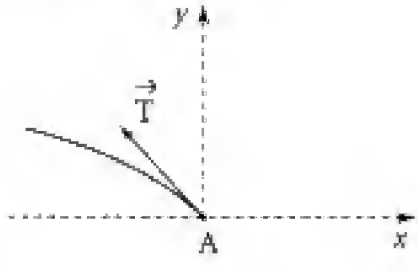
Copyrighted material



On a donc d'après l'énoncé :

$$y(x, t>0) = \frac{2hL^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right)}{n^2} \cdot \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \quad (4)$$

2. a. On a $F_y = T_0\left(-\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)\right)$, soit d'après (4) :



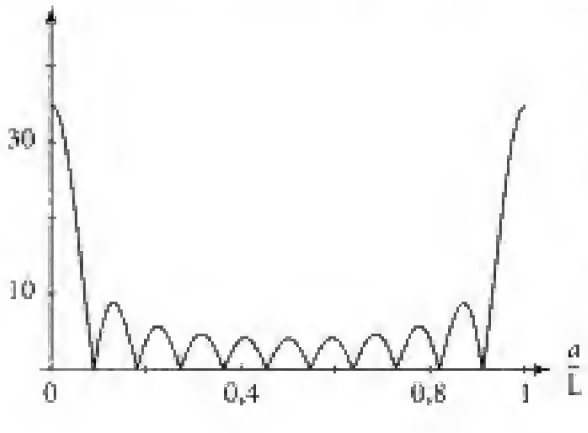
$$F_y = -\frac{2hLT_0}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right)}{n^2} \frac{n\pi}{L} \cos(n\pi) \cos\omega_n t$$

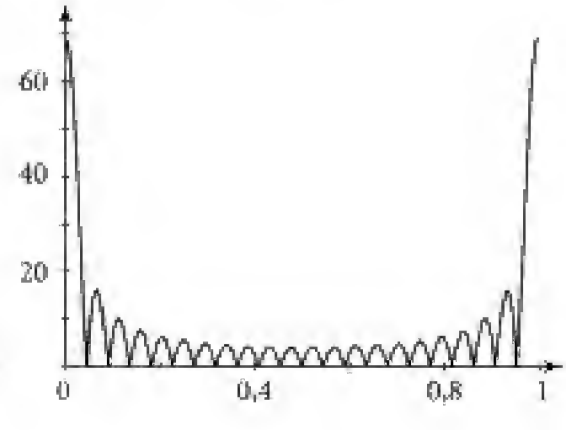
soit encore :

$$F_y = -\frac{2hLT_0}{\pi a(L-a)} \sum \frac{\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right)}{n} \cdot (-1)^n \cos\omega_n t.$$

Le spectre de cette force est harmonique les f_n étant des multiples de f_1 (fondamental) $= \frac{c}{2L}$.

L'amplitude des harmoniques varie avec n et a proportionnellement à $A_n = \frac{1}{L-a}\left|\frac{\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{n\frac{\pi a}{L}}\right|$: pour un ordre n donné « grand » cette amplitude prend des valeurs importantes pour a proche de 0 ou de L, comme le montrent les courbes ci-dessous représentant $\frac{a}{L} \to A_n$ pour deux valeurs de n (11 et 22) :





Copyrighted material

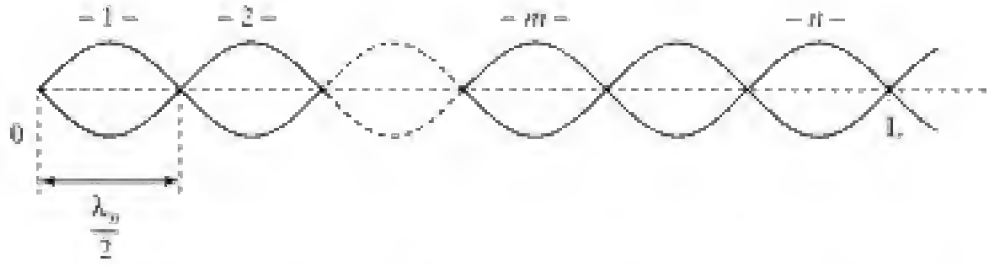
Il en résulte que si l'on excite la corde près de l'une de ses extrémités on obtiendra un son plus riche en harmoniques de rang élevé.

2. b. Pour une attaque en $a = \frac{L}{p}$ l'amplitude de l'harmonique n s'annule pour :

$$\sin\left(\frac{n\pi}{p}\right) = 0, \text{ soit } \frac{n\pi}{p} = m\pi \rightarrow n = mp,\ m = \{1, 2, \ldots\}.$$

Ainsi, p étant entier, les fréquences $pf_1, 2pf_1, \ldots, mpf_1, \ldots$ seront éteintes.

Ce résultat semble logique si on se rappelle que le mode n présente des nœuds de vibrations aux abscisses $x_m = m\frac{\lambda_n}{2}$ avec $L = n\frac{\lambda_n}{2}$ $\left(k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}\right)$.



Il ne pourra donc pas être excité si l'attaque initiale en $x = a$ coïncide avec un nœud de ce mode, c'est-à-dire pour $a = m\frac{\lambda_n}{2} = \frac{m}{n}L$ (m entier tel que $1 \leqslant m < n$).

Soit dans le cas où $a = \frac{L}{p} : \frac{L}{p} = \frac{m}{n}L \rightarrow n = pm$.

Ainsi pour $p = 7$ les harmoniques de fréquences $m7f_1$ seront éteintes.

Commentaires

- Le mouvement de la corde est couplé, via cette force F_y s'exerçant sur le chevalet, à la table d'harmonie de la guitare qui rayonnera l'énergie acoustique de façon plus efficace que ne le ferait la corde seule…
- On n'a pas tenu compte de la raideur de la corde. L'exercice n° XX montre que son spectre n'est plus exactement harmonique…

Copyrighted material

Copyrighted material

chapitre

2

Ondes acoustiques

201 Son émis par un réacteur d'avion

Une onde acoustique plane progressive et harmonique se propage dans l'air avec une célérité c.

1. Donner la puissance moyenne $\mathcal{P}_m$ traversant une surface S perpendiculairement à cette onde. On exprimera le résultat en fonction de S, ρ_0 (masse volumique de l'air), c et p_e (valeur efficace de la surpression).

Calculer la valeur efficace de la surpression acoustique pour une intensité de l'onde égale à $I_0 = 10^{-12}\ W \cdot m^{-2}$.

L'air est assimilé à un gaz parfait pour lequel $T_0 = 288\ K$ et $P_0 = 105\ Pa$.

Données :

$R = 8{,}31\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$, $\gamma = 1{,}4$.

M (masse molaire de l'air) $= 29 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot mol^{-1}$.

2. Un réacteur d'avion à 20 m émet un « son » correspondant au seuil de douleur pour l'oreille. On associe à ce signal un niveau de 120 dB, la référence étant I_0. Quelle est l'intensité correspondante ? Quelle est la puissance émise dans tout l'espace par une telle source (on adoptera, pour simplifier, le modèle d'une source sphérique) ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Onde acoustique plane progressive harmonique.
- Puissance acoustique – Intensité – Niveau sonore.
- Célérité des ondes acoustiques dans un fluide.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Se souvenir que la vitesse du fluide et la surpression sont liées (*cf.* par exemple l'équation linéarisée traduisant le mouvement du fluide). La célérité des ondes acoustiques dans un fluide est donnée par l'expression $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{0_s}}}$.

3. Solution

1. L'onde acoustique progressive et sinusoïdale a la forme :

$$p = p_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{et} \quad v = v_0 \cos(\omega t - kx).$$

La relation entre p_0 et v_0 peut être déterminée à partir de l'équation linéarisée de la quantité de mouvement, c'est-à-dire :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow -\rho_0 v_0 \omega \sin(\omega t - kx) = -p_0 k \sin(\omega t - kx).$$

Copyrighted material

D'où $\rho_0 v_0 \omega = p_0 k$ et $p_0 = \rho_0 \frac{\omega}{k} v_0$.

Les ondes se propagent ici dans l'air, assimilé à un milieu non dispersif, pour lequel $k = \frac{\omega}{c}$.

Finalement : $\boxed{p_0 = \rho_0 c\, v_0}$

La puissance traversant une section surface S (perpendiculaire à l'onde) est fournie par :

$$\mathcal{P}(t) = P(x, t)v(x, t)S.$$

Soit une puissance moyenne $\mathcal{P}_m = \langle \mathcal{P}(t) \rangle = \langle P(x, t)v(x, t) \rangle S$.

Or la pression P est la somme de la pression d'équilibre P_0 et de la « surpression » $p(x, t)$, d'où :

$$\langle \mathcal{P}(x, t) \rangle = \underbrace{\langle P_0 v(x, t) \rangle S}_{(1)} + \langle p(x, t)v(x, t) \rangle S.$$

(1) est de valeur nulle, P_0 étant une constante et $v(x, t)$ variant de façon sinusoïdale dans le temps. On a donc :

$$\mathcal{P}_m = \langle p(x, t)v(x, t) \rangle S = \frac{1}{\rho_0 c} \langle p^2(x, t) \rangle S.$$

Mais $\langle p^2(x, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_0^2 \cos^2(\omega t - kx)\, dt = \frac{1}{2} p_0^2$.

La surpression efficace p_e est définie par $p_0 = \sqrt{2} p_e$, soit :

$$\boxed{\mathcal{P}_m = \frac{p_e^2 S}{\rho_0 c}}$$

A.N. :

■ L'intensité de l'onde correspond à la quantité $\frac{\mathcal{P}_m}{S}$, d'où :

$$\boxed{I_0 = \frac{p_e^2}{\rho_0 c}}$$

■ Pour calculer ρ_0 assimilons l'air à un gaz parfait :

$$PV = nRT = n M \frac{RT}{M} \rightarrow P_0 = \rho_0 \frac{RT_0}{M}.$$

D'où $\frac{P_0 M}{RT_0} = \frac{10^5 \times 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \times 288} = \boxed{1{,}21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$

■ La célérité est donnée par l'expression $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{0_s}}}$ (*cf.* cours).

Pour un gaz parfait $\chi_{0_s} = \frac{1}{\gamma} \chi_T = \frac{1}{\gamma P_0} \left(\chi_T^{G.P.} = \frac{1}{P_0} \right) \rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$.

Copyrighted material

soit : $\boxed{c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

■ D'où $p_e = \sqrt{I_0 \rho_0 c} \Rightarrow \boxed{p_e = 2{,}0 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}}$

2. ■ L'échelle d'intensité sonore en décibel (dB) (niveau sonore) est définie par la relation :

$$N_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ (logarithme décimal).}$$

La référence étant prise pour I_0 (il s'agit en fait du seuil d'audibilité pour une oreille moyenne pour des sons de fréquence 1 000 Hz).

Commentaire

Le facteur 10 provient de ce que N_{dB} est défini à partir de grandeurs énergétiques. Si l'on revient aux surpressions efficaces, et dans le cas d'une OPPH, nous savons (*cf.* plus haut) que I est proportionnel à p_e^2.

D'où : $$N_{dB} = 10\log\left(\frac{p_e^2}{p_{e_0}^2}\right) = 20\log\left(\frac{p_0}{p_{e_0}}\right).$$

Un son de 120 dB correspondra donc à une intensité I telle que :

$$\log\frac{I}{I_0} = 12 \rightarrow I = I_0\, 10^{12} = 10^{-12} \cdot 10^{12} \Rightarrow \quad I = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

■ Assimilons la source à une source d'ondes sphériques, celle-ci émet une puissance moyenne $\mathcal{P}_m$ dans tout l'espace, l'intensité sonore à la distance d est donnée par :

$$I = \frac{\mathcal{P}_m}{4\pi d^2} \text{ d'où } \mathcal{P}_m = 4\pi d^2 I.$$

A.N. : $d = 20$ m et $I = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ soit :

$$\mathcal{P}_m = 4\pi(20)^2 \times 1 \Rightarrow \quad \mathcal{P}_m = 5{,}0 \text{ kW}.$$

202 Tuyau d'orgue

Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau de longueur $l = 1{,}00$ m fermé à l'une de ses extrémités et ouvert à l'autre.

Les pressions, température, et masse volumique moyennes de l'air contenu dans le tuyau sont :

$$P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad T_0 = 290 \text{ K} \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1{,}22 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Copyrighted material

1. Déterminer les fréquences ν_0 du fondamental et ν_1 de la première harmonique. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}40$.

2. À la fréquence ν_1 on a mesuré une amplitude maximale des élongations de l'air égale à $a_0 = 1$ mm. En déduire l'amplitude maximale correspondante :

- p_0 pour la surpression,
- τ_0 pour la température.

1. Ce qu'il faut savoir

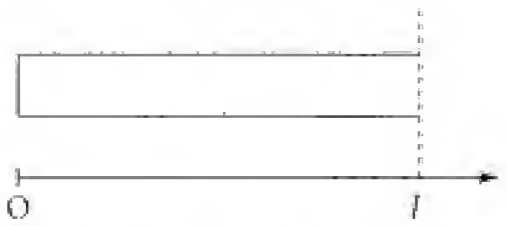
- Onde acoustique – célérité.
- Ondes stationnaires : modes propres.

2. Ce qu'il faut comprendre

Les deux fréquences cherchées correspondent aux deux premiers modes propres susceptibles d'être excités dans le tuyau. Les vibrations s'expriment sous forme d'ondes stationnaires.

3. Solution

1. Le tuyau d'orgue est assimilé à un tuyau ouvert à l'extrémité $x = l$ et fermé à l'extrémité $x = 0$. Les modes propres sinusoïdaux doivent être compatibles avec les conditions aux limites :



– élongation nulle en $x = 0$ (quel que soit t),

– surpression nulle en $x = l$ ($P = P_0$ pression du milieu ambiant, et $p = 0$: ce n'est là qu'une approximation qui revient par ailleurs à négliger la puissance rayonnée par l'extrémité ouverte devant la puissance véhiculée par les ondes se propageant dans le tuyau).

Si l'on note $v(x, t)$ et $p(x, t)$ les ondes de vitesse et de surpression, ces grandeurs doivent vérifier :

– l'équation de propagation : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ (1) $f = \{v, p\}$

(c désigne la célérité du son)

– et les conditions précisées ci-dessus.

Il s'agit alors d'ondes stationnaires de la forme : $f(x, t) = g(x)\cos(\omega t + \varphi)$

avec d'après (1) : $\dfrac{d^2 g}{dx^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2} g = 0$.

Soit : $g(x) = a\sin kx + b\cos kx$ où $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Copyrighted material

On a donc :

$$p(x, t) = (a_1 \sin kx + b_1 \cos kx)\cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Il lui correspond une vitesse que l'on peut déduire de l'équation de la quantité de mouvement (linéarisée dans le cadre de l'acoustique linéaire) :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p = -\frac{\partial p}{\partial x}\vec{u}_x \rightarrow \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

D'où : $$v(x, t) = -\frac{k}{\rho_0 \omega}(a_1 \cos kx - b_1 \sin kx) \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$v(0, t) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$p(l, t) = 0 \rightarrow b_1 \cos kl = 0 \text{ avec } b_1 \neq 0 .$$

Les modes propres d'oscillations sinusoïdales sont associés à :

$$k = \frac{\omega}{c} \text{ et } kl = \frac{\pi}{2} + m\pi .$$

Soit : $$\frac{2\pi \nu_m}{c} l = \frac{2m+1}{2}\pi \rightarrow \nu_m = (2m+1)\frac{c}{4l}.$$

La fréquence du fondamental est donnée par : $\boxed{\nu_0 = \frac{c}{4l}}$

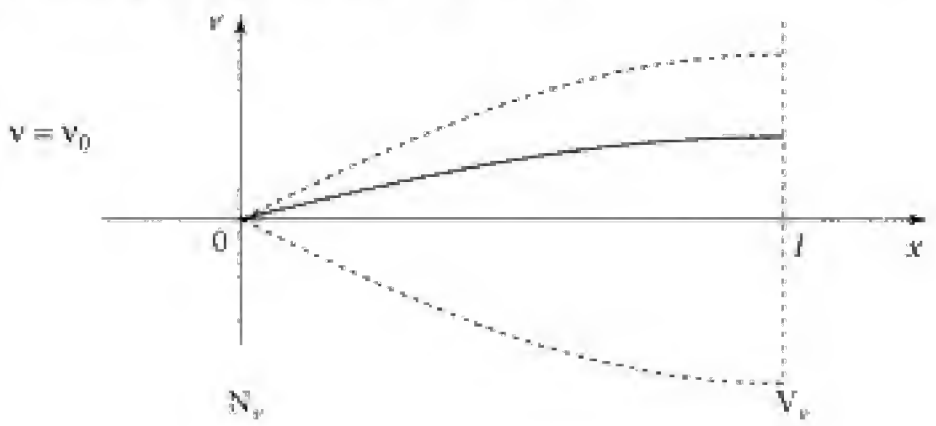
et celle de la première harmonique par : $\boxed{\nu_1 = \frac{3c}{4l}}$

Commentaire

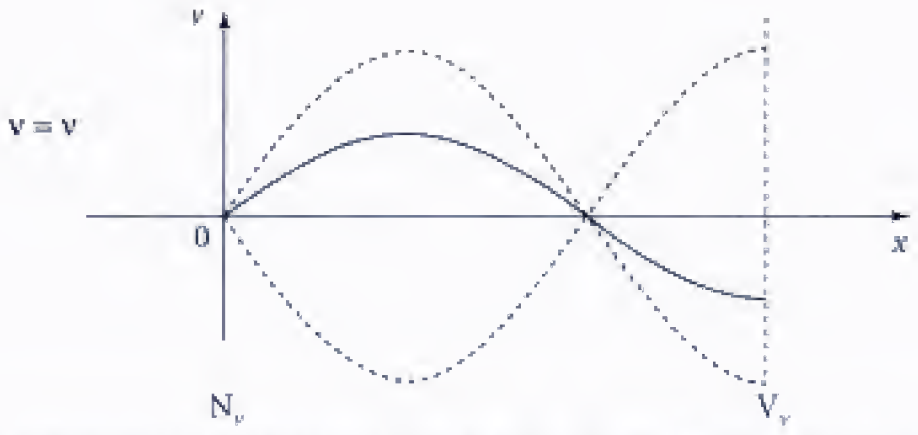
On a finalement :

$$\begin{cases} p(x, t) = p_0 \cos k_m x \cos(\omega_m t + \varphi) \\ v(x, t) = \dfrac{p_0}{\rho_0 c} \sin k_m x \sin(\omega_m t + \varphi). \end{cases}$$

Surpression et vitesse sont en quadrature ($\cos(\omega_m t + \varphi)$ et $\sin(\omega_m t + \varphi)$), et aux nœuds de l'un correspondent des ventres de l'autre. Ainsi :



Copyrighted material



On a représenté sur les dessins ci-dessus le fuseau associé à la vitesse et au mode considéré (courbes en pointillés), ainsi que la courbe donnant $x \to v(x, t)$ à un instant t fixé (en trait plein).

Point méthode

Pour déterminer les fréquences propres ν_m il suffit de remarquer que l'on a un nœud de vitesse en $x = 0$ et un ventre de vitesse (nœud de surpression en $x = l$).

Or la distance entre un ventre et un nœud consécutifs étant égale à $\frac{\lambda}{4}$, il vient :

$$l = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2} \text{ avec } \lambda\nu = c$$

d'où $l = (2m+1)\frac{c}{4\nu_m} \to \nu_m = \frac{c}{4l}(2m+1) = (2m+1)\nu_0$ avec $\nu_0 = \frac{c}{4l}$.

■ La détermination des fréquences ν_0 et ν_1 passe par la connaissance de la célérité c.

Or :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \text{ (résultat du cours)}$$

et en assimilant l'air à un gaz parfait nous avons :

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma}\chi_T \text{ avec } \chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{P_0}.$$

D'où : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \dfrac{1}{\gamma P_0}}} = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}}$.

A.N. :

■ $c = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\dfrac{1{,}4 \times 1{,}013 \cdot 10^5}{1{,}22}} \Rightarrow \quad c = 341 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

■ $\boxed{\nu_0 = 85\text{Hz}}$ et $\boxed{\nu_1 = 256\text{Hz}}$

Copyrighted material

2. Pour le mode $v = v_1$ l'élongation $\xi(x, t)$ est liée à la vitesse selon :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v(x, t) \rightarrow \xi(x, t) = -\frac{p_0}{\rho_0 c \omega_1} \sin k_1 x \cos(\omega_1 t + \varphi).$$

L'amplitude maximale est celle des ventres de vitesse (et donc de déplacement), elle vaut :

$$a_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c \omega_1}.$$

Les ventres de surpression ($|\cos k_m x| = 1$) présentent une amplitude p_0 qui correspond à l'amplitude maximale cherchée. D'où : $p_0 = \rho_0 c \omega_1 a_0$.

A.N. :

$$p_0 = 1{,}22 \times 341 \times (2\pi \times 256) \times 10^{-3} \Rightarrow \quad \mathbf{p = 670\ Pa.}$$

On a supposé que la propagation d'ondes s'accompagnait de transformations adiabatiques réversibles de l'air, ce qui se traduit localement par la relation :

$P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cte}$ (hypothèse du gaz parfait avec $\gamma = \text{cte}$).

Soit pour de petites variations de T et P :

$$(1-\gamma)\frac{\delta P}{P} + \gamma \frac{\delta T}{T} = 0.$$

P varie autour de la valeur moyenne P_0 et T autour de T_0, soit :

$$P = P_0 + p(x, t) \quad \text{et} \quad T = T_0 + \tau(x, t)$$

d'où : $(1-\gamma)\dfrac{p(x, t)}{P_0} + \gamma \dfrac{\tau(x, t)}{T_0} = 0 \quad \text{et} \quad \tau(x, t) = -\dfrac{1-\gamma}{\gamma}\dfrac{T_0}{P_0} p(x, t)$.

L'amplitude maximale des variations de température est donnée par :

$$\boxed{\tau_0 = T_0 \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_0}{P_0}}$$

A.N. :

$$\tau_0 = 290 \times \frac{0{,}4}{1{,}4} \times \frac{670}{1{,}013 \cdot 10^5} \Rightarrow \quad \mathbf{\tau_0 = 0{,}55\ °C.}$$

207 Sphère pulsante

Une sphère de centre O fixe a son rayon R qui varie selon une loi $R = R_0 + a\cos\omega t$ avec $a \ll R_0$. Elle est plongée dans un milieu fluide de masse volumique ρ_0 et de coefficient de compressibilité isentropique χ_0.

Copyrighted material

Les vibrations de la sphère produisent, dans le milieu, une onde acoustique divergente. La surpression $p(r, t)$ prend la forme, en notation complexe :

$$\underline{p} = \frac{\underline{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

r désigne la distance du point O au point M considéré dans le milieu.

1. Justifier l'expression complexe $\underline{p}(r, t)$ de la surpression : on rappelle que

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rf)}{dr^2}.$$

Donner les expressions des grandeurs k et $\underline{A}$ en fonction de ω, c (célérité des ondes), ρ_0, R_0 et a : on supposera que l'on a $a \ll \lambda$ où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

2. Calculer la puissance acoustique moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ rayonnée par la sphère.

Commenter le résultat obtenu : se placer dans le cas où l'on a $R_0 \ll \lambda$ (λ est la longueur d'onde).

A.N. : Donner la valeur de a, ainsi que celle de l'amplitude de la surpression à une distance $r = 1$ m du point O.

On prendra $\langle \mathcal{P} \rangle = 0{,}15$ W, $c = 340$ m · s^{-1}, $\rho_0 = 1{,}2$ kg · m^{-3} et $R_0 = 5$ cm.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de propagation de d'Alembert : ondes sphériques.
- Équations linéarisées de l'acoustique reliant le champ des vitesses à celui des surpressions.
- Puissance acoustique.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Dans le cas des ondes acoustiques à trois dimensions la surpression est solution de l'équation de propagation $\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. La vitesse de ces ondes s'obtiendra en utilisant l'équation (linéarisée) de la quantité de mouvement.

2. Pour déterminer la puissance acoustique rayonnée on cherchera la puissance développée, sur la sphère de rayon r, par la surpression $p(r, t)$, les particules fluides y étant animées de la vitesse $v(r, t)\vec{u}_r$.

3. Solution

1. À trois dimensions, et dans l'approximation de l'acoustique linéaire, la surpression vérifie l'équation de propagation de d'Alembert :

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}} \text{ (cf. cours).}$$

Copyrighted material

Dans le cas où p n'est fonction que de r et t le laplacien devient :

$$\Delta p = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp) \rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rp)\,.$$

On est ramené à l'équation classique caractérisant les phénomènes de propagation ne dépendant que du temps et d'une variable d'espace cartésienne (*cf.* onde plane : $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdots$)

La solution générale est de la forme :

$$p(r,t) = \underbrace{\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{O.S.D}} + \underbrace{\frac{g\left(t+\frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{O.S.C}}$$

O.S.D = onde sphérique divergente
O.S.C = onde sphérique convergente

Ici le système génère une onde sphérique divergente à variations sinusoïdales dans le temps. Ce qui justifie l'expression (en notation complexe) :

$$\underline{p}(r,t) = \frac{\underline{A}}{r}e^{j(\omega t - kr)} \text{ avec } \boxed{k = \frac{\omega}{c}} \quad (1)$$

puisque $\omega t - kr = \omega\cdot\left(t - \frac{k}{\omega}r\right) = \omega\cdot\left(t-\frac{r}{c}\right)$.

Pour déterminer $\underline{A}$ il suffit de connaître le champ des vitesses associé à cette onde, et de traduire la condition aux limites en $r = R$,

$$v(R,t) = \frac{dR}{dt} = -a\omega\sin\omega t$$

ou encore $\underline{v}(R,t) = a\omega j e^{j\omega t}$.

Ce champ des vitesses peut être obtenu à partir de l'équation de la quantité de mouvement. Dans le cadre de l'approximation linéaire elle s'écrit :

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}p = -\frac{\partial p}{\partial r}\vec{u_r} \quad \text{(puisqu'ici } p = p(r,t)\text{)}$$

D'où : $$\rho_0 j\omega\,\underline{\vec{v}} = \underline{A}\left[\frac{1}{r^2} + j\frac{k}{r}\right]e^{j(\omega t - kr)}\vec{u_r} \quad (2)$$

soit en $r = R(t)$, $\rho_0 j\omega(j\omega a) = \underline{A}\left[\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R}\right]\exp[j(-kR)]$

or $R(t) = R_0 + a\cos\omega t$ et $a \ll R_0 \rightarrow \frac{1}{R} \approx \frac{1}{R_0}$

$a \ll \lambda \rightarrow kR = kR_0 + ka = kR_0 + 2\pi\frac{a}{\lambda} \approx kR_0$.

d'où : $-\rho_0\omega^2 a = \underline{A}\frac{1}{R_0^2}(1 + jkR_0)\exp(-jkR_0) \Rightarrow$ $$\boxed{\underline{A} \approx -\frac{\rho_0\omega^2 a R_0^2}{1 + j\frac{\omega}{c}R_0}\exp\left(j\frac{\omega}{c}R_0\right)} \quad (3)$$

$\left(k = \frac{\omega}{c}\right)$.

Copyrighted material

Commentaire

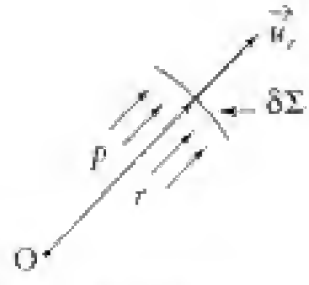
L'onde de vitesse n'est pas aussi simple que l'onde de surpression. Cependant pour $kr \gg 1$, c'est-à-dire pour $r \gg \lambda$ le terme en $j\frac{k}{r}$ du crochet devient prédominant devant celui en $\frac{1}{r^2}$ et :

$$\underline{\vec{v}} \approx \frac{1}{\rho_0 c}\frac{\underline{A}}{r}e^{j(\omega t - kr)}\vec{u}_r \approx \frac{1}{\rho_0 c}\underline{p}\vec{u}_r \quad (4)$$

relation analogue à celle d'une OPPH progressive…

2. Sur l'élément de surface $\delta\Sigma$ la surpression exerce, dans le sens des r croissants, la force élémentaire :

$$\overrightarrow{\delta f} = p\delta\Sigma\vec{u}_r.$$



Cette force développe une puissance instantanée :

$$\delta\mathcal{P} = p\delta\Sigma v \ (\text{car } \vec{v} = v(r,t)\vec{u}_r).$$

La puissance acoustique totale s'exerçant sur la sphère de rayon r est alors :

$$\mathcal{P} = p(r,t)v(r,t)4\pi r^2.$$

Il lui correspond une puissance moyenne :

$$\langle\mathcal{P}\rangle = 4\pi r^2\langle p(r,t)v(r,t)\rangle.$$

Or la vitesse comprend deux termes, l'un est en phase avec la surpression et contribue à $\langle\mathcal{P}\rangle$, alors que le second (terme en $\frac{1}{r^2}$) est en quadrature et ne joue donc aucun rôle dans la définition de $\langle\mathcal{P}\rangle$. On a alors :

$$p(r,t) = \frac{|\underline{A}|}{r}\cos(\omega t - kr + \arg(\underline{A}))$$

et d'après (2) pour le terme en phase noté v_{phase} :

$$v_{phase} = \frac{|\underline{A}|}{\rho_0\omega}\frac{k}{r}\cos[\omega t - kr + \arg(\underline{A})] = \frac{|\underline{A}|}{\rho_0 c}\cdot\frac{1}{r}\cos[\omega t - kr + \arg(\underline{A})]$$

et $\langle p(r,t)v(r,t)\rangle = \frac{|\underline{A}|^2}{\rho_0 c r^2}\langle\cos^2(\omega t - kr + \arg(\underline{A}))\rangle$.

La valeur moyenne de $\cos^2(\ )$ est classiquement égale à $\frac{1}{2}$. D'où :

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{4\pi r^2}{2}\frac{|\underline{A}|^2}{\rho_0 c r^2} \quad \text{avec} \quad |\underline{A}|^2 = \frac{\rho_0^2\omega^4 a^2 R_0^4}{1 + k^2 R_0^2}.$$

Soit :

$$\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{2\pi\rho_0 a^2\omega^4 R_0^4}{c\left(1 + \frac{\omega^2 R_0^2}{c^2}\right)}} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right).$$

Copyrighted material

Point méthode

La puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ peut se calculer directement à partir des expressions complexes de p et de v selon :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\underline{p}^* \, \underline{v}]S$$

$$\text{soit } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{S}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{A}^* \frac{1}{r}\exp(-j(\omega t - kr)) \cdot \frac{\underline{A}}{(j\rho_0\omega)}\left(\frac{1}{r^2} + j\frac{\omega}{rc}\right)\exp j(\omega t - kr)\right\}$$

$$\text{et } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}|\underline{A}|^2 \frac{S}{\rho_0 c} \cdot \frac{1}{r^2} = 2\pi \frac{|\underline{A}|^2}{\rho_0 c}.$$

• On aurait pu également remarquer que le résultat devait être indépendant de r, et donc se placer à grande distance ($kr \gg 1$) en utilisant le résultat (4).

Et pour $R_0 \ll \lambda$ soit $\dfrac{R_0 \nu}{c} \ll 1$ (ou $\dfrac{R_0 \omega}{c} \ll 1$),

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle \# 2\pi \frac{\rho_0 a^2}{c}(\omega R_0)^4} \quad (1).$$

Pour une puissance moyenne d'émission $\langle \mathcal{P} \rangle$ fixée l'amplitude des vibrations est d'autant plus grande que la quantité ωR_0 est faible. Aussi pour que l'amplitude des vibrations de la sphère garde (à puissance rayonnée imposée) une valeur raisonnable il faut choisir des valeurs de R_0 d'autant plus importantes que la fréquence est basse.

Si on applique ce résultat aux enceintes acoustiques on pourra constater que les dimensions des membranes vibrantes seront supérieures pour les graves comparées à celles utilisées pour l'émission des aigus.

A.N. : Pour une puissance acoustique moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle = 0{,}15$ Watt et une fréquence $\nu = 100$ Hz nous avons :

■ $\lambda = \dfrac{340}{100} = 3{,}4 \text{ m} \gg R_0 = 5 \text{ cm}\left(\dfrac{R_0}{\lambda} \sim 1{,}5 \cdot 10^{-2}\right)$

$$\text{et } a = \sqrt{\frac{0{,}15 \times 340}{2\pi \times 1{,}2 \times (2\pi \times 100 \times 5 \cdot 10^{-2})^4}} \Rightarrow \boldsymbol{a = 2{,}6 \text{ mm}}$$

(on a bien $a \ll R_0$: $\dfrac{a}{R_0} \sim 5 \cdot 10^{-2}$).

■ On peut définir, à la distance r, une intensité acoustique I selon $I = \dfrac{\langle \mathcal{P} \rangle}{4\pi r^2}$, d'où à $r = 1$ m : $I = \dfrac{0{,}15}{4\pi} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

■ De même l'amplitude des oscillations de surpression est donnée à $r = 1$ m par :

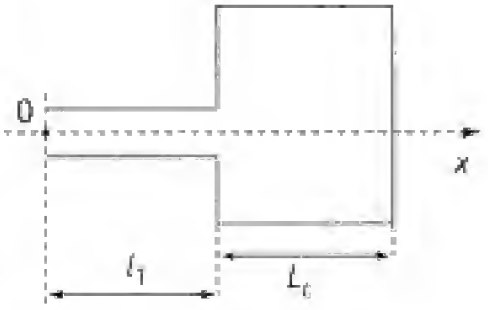
■ $p_0 = \dfrac{|\underline{A}|}{1} \# \rho_0 \omega^2 a R_0^2 \quad (kR_0 \ll 1)$.

■ Soit ici d'après (1) :

$$p_0 = \sqrt{\frac{\langle \mathcal{P} \rangle c \rho_0}{2\pi}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{p_0 \# 3{,}1 \text{ Pa}}.$$

204 Résonateur

On étudie le système constitué d'un tuyau (longueur ℓ_T, section S_T) et d'une cavité (longueur L_c, section S_c et volume $V_c = L_c S_c$). Toutes les dimensions sont petites devant la longueur d'onde λ considérée.



De plus on a $\dfrac{\ell_T S_T}{L_c S_c} \ll 1$ (de l'ordre de $\dfrac{1}{20}$ par exemple).

On excite l'entrée du système avec un haut-parleur qui assure en $x = 0$ une surpression sinusoïdale de pulsation ω : $p_e(t) = p_0 \cos \omega t$.

Deux petits microphones sensibles à la pression enregistrent les surpressions en entrée et dans la cavité.

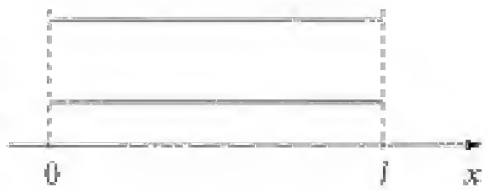
Ils mettent en évidence un phénomène de résonance pour la fréquence $f_0 = 115$ Hz avec :

$\ell_T = 5$ cm, $a = 1$ cm $(S_T = \pi a^2)$, $L_c = 10$ cm et $\phi = 8$ cm $\left(S_c = \dfrac{1}{4}\pi\phi^2\right)$.

La célérité du son dans l'air est $c_0 = 340\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ $\left(c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}\right)$.

1. Étude préliminaire

Soit un tuyau de longueur ℓ et de section S. L'air qu'il contient vibre à la pulsation ω. On pose pour la surpression $p(x, t)$ et la vitesse $\vec{v}$:



$p(x, t) = \text{Re}[\underline{P}(x)\exp(j\omega t)]$;

$\vec{v}(x, t) = \text{Re}[\underline{V}(x)\exp(j\omega t)]\vec{u}_x$.

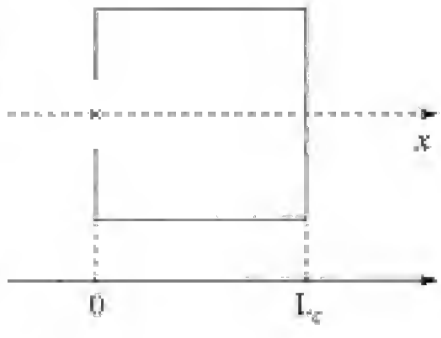
On introduit le débit volumique $\underline{d}_{vol} = S\underline{V}(x)\exp(j\omega t) = \underline{D}(x)\exp(j\omega t)$.

Donner les expressions générales de $\underline{P}(x)$ et $\underline{D}(x)$ en fonction de kx $\left(k = \dfrac{\omega}{c_0}\right)$ et de deux constantes $\underline{A}$ et $\underline{B}$.

En déduire les équations reliant $\underline{P}(\ell)$ et $\underline{D}(\ell)$ à $\underline{P}(0)$ et $\underline{D}(0)$.

2. a. Étude de la cavité du résonateur

On admettra la continuité de la surpression et du débit volumique au « point » de raccord du tuyau et de la cavité.



En utilisant le résultat du **1.** montrer que :

$$\underline{D}(0) = j\omega\mathscr{C}\underline{P}(0)$$

$\underline{D}(0)$ amplitude complexe du débit volumique en entrée de la cavité

$\underline{P}(0)$ amplitude complexe de la surpression en $x = 0$.

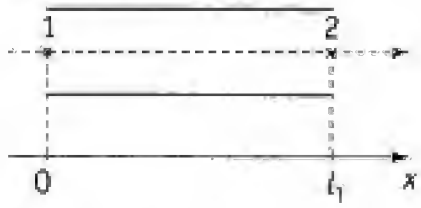
Copyrighted material

Exprimer la grandeur $\mathscr{C}$ en fonction de V_c, ρ_0 et c_0.

Que peut-on dire de la surpression dans la cavité (on a $kL_c \ll 1$) ?

À quel système étudié en électrocinétique la cavité est-elle équivalente ?

b. Reprendre l'étude précédente pour le tuyau.



Montrer que l'on a :

$$\underline{P}_1 - \underline{P}_2 = j\omega\mathscr{L}\underline{D}_1$$

Exprimer $\mathscr{L}$ en fonction de l_1, S_1 et ρ_0.

Que peut-on dire du débit volumique $\underline{D}$ pour $0 \leqslant x \leqslant l_1$ $(kl_1 \ll 1)$?

c. Proposer un circuit électrique analogue au résonateur acoustique. Mettre en évidence le phénomène de résonance puis déterminer la fréquence de résonance f_0 en fonction de c_0, S_1, l_1 et V_c.

A.N. : calculer f_0. Commenter.

3) Étude mécanique directe

On fait les hypothèses suivantes :

• l'air dans le tuyau vibre en un seul bloc : on note $D(t)$ le débit volumique correspondant ;

• la surpression p_c dans la cavité est uniforme ;

• p_1 désigne la surpression en entrée du tube, $p_2 = p_c$ en sortie.

a. Établir une première équation reliant p_1, p_2 aux variations temporelles du débit $D(t)$.

b. À partir d'un bilan de masse concernant l'air contenu dans la cavité, relier D aux variations de $p_c(t)$.

(On introduira le coefficient de compressibilité isentropique χ_0).

c. En déduire une équation différentielle en $p_c(t)$. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de d'Alembert : ondes planes progressives harmoniques (OPPH).
- Équation d'Euler linéarisée.
- Capacité – inductance en électrocinétique.
- Coefficients de compressibilité isentropique : $\chi_0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}\Big)_s$.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le régime est sinusoïdal de pulsation ω. On envisagera donc la superposition de deux OPPH se propageant en sens inverses (les dimensions transversales du tuyau étant faibles devant la longueur d'onde $\lambda - k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – on peut se limiter à des ondes planes…). On effectuera des développements limités au premier ordre en kl.

Copyrighted material

2. a. L'écoulement étant supposé unidimensionnel, il suffira de traduire la condition aux limites en $x = L_c$.

b. Les relations de continuité à l'interface tuyau – cavité permettent d'établir que le débit $\underline{D}$ peut être considéré comme uniforme dans le tuyau.

3. Solution

1. ■ Le régime est sinusoïdal (champ en $\exp(j\omega t)$) est unidimensionnel (dimensions transversales suffisamment petites devant la longueur d'onde). La solution à l'équation de propagation s'écrit donc sous la forme de la superposition d'une OPPH progressive et d'une OPPH régressive, soit pour les champs de surpression p et de vitesse $\vec{v}$:

$$\underline{p} = [\underline{A}\exp(-jkx) + \underline{B}\exp(jkx)]e^{j\omega t} = \underline{P}(x)\exp(j\omega t) \quad (1)$$

avec $k = \dfrac{\omega}{c_0}$ ($p(x, t)$ devant vérifier l'équation de d'Alembert : $\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$).

De plus d'après l'équation d'Euler linéarisée : $\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}p$:

$j\omega\rho_0 \underline{\vec{v}} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}\vec{u}_x$, soit $\vec{v} = v(x, t)\vec{u}_x$ où :

$$\underline{v}(x, t) = \frac{1}{\rho_0 \omega}\frac{k}{}[\underline{A}\exp(-jkx) - \underline{B}\exp(jkx)]\exp(j\omega t) = \underline{V}(x)\exp(j\omega t)$$

soit en introduisant le débit volumique $d_{vol} = Sv$ (et avec $\left(k = \dfrac{\omega}{c_0}\right)$) :

$$\underline{d}_{vol} = \frac{S}{\rho_0 c_0}[\underline{A}\exp(-jkx) - \underline{B}\exp(jkx)]\exp(j\omega t) = \underline{D}(x)\exp(j\omega t) \quad (2) \quad (\underline{D} = S\underline{V}).$$

■ En 0, on a $\underline{P}(0)$ et $\underline{D}(0)$, en l $\underline{P}(l)$ et $\underline{D}(l)$ avec d'après (1) et (2) :

$$\begin{cases} \underline{P}(0) = \underline{A} + \underline{B} \\ \underline{D}(0) = \dfrac{S}{\rho_0 c_0}(\underline{A} - \underline{B}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{P}(l) = \underline{A}\exp(-jkl) + \underline{B}\exp(jkl) \\ \underline{D}(l) = \dfrac{S}{\rho_0 c_0}[\underline{A}\exp(-jkl) - \underline{B}\exp(jkl)]. \end{cases}$$

Exprimons $\underline{P}(l)$ et $\underline{D}(l)$ en fonction des grandeurs d'« entrée » $\underline{P}(0)$ et $\underline{D}(0)$, au premier ordre par rapport à $kl\left(2\pi\dfrac{l}{\lambda} \ll 1\right)$:

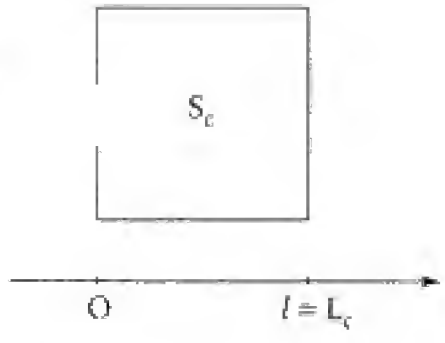
$$\underline{P}(l) \approx (\underline{A} + \underline{B}) - jkl(\underline{A} - \underline{B}) \quad \text{et} \quad \underline{D}(l) \approx \frac{S}{\rho_0 c_0}[(\underline{A} - \underline{B}) - jkl(\underline{A} + \underline{B})]$$

soit encore :

$$\boxed{\underline{P}(l) = \underline{P}(0) - jkl\frac{\rho_0 c_0}{S}\underline{D}(0)} \quad (3) \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{D}(l) = \underline{D}(0) - jkl\frac{S}{\rho_0 c_0}\underline{P}(0)} \quad (4)$$

Copyrighted material

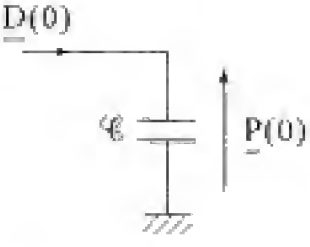
2. a. Dans la cavité et dans le cadre de l'écoulement unidimensionnel, on aura $\underline{D}(L_c) = 0$ (la vitesse s'annule sur la paroi), d'où :



$$\underline{D}(L_c) = 0 = \underline{D}(0) - jkL_c \frac{S_c}{\rho_0 c_0} \underline{P}(0)$$

et avec $k = \frac{\omega}{c_0}$: $\underline{P}(0) = \dfrac{1}{j\omega \dfrac{L_c S_c}{\rho_0 c_0^2}} \underline{D}(0)$ (5).

La cavité apparaît comme l'analogue (en électrocinétique) d'une capacité de valeur $\boxed{\mathscr{C} = \dfrac{V_c}{\rho_0 c_0^2}}$



V_c désignant le volume de la cavité.

■ **Surpression dans la cavité :**

(3) donne pour $0 < l < L_c$: $\underline{P}(l) = \underline{P}(0) - \left(jkl \dfrac{\rho_0 c_0}{S_c}\right)\left(jk \dfrac{L_c S_c}{\rho_0 c_0}\right) P(0)$, soit à l'ordre considéré $\underline{P}(l) = \underline{P}(0)$. Tout se passe comme si la surpression était uniforme dans la cavité.

b. Pour le tuyau, on a d'après (3)

$$\underline{P}_2 = \underline{P}_1 - jkl_T \frac{\rho_0 c_0}{S_T} \underline{D}_1 \quad (6)$$

D'autre part avec (4) :

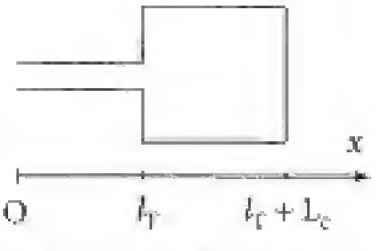
$$\underline{D}_2 = \underline{D}_1 - jkl_T \frac{S_T}{\rho_0 c_0} \underline{P}_1$$

et en reportant l'expression de $\underline{P}_1$ tirée de (6)

$$\underline{D}_2 = \underline{D}_1 - jkl_T \frac{S_T}{\rho_0 c_0}\left(\underline{P}_2 + jkl_T \frac{\rho_0 c_0}{S_T} \underline{D}_1\right)$$

soit au 1er ordre en kl_T : $\underline{D}_2 = \underline{D}_1 - jk \dfrac{l_T S_T}{\rho_0 c_0} \underline{P}_2$ (7)

Enfin les relations de continuité en $x = l_T$ s'écrivent :



$$\begin{cases} \underline{P}(l_T^-) = \underline{P}(l_T^+) \rightarrow \text{continuité de la surpression} \\ \underline{D}(l_T^-) = \underline{D}(l_T^+) \rightarrow \text{continuité du débit volumique.} \end{cases}$$

On a donc : $\underline{P}_2 = \underline{P}(l_T^+) = \dfrac{1}{j\omega \dfrac{L_c S_c}{\rho_0 c_0^2}} \cdot D(l_T^+)$ d'après (5), soit finalement dans le tuyau :

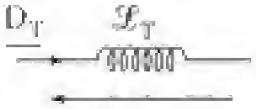
$$\underline{D}_2 = \underline{D}_1 - jk \frac{l_T S_T}{\rho_0 c_0} \frac{1}{jk \dfrac{L_c S_c}{\rho_0 c_0}} \underline{D}_2 \rightarrow \underline{D}_1 = \underline{D}_2 \cdot \left\{1 + \frac{l_T S_T}{L_c S_c}\right\}.$$

Copyrighted material

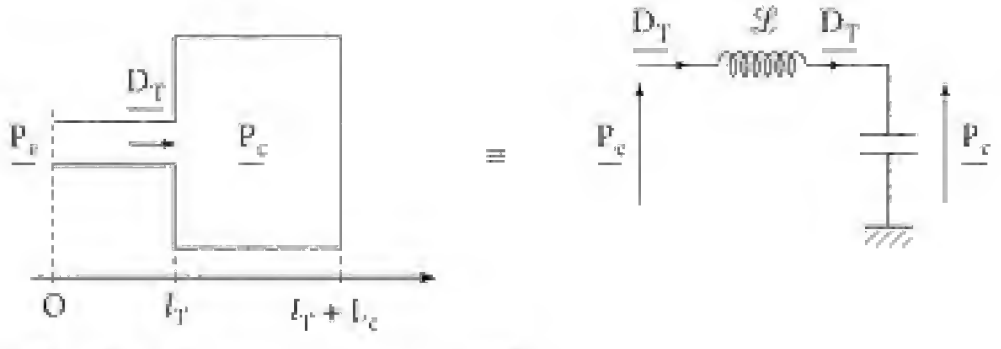
l_T et L_c étant du même ordre de grandeur, il vient avec $S_c \gg S_T$, en fait pour $l_T S_T \ll L_c S_c$: $\underline{D_1} - \underline{D_2} = D_T$.

Ainsi, à l'approximation considérée, le débit volumique est uniforme dans le tuyau qui constitue l'analogue d'une inductance $\boxed{\mathscr{L} = \dfrac{l_T \rho_0}{S_T}}$; en effet (6) s'écrit :

$$\underline{P_1} - \underline{P_2} = j\omega \frac{l_T \rho_0}{S_T} \underline{D_1} = j\omega \frac{l_T \rho_0}{S_T} \underline{D_T}.$$



c. Le système tuyau – cavité s'identifie à un simple circuit $\mathscr{L} - \mathscr{C}$ série :



On a : $\underline{P_e} - \underline{P_c} = j\mathscr{L}\omega \underline{D_T}$ et $\underline{D_T} = j\omega\mathscr{C}\underline{P_c}$.

Soit une fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{P_c}}{\underline{P_e}} = \dfrac{\underline{P_c}}{\underline{P_c} + (j\mathscr{L}\omega)(j\omega\mathscr{C})\underline{P_c}} \Rightarrow \underline{H} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathscr{L}\mathscr{C}}}$.

Le système joue le rôle d'un résonateur acoustique de fréquence de résonance $f_0 = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{\sqrt{\mathscr{L}\mathscr{C}}}$.

Pour $L_c = 10$ cm, $l_T = 5$ cm, $S_T = \pi a^2$ avec $a = 1$ cm, $S_c = \dfrac{\pi\phi^2}{4}$ où $\phi = 8$ cm, il vient :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S_T \rho_0 c_0^2}{\rho_0 l_T V_c}} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{c_0}{2\pi}\sqrt{\frac{S_T}{l_T V_c}}} \Rightarrow f_0 = 121 \text{ Hz},$$

ce qui correspond au bon ordre de grandeur…

Commentaire

On trouverait un gain infini pour $\omega = \omega_0$. En fait la réponse du système est limitée par les effets dissipatifs (viscosité…).

3. a. Considérons que l'air contenu dans le tuyau vibre comme un seul bloc de masse $m = \rho_0 S_T l_T$.

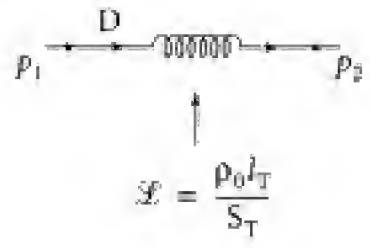
Copyright material

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit alors pour cette masse de vitesse $v(t)$

$$m\frac{dU}{dt} = (p_1 - p_2)S_T \rightarrow \rho_0 S_T l_T \frac{dU}{dt} = (p_1 - p_2)S_T$$

et en désignant par D le débit volumique dans le tube ($D = S_T U$) :

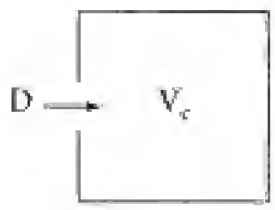
$$\boxed{\frac{\rho_0 l_T}{S_T}\frac{dD}{dt} = p_1 - p_2} \quad (8)$$



b. Étudions maintenant la cavité de volume invariable V_c.

Le débit « entrant » d'air est $D = S_T U$ (par continuité).

La masse $M_c(t)$ dans V_c varie selon :



$$\frac{dM_c}{dt} = D\rho_0$$

or $M_c = \rho_c V_c$ et donc $V_c\frac{d\rho_c}{dt} = D\rho_0$ (9)

Introduisons alors le coefficient de compressibilité isentropique $\chi_0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}\Big)_s$. On a donc dans une théorie linéaire :

$\rho_c - \rho_0 \sim \rho_0 \chi_0 p_c$ ($p_c \equiv$ surpression dans la cavité supposée uniforme)

soit : $\frac{d\rho_c}{dt} \sim \rho_0 \chi_0 \frac{dp_c}{dt}$ (10)

(9) et (10) conduisent à : $V_c \rho_0 \chi_0 \frac{dp_c}{dt} = D\rho_0 \Rightarrow$ $\boxed{\frac{V_c}{\rho_0 c_0^2}\frac{dp_c}{dt} = D}$ (9) $\left(c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}\right)$

d'où l'équivalence

où $\mathscr{C} = \frac{V_c}{\rho_0 c_0^2}$.

c. (8) et (9) donnent enfin avec $p_2 = p_c$ (continuité de la pression) :

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}\frac{dD}{dt} &= p_1 - p_2 \\ \mathscr{C}\frac{dp_c}{dt} &= D \end{aligned}\right\} \; p_1 = p_c + \mathscr{L}\mathscr{C}\frac{d^2 p_c}{dt^2} \quad (p_2 = p_c)$$

et posant $\omega_0^2 = \frac{1}{\mathscr{L}\mathscr{C}}$ on obtient : $\boxed{\frac{d^2 p_c}{dt^2} + \omega_0^2 p_c = \omega_0^2 p_1}$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti (les phénomènes dissipatifs n'ont pas été pris en compte…) de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}\mathscr{C}}}$, excité par $p_1(t) = p_{0_1}\cos\omega t$. Il y a bien phénomène de résonance pour $\omega = \omega_0$…

Copyrighted material

205 Isolation acoustique

On cherche à déterminer l'indice R d'affaiblissement acoustique d'une paroi par rapport aux bruits extérieurs (provenant de la région (1)).

On supposera que la paroi n'est pas absorbante, et on étudiera la réponse de la paroi pour une fréquence ν fixée, les ondes acoustiques étant normales à la paroi.

R est défini selon : $R = 20\log\left|\frac{p_2}{p_1}\right|$

où p_1 et p_2 représentent les surpressions acoustiques de part et d'autre de la paroi.

1. Loi de masse

On considère une paroi rigide simple imperméable à l'air, de masse surfacique σ et d'épaisseur faible devant la longueur d'onde. Sachant que $|p_2| \ll |p_1|$ donner l'expression R_1 du coefficient R à la fréquence ν.

On notera ρ_0 la masse volumique de l'air et c la célérité des ondes acoustiques dans l'air.

A.N. : calculer R_1 pour $\rho_0 = 1{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $c = 340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\sigma = 450\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$ (mur de béton) et $\nu = 160$ Hz.

2. Système masse-ressort-masse

La paroi est maintenant constituée de deux plaques de plâtre entre lesquelles on a placé de la laine minérale. On note σ la masse surfacique de l'ensemble et on suppose que la laine de verre joue le rôle d'un ressort de raideur k (par unité de surface).

On pose $\omega_0^2 = \frac{4k}{\sigma}$.

Exprimer la nouvelle expression $R_2(\nu)$ du coefficient d'affaiblissement R. On adoptera les mêmes approximations qu'au **1)**.

A.N. : donner la valeur numérique de R_2 pour $\sigma = 43\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$, $\nu_0 = 48$Hz ($\omega_0 = 2\pi\nu_0$), à la même fréquence $\nu = 160$ Hz.

3. Représenter, sur un même graphe, les courbes donnant l'indice $R = f(\log\nu)$ pour $\nu > 50$ Hz et pour une même masse surfacique σ pour les deux systèmes envisagés ($\sigma = 43\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$, $\nu_0 = 48$ Hz).

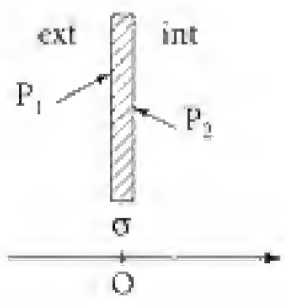
Commenter les différents résultats.

Solution

1. D'après les hypothèses de l'énoncé la paroi vibre en bloc à la fréquence ν.

Appliquons-lui le théorème de la quantité de mouvement (rapporté à l'unité de surface) :

$$\sigma\frac{dv}{dt} = p_1|_{0^-} - p_2|_{0^+}.$$



Copyrighted material

Soit en notation complexe :

$$\sigma j\omega \underline{V} = \underline{p_1}\big|_{0^-} - \underline{p_2}\big|_{0^+} \quad (1)$$

Or l'onde transmise est caractérisée par une surpression $\underline{p_2}$ et un champ des vitesses : $\underline{v_2} = \frac{1}{\rho_0 c}\underline{p_2}$ (*cf.* cours).

On a donc : $\underline{V} = \underline{v_2}\big|_{0^+} = \frac{1}{\rho_0 c}\underline{p_2}\big|_{0^+}$ (2)

D'où d'après (1) et (2) : $j\frac{\sigma\omega}{\rho_0 c}\underline{p_2}\big|_{0^+} = \underline{p_1}\big|_{0^-} - \underline{p_2}\big|_{0^+}$

soit : $\underline{p_1}(\text{paroi}) = \underline{p_2}(\text{paroi})\left(1 + \frac{j\sigma\omega}{\rho_0 c}\right)$.

Or l'énoncé indique que :

$$\left|\underline{p_2}\right|(\text{paroi}) \ll \left|\underline{p_1}\right|(\text{paroi}) \rightarrow \frac{\sigma\omega}{\rho_0 c} \gg 1 .$$

Dès lors : $\frac{\underline{p_1}(\text{paroi})}{\underline{p_2}(\text{paroi})} \approx j\frac{\sigma\omega}{\rho_0 c}$.

Commentaire

Il revenait au même de négliger directement $p_2\big|_{0^+}$ dans (1)

$$(1) \rightarrow \underline{p_1}(\text{paroi}) = j\sigma\omega V = j\sigma\omega \underline{V_2}\big|_{\text{paroi}} = j\frac{\sigma\omega}{\rho_0 c}\underline{p_2}\big|_{\text{paroi}} .$$

D'où, d'après la définition du coefficient d'affaiblissement R : $\boxed{R_L = 20\log\left(\frac{\sigma\omega}{\rho_0 c}\right)}$

A.N. : ■ Établissons tout d'abord la valeur de la grandeur $\frac{\sigma\omega}{\rho_0 c}$:

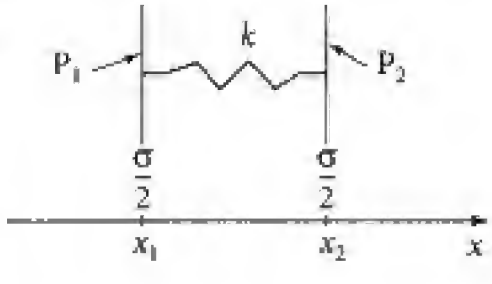
$$\frac{\sigma\omega}{\rho_0 c} = \frac{450 \times 2\pi \times 160}{1{,}3 \times 340} \sim 10^3 \gg 1 .$$

L'approximation est bien justifiée

■ Soit $R_L \# 60$ dB.

2. On modélise cette paroi par le système masse (masse surfacique $\frac{\sigma}{2}$)-ressort (k pour l'unité de surface)-masse $\frac{\sigma}{2}$).

Notons $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les déplacements instantanés des deux masses. On suppose qu'à l'équilibre le ressort n'est ni comprimé ni tendu.



Copyrighted material

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à chaque masse donne alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{2}\dfrac{dv_1}{dt} = k(x_2 - x_1) + p_1\Big|_{paroi} \\ \dfrac{\sigma}{2}\dfrac{dv_2}{dt} = k(x_1 - x_2) - p_2\Big|_{paroi} \end{cases}$$

Soit en notation complexe :

$$\begin{cases} j\omega\dfrac{\sigma}{2}\underline{v_1} = k(\underline{x_2} - \underline{x_1}) + \underline{p_1}\Big|_{paroi} & (3) \\ j\omega\dfrac{\sigma}{2}\underline{v_2} = k(\underline{x_1} - \underline{x_2}) - \underline{p_2}\Big|_{paroi} & (4) \\ \text{avec } \underline{p_2}\Big|_{paroi} = \rho_0 c\,\underline{v_2}\Big|_{paroi} = \rho_0 c\,\underline{v_2} & (5) \end{cases}$$

Sachant que $\left|\underline{p_2}\right|_{paroi} \ll \left|\underline{p_1}\right|_{paroi}$ on va (comme précédemment) négliger $\left|\underline{p_2}\right|_{paroi}$ dans (4).

D'où, avec $\underline{v_1} = j\omega\underline{x_1}$ et $\underline{v_2} = j\omega\underline{x_2}$:

$$\begin{cases} j\omega\dfrac{\sigma}{2}\underline{v_1} = \dfrac{k}{j\omega}(\underline{v_2} - \underline{v_1}) + \underline{p_2}\Big|_{paroi} & (6) \\ j\omega\dfrac{\sigma}{2}\underline{v_2} \# \dfrac{k}{j\omega}(\underline{v_1} - \underline{v_2}) & (7) \\ \text{avec } \underline{p_2} = \rho_0 c\,\underline{v_2} & (8) \end{cases}$$

(7) donne : $\left(-\dfrac{\omega^2\sigma}{2k} + 1\right)\underline{v_2} = \underline{v_1}$ (9)

Et avec (6) : $\dfrac{j\omega}{k}\underline{p_1}\Big|_{paroi} = \underline{v_1}\left[1 - \dfrac{\omega^2\sigma}{2k}\right] - \underline{v_2}$.

Soit avec (9) : $\dfrac{j\omega}{k}\underline{p_1}\Big|_{paroi} = \underline{v_2}\left[-1 + \left(1 - \dfrac{\omega^2\sigma}{2k}\right)^2\right]$ (10)

(5) et (10) donnent alors :

$$\frac{\underline{p_1}\Big|_{paroi}}{\underline{p_2}\Big|_{paroi}} = \frac{k}{j\omega\rho_0 c}\left[-1 + \left(1 - \frac{\omega^2\sigma}{2k}\right)^2\right] = \frac{k}{j\omega\rho_0 c}\left[-\frac{\omega^2\sigma}{k} + \frac{\omega^4\sigma^2}{4k^2}\right].$$

Soit encore $\dfrac{\underline{p_1}\Big|_{paroi}}{\underline{p_2}\Big|_{paroi}} = \dfrac{j\sigma\omega}{\rho_0 c}\left[1 - \dfrac{\omega^2\sigma}{4k}\right]$.

Le coefficient d'affaiblissement prend alors une valeur R_2 telle que :

$$R_2 = 20\log\frac{\sigma\omega}{\rho_0 c} + 20\log\left|1 - \frac{\omega^2\sigma}{4k}\right|.$$

Copyrighted material

Et en faisant intervenir la pulsation caractéristique ω_0 telle que $\omega_0^2 = \dfrac{4k}{\sigma}$:

$$R_2 = R_1 + 20\log\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|.$$

Soit enfin : $$\boxed{R_2 = R_1 + 20\log\left|1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right|}$$

A.N. : ici $R_1 = 39{,}8$ $(\sigma = 43\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-2})$; $R_2 = 39{,}8 + 20{,}1 \rightarrow R_2 \approx \mathbf{60\ dB}$.

3. Dans le cas de la loi de masse on a $R = 20\log\dfrac{\sigma\omega}{\rho_0 c}$, soit

$$R = 20\log\left(\frac{2\pi\sigma}{\rho_0 c}\right) + 20\log\nu = 20\log\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right) \text{ avec } \nu_1 = \frac{\rho_0 c}{2\pi\sigma}.$$

La courbe représentative est une droite.

Pour le système masse-ressort-masse on aura :

$$R = 20\log\frac{2\pi\sigma}{\rho_0 c} + 20\log\nu + 20\log\left|1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right| = 20\log\frac{\nu}{\nu_1} + 20\log\left|1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right|.$$

Commentaire

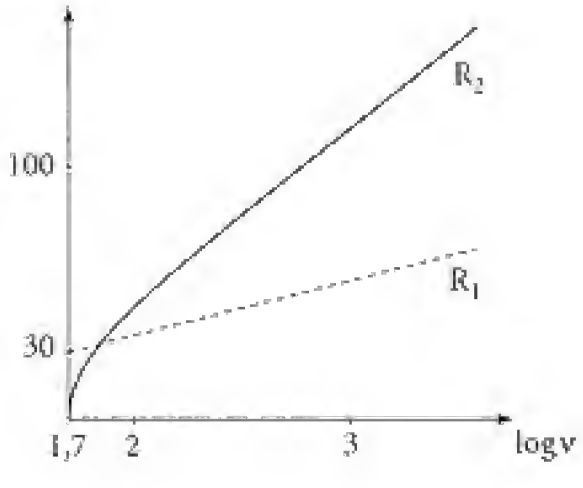
■ Les deux expressions se rejoignent pour k très grand (« $k \rightarrow \infty \rightarrow \nu_0 \rightarrow \infty$ ») l'ensemble devenant rigide, ce qui est bien évidemment normal.

■ R représente une « chute importante » pour une fréquence proche de la fréquence propre du système masse-ressort-masse. Ici cette chute n'est pas limitée car on n'a pas tenu compte d'effets dissipatifs.

Il faudra donc choisir des matériaux pour lesquels cette fréquence de résonance ν_0 est aussi basse que possible, et en tout cas suffisamment faible devant la fréquence basse du spectre architectural (typiquement 125 – 400 Hz) le terme correctif à R_1 étant d'autant plus grand…

■ Courbes $\log\nu \rightarrow R(\nu)$ (ν en Hz) pour $\nu \geqslant 50$ Hz

et $\{\sigma = 43\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-2}, \nu_0 = 48\ \text{Hz}\}$.



Copyrighted material

Commentaire

Les études **1.** et **2.** nous ont montré que l'on pouvait obtenir le même coefficient d'affaiblissement avec :

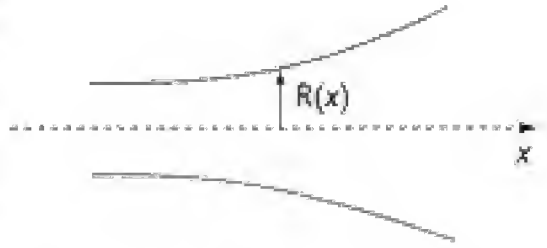
– un mur de béton tel que $\sigma = 450\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$ (ce qui correspond à une épaisseur de l'ordre de 20 cm).

– un mur en paroi double avec plaques de plâtre et laine minérale, tel que $\sigma = 43\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$ associé à une épaisseur d'environs 12 cm.

Le deuxième dispositif apparaît comme étant 10 fois moins lourd et de mise en œuvre très aisée. Il présente également un meilleur rapport performance/coût.

206 Tuyaux sonores de section variable

On étudie la propagation d'ondes acoustiques dans un tuyau rigide d'axe Ox et de section circulaire de surface $S(x)$ variant lentement avec x.



Le fluide est de l'air dont les conditions sont données à l'équilibre par ρ_0 (masse volumique) et χ_0 (coefficient de compressibilité isentropique).

On négligera les effets de la pesanteur.

1. Préciser les hypothèses qui permettent d'assimiler la perturbation sonore à un écoulement unidimensionnel. On supposera ces conditions réalisées par la suite et on désignera par $p(x, t)$ la surpression, $\vec{v} \approx v(x, t)\vec{u_x}$ la vitesse, et $\rho(x, t)$ la masse volumique du fluide.

a. À partir d'un bilan de matière, établir l'équation linéarisée :

$$S\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial (Sv)}{\partial x}.$$

b. De même, en faisant un bilan de quantité de mouvement montrer que l'on a :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

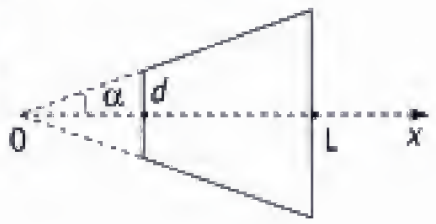
c. À l'aide d'une hypothèse que l'on précisera relier les variations temporelles de p et de ρ.

d. En déduire l'équation de propagation relative à la surpression $p(x, t)$. On fera apparaître la quantité $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}$.

Copyrighted material

2. Déterminer les propriétés des ondes acoustiques se propageant dans un pavillon exponentiel pour lequel $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = \frac{1}{a}$ où a est une constante positive. Commenter les résultats obtenus.

3. a. Le tuyau est maintenant conique (par exemple tuyau principal du haut-bois...), de longueur $l = L - d$. On s'intéresse aux ondes acoustiques sinusoïdales (pulsation ω). Montrer que l'onde de surpression peut s'écrire pour $d \leqslant x \leqslant L$:



$$\underline{p}(x, t) = \frac{\underline{a}}{x}\exp j(\omega t - kx) + \frac{\underline{b}}{x}\exp j(\omega t + kx).$$

Que vaut k ?

En déduire le champ des vitesses acoustiques $\underline{v}(x, t)$.

b. L'impédance acoustique est définie selon $\underline{Z}(x) = \frac{\underline{p}(x, t)}{\underline{v}(x, t)}$, et on prend $Z(L) = 0$ (sortie ouverte). Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z}(d)$ en fonction de $\rho_0 c$, k, d et L. Que dire des fréquences propres du tuyau conique comparées à celles d'un tuyau de section constante et de même longueur lorsque :

$\underline{Z}(d) = 0$? $\underline{Z}(d) \to +\infty$?

Commenter.

Solution

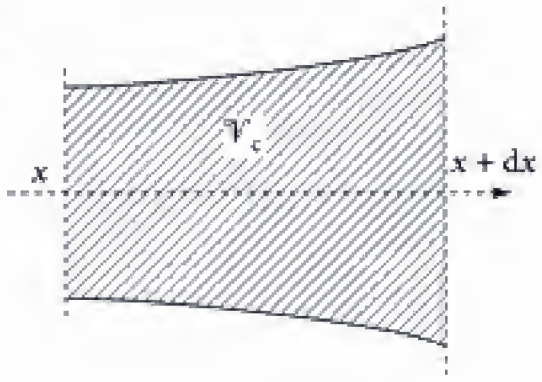
1. Dans le cas où les dimensions transversales $R(x)$ du tuyau restent faibles devant la longueur d'onde, et pour des variations de la section $S(x)$ demeurant suffisamment lentes à l'échelle de R on pourra faire les hypothèses suivantes :

– les grandeurs surpression p, masse volumique ρ, vitesse sont constantes dans toute section du tuyau. Elles ne dépendent donc, à cette approximation, que du temps et de x variable d'espace comptée le long de l'axe du tuyau,

– la vitesse du fluide reste pratiquement parallèle à cet axe ce qui est évidemment le cas pour $S(x) = S_0 = \text{cte}$: tuyau cylindrique.

a. Bilan de matière

Considérons le volume de contrôle $\mathcal{V}_c$ délimité par les sections $S(x)$ et $S(x + dx)$. À l'instant t, il contient une masse (dx infiniment petit) :



$$\delta M \# \rho(x, t)S(x)dx.$$

Entre les instants t et $t + dt$ cette masse varie selon :

$$\frac{d(\delta M)}{dt} = S\frac{\partial(\rho)}{\partial t}dx \quad (1)$$

Copyrighted material

Cette variation provient :

– du flux de masse $S(x)\rho(x, t)v(x, t)$ « entrant » dans $\mathcal{V}_c$, entre t et $t + dt$, par la section $S(x)$,

– du flux de masse $S(x + dx)\rho(x + dx, t)v(x + dx, t)$ « sortant » de $\mathcal{V}_c$, entre t et $t + dt$, par la section $S(x + dx)$

D'où : $\dfrac{d(\delta M)}{dt} = S(x)\rho(x, t)v(x, t) - S(x + dx)\rho(x + dx, t)v(x + dx, t)$

$$\frac{d(\delta M)}{dt} \# -\frac{\partial}{\partial x}(S\rho v)dx \quad (2)$$

La relation de conservation de la matière s'écrit donc (cf (1) et (2)) :

$$\boxed{S\frac{\partial(\rho)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(S\rho v)} \quad (3)$$

Linéarisons cette équation par rapport à v et aux variations de la masse volumique ρ.

Or (3) s'écrit : $\underbrace{S\dfrac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{ordre 1}} = \underbrace{-S\rho\dfrac{\partial v}{\partial x}}_{\substack{-S\rho_0\frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{à l'ordre 1}}} \underbrace{-\rho v\dfrac{\partial S}{\partial x}}_{\substack{-\rho_0 v\frac{\partial S}{\partial x} \\ \text{à l'ordre 1}}} \underbrace{-Sv\dfrac{\partial \rho}{\partial x}}_{\text{ordre 2}}$

Il reste, à l'ordre 1 : $\boxed{S\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0\dfrac{\partial(Sv)}{\partial x}}$ (4) (ρ_0 : masse volumique en l'absence d'ondes).

b. Bilan de quantité de mouvement

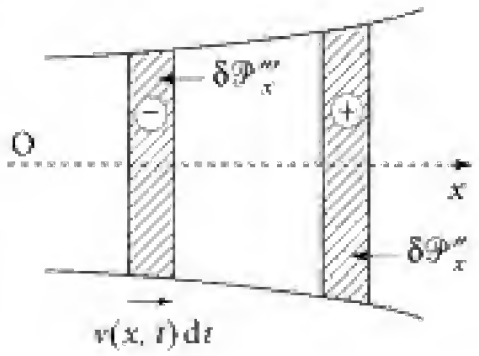
Revenons au système particulaire qui se trouve à l'instant t dans le volume $\mathcal{V}_c$.

À l'instant t sa quantité de mouvement selon Ox valait :

$$\delta\mathcal{P}_x = [(\rho S\,dx)v]_t \ (= \delta m v)$$

À $t + dt$, en suivant l'évolution de cette masse nous avons :

$$\delta\mathcal{P}'_x = [(\rho S\,dx)\cdot v]_{t+dt} + \delta\mathcal{P}''_x - \delta\mathcal{P}'''_x.$$



Avec $\delta\mathcal{P}''_x = \delta m'' v(x + dx, t) = (\rho S v\,dt)_{x+dx} v(x + dx, t) = (\rho S v^2)_{x+dx} dt$

de même $\delta\mathcal{P}'''_x = \delta m''' v(x, t) = (\rho S v^2)_x dt$.

D'où $\dfrac{D[\delta\mathcal{P}_x]}{Dt} = \lim\limits_{dt\to 0}\dfrac{\delta\mathcal{P}'_x - \delta\mathcal{P}_x}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho S v)dx + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho S v^2)dx.$

Le premier terme représente la variation locale de quantité de mouvement associée au volume de contrôle $\mathcal{V}_c$.

Le second terme correspond au flux de quantité de mouvement sortant de $\mathcal{V}_c$ ($[D_m v]_{x+dx} - [D_m v]_x$).

Copyrighted material

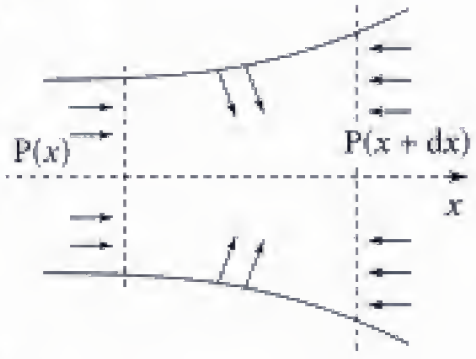
Dans le cadre de l'approximation linéaire le terme de flux est négligeable (il est du second ordre en v). ce qui donne :

$$\frac{D(\delta\mathcal{P}_x)}{Dt} \# \frac{\partial}{\partial t}(\rho S v)dx \# \rho_0 S(x)\frac{\partial v}{\partial t}dx.$$

■ Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit alors : $\dfrac{D(\delta\mathcal{P}_x)}{Dt} = \delta F_x$

avec $\delta F_x = P(x)S(x) - P(x+dx)S(x+dx) + \delta F'_x$

$\delta F'(x)$ est la force qu'exerce la paroi du tuyau sur le fluide.



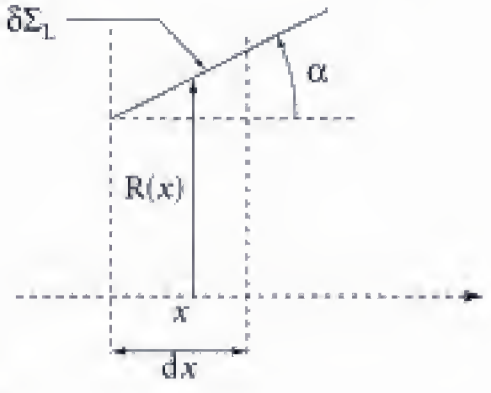
On a : $\delta F'_x = P(x)\delta\Sigma_L \sin\alpha$.

Or $\delta\Sigma_L = 2\pi R\dfrac{dx}{\cos\alpha}$

$\delta\Sigma_L \sin\alpha = 2\pi R\,dx\tan\alpha = 2\pi R\,dR.$

Soit avec $S = \pi R^2$, et donc $dS = 2\pi R\,dR$:

$$\delta F'_x = P(x)dS = P(x)\frac{dS}{dx}dx$$



Au total obtenons :

$$\delta F_x = -\frac{\partial(PS)}{\partial x}dx + P(x)\frac{dS}{dx}dx = -S(x)\frac{\partial P}{\partial x}dx.$$

Et l'équation de la quantité de mouvement devient :

$$\rho_0 S\frac{\partial}{\partial t}(v) = -S\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}} \quad (5) \text{ où } P = P_0 + p(x,t).$$

Commentaire

• Il s'agit bien entendu de l'équation d'Euler appliquée à un écoulement unidimensionnel, et en ne retenant que les termes du premier ordre.

POINT MÉTHODE

Il n'était cependant pas possible de reprendre l'équation locale de conservation de la matière $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\rho\vec{v} = 0$ en y faisant $\vec{v} = v\vec{u}_x$. On obtiendrait au 1er ordre :

$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ résultat indépendant de $S(x)$.

En fait on a $\text{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}\right)$, et ce n'est pas parce que v_y et v_z sont négligeables devant v_x que leurs dérivées le sont devant $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ ...

Copyrighted material

c. Les équations (4) et (5) reliant les variables $p(x, t)$, $v(x, t)$ et $\rho(x, t) - \rho_0$. Il reste à traduire que les ondes acoustiques se propagent de façon isentropique (viscosité, conduction thermique négligées).

Soit d'après la définition du coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s \text{ (d'où } P = P_0 + p). \quad (6)$$

Soit encore :

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} \# \frac{1}{\rho_0 \chi_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial P}} \quad (7) \quad \left(c^2 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}\right).$$

Commentaire

La relation (6) s'écrit – dans le suivi du mouvement d'une particule – :

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{1}{\rho \chi_s} \rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho \chi_s}\frac{d\rho}{dt}$$

soit au premier ordre :

$$\frac{dP}{dt} \sim \frac{\partial P}{\partial t}; \quad \frac{d\rho}{dt} \sim \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ et } \rho \chi_s \sim \rho_0 \chi_0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} \sim \frac{1}{\rho_0 \chi_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

d. (4) et (7) donnent : $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left[S\frac{\partial v}{\partial t}\right]$

et avec (5) : $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = +\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left[S\frac{\partial p}{\partial x}\right]$.

D'où finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right)\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}} \quad (8)$$

On retrouve l'équation classique de d'Alembert pour $S = \text{cte}$ $\left(\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = 0\right)$.

2. Dans le cas d'un pavillon exponentiel $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = \frac{1}{a}$, et pour des signaux sinusoïdaux (pulsation ω) :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\omega^2}{c^2}p = 0.$$

Cherchons des solutions sous la forme d'onde progressive :

$p(x, t) = \alpha e^{i(\omega t - kx)}$ avec a et k à valeurs dans $\mathbb{C}$.

k vérifie alors l'équation :

$$k^2 + i\frac{k}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Posons $k = k' - ik'' \rightarrow (k' - ik'')^2 + \frac{i}{a}(k' - ik'') - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$

Copyrighted material

Soit $\begin{cases} - \text{ termes complexes : } 2k'k'' - \dfrac{k'}{a} = 0 \quad (9) \\ - \text{ termes réels : } k'^2 = k''^2 - \dfrac{1}{a}k'' + \dfrac{\omega^2}{c^2} \quad (10) \end{cases}$

• *1er cas : k' réel non nul*

Ce qui impose $k'' = \dfrac{1}{2a}$ (d'après (9)), et $k'^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{1}{4a^2}$ (d'après (10)).

Cette configuration n'est envisageable que pour $\omega > \dfrac{c}{2a}$.

• *2e cas : $k' = 0$* $\left(\omega < \dfrac{c}{2a}\right)$.

Il en résulte que $k''^2 - \dfrac{k''}{a} + \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$, et il existe deux valeurs réelles et positives de k'' vérifiant cette équation (k''_1 et k''_2). Dès lors :

$$e^{i(\omega t - kx)} = e^{i(\omega t + ik''x)} = e^{-k''x} \cdot e^{i\omega t}$$

il n'y a plus de propagation possible.

En conclusion :

■ Le système est caractérisé par une pulsation de coupure $\omega_c = \dfrac{c}{2a}$.

■ Il laisse passer les pulsations $\omega > \omega_c$ (il s'agit donc d'un filtre passe haut).

■ Le « nombre d'onde » k présente une partie imaginaire liée à $k'' = \dfrac{1}{2a}$; ainsi pour une onde progressive ($\omega > \omega_c$) se déplaçant dans le sens positif de l'axe des x on aurait :

$$p(x, t) = p_0 e^{-\frac{x}{2a}} e^{i(\omega t - k'x)}.$$

Et la puissance acoustique moyenne traversant une section S est proportionnelle à la surface $S(x)$ de cette section et à la valeur moyenne de $p^2(x, t)$, soit :

$$\langle \mathcal{P}(x) \rangle = KS(x)e^{-\frac{x}{a}} = KS_0.$$

Le terme en $e^{-\frac{x}{2a}}$ traduit un affaiblissement de l'onde dû au fait que l'énergie doit s'étaler sur une surface plus grande quand x croit.

■ La vitesse de phase peut être définie à partir de k'. On a :

$$e^{i(\omega t - k'x)} = e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)} \text{ d'où } v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

k' dépendant de ω sous une forme non linéaire, il y aura dispersion $\left(k'^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}\right)$.

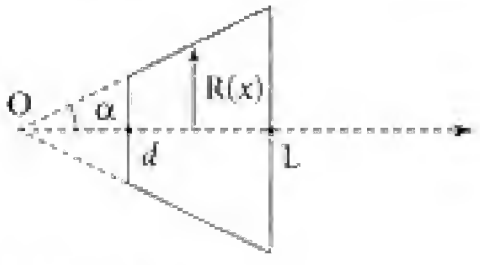
■ Pour ω suffisamment grand (devant ω_c) k' est peu différent de $\dfrac{\omega}{c}$, et de pavillon exponentiel peut assurer l'adaptation d'impédance acoustique entre deux tuyaux de sections S_0 et $S_1 > S_0$ (utilisations dans les haut-parleurs…). On a un système analogue

Copyrighted material

en électromagnétisme lorsque l'on veut passer d'un milieu transparent (n_0) à un autre milieu transparent (n_1) : il faut adapter l'impédance → utilisation d'un système multicouches entre les deux milieux, ou mieux d'une lame à gradient d'indice…

3. a. La section $S(x)$ du tuyau conique est donnée par :

$$S(x) = \pi R^2(x) = \pi(x\tan\alpha)^2 = \pi\tan^2\alpha \cdot x^2.$$



On a donc $\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx} = \dfrac{2}{x}$ $(d \leqslant x \leqslant L)$.

L'équation de propagation (8) de l'onde acoustique s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

soit encore : $x\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(xp)$.

Il suffit alors de remarquer que $x\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(xp)$, d'où :

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(xp) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xp)} \quad (11)$$

La fonction $xp(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert et admet donc en régime sinusoïdal de pulsation ω la solution :

$$\underline{p}(x, t) = \underbrace{\frac{\underline{a}}{x}\exp j(\omega t - kx)}_{\text{onde progressive}} + \underbrace{\frac{\underline{b}}{x}\exp j(\omega t + kx)}_{\text{onde régressive}} \quad (12) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}.$$

Commentaire

La variation de l'amplitude en $\dfrac{1}{x}$ était prévisible, ainsi la puissance acoustique moyenne transportée par une OPPH est proportionnelle à $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 \times S(x)$, quantité qui ne dépend pas de x comme il se doit.

■ La vitesse acoustique se déduit de l'équation $\rho_0\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$, soit

$$\rho_0 j\omega\,\underline{v} = -\left(-\frac{1}{x^2} - j\frac{k}{x}\right)\underline{a}e^{j(\omega t - kx)} - \left(-\frac{1}{x^2} + j\frac{k}{x}\right)\underline{b}\exp j(\omega t + kx).$$

$$\text{et } \underline{v} = \frac{j}{\rho_0\omega}\left\{\frac{1}{x}\left(-jk - \frac{1}{x}\right)\underline{a}\exp j(\omega t - kx) + \frac{1}{x}\left(jk - \frac{1}{x}\right)\underline{b}\exp j(\omega t - kx)\right\} \quad (13)$$

b. On définit l'impédance acoustique selon $\underline{Z}(x) = \dfrac{\underline{p}(x, t)}{\underline{v}(x, t)}$.

Le tuyau est ouvert en $x = L$ (on admet – en première approximation – que $p(L, t) = 0$, et donc $\underline{Z}(L) = 0$). On a alors (*cf.* (12)) :

$$\underline{a}\exp(-jkL) + \underline{b}\exp(jkL) = 0$$

Copyrighted material

d'où : $$\underline{Z}(d) = \frac{d\cdot[\underline{a}\exp(-jkd)+\underline{b}\exp(jkd)]}{\underline{a}(1+jkd)\exp(-jkd)+\underline{b}(1-jkd)\exp(+jkd)}j\rho_0\omega$$

soit encore : $$\underline{Z}(d) = j\rho_0\omega d\frac{\exp(+jk(L-d))-\exp(-jk(L-d))}{(1+jkd)\exp(jk(L-d))-(1-jkd)\exp(-jk(L-d))}$$

et : $$\underline{Z}(d) = j\rho_0\omega d\frac{2j\sin k(L-d)}{2j\sin k(L-d)+jkd2\cos k(L-d)}.$$

Finalement : $$\boxed{\underline{Z}(d) = j\rho_0 c\frac{kd\sin k(L-d)}{\sin k(L-d)+kd\cos(L-d)}} \quad (14)\ k = \frac{\omega}{c}$$

– on impose à l'embouchure $x = L$ du tuyau une impédance nulle $\underline{Z}(d) = 0$. Les fréquences de résonance sont alors fixées par (*cf.* (14)) :

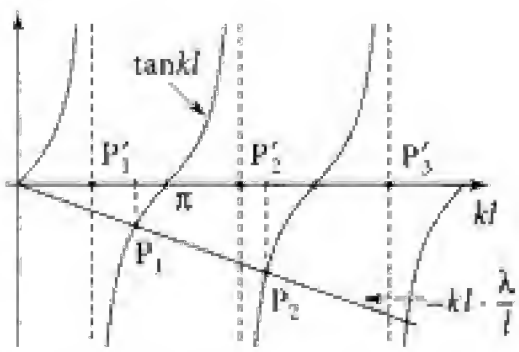
$$\sin k(L-d) = 0 \rightarrow k(L-d) = n\pi \rightarrow \frac{2\pi\nu_n}{c}(L-d) = n\pi$$

d'où : $\nu_n = \frac{c}{L-d}\cdot n$ ($\nu_n = n\nu_1$ où $\nu_1 = \frac{c}{L-d}$) ; on obtient le même résultat que pour un tuyau cylindrique (par exemple tuyau de flûte) de même longueur $L-d$: le spectre du son est harmonique.

– Pour $\underline{Z}(d) \rightarrow \infty$ les fréquences propres sont données par (*cf.* (14)) :

$$kd = -\tan k(L-d) \rightarrow \tan kl = -kl\cdot\frac{d}{l}\ (l = \text{longueur du tuyau})$$

Les fréquences propres d'un tel tuyau conique correspondent aux points $P_1, P_2\ldots$ Celles d'un tuyau cylindrique avec des conditions aux limites de même nature (cas de la clarinette : nœud de vitesse en entrée et nœud de pression en sortie) sont définie par :



$$l = \frac{\lambda}{4}+p\frac{\lambda}{2} \rightarrow kl = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}(2p+1) = \frac{\pi}{2}(2p+1)\quad (\text{points } (P'_1, P'_2, \ldots)$$

Les fréquences propres du tuyau conique à « embouchure du type clarinette » sont donc différentes de celles du tuyau à section constante. Ces différences sont d'autant plus marquées que les fréquences propres sont basses (p petit…)…

Copyrighted material

207 Tuyau déformable

Un tuyau cylindrique à section circulaire de diamètre ϕ et d'épaisseur e ($e \ll \phi$) contient un fluide de masse volumique ρ_0 et de coefficient de compressibilité adiabatique χ_0.

En l'absence d'onde dans le fluide la pression est P_0 à l'intérieur et à l'extérieur du tuyau dont le diamètre est ϕ_0.

Lorsqu'une onde se propage dans le fluide elle induit localement une variation de pression δP qui provoque une variation $\delta\phi$ du diamètre du tuyau selon la loi :

$$\frac{\delta S}{S_0} = \frac{\phi_0}{eE}\delta P \quad \left(S_0 = \frac{\pi\phi_0^2}{4}\right).$$

S est la section du tuyau, et E un coefficient traduisant la rigidité du matériau.

On cherche à déterminer la célérité c de propagation de l'onde acoustique dans le fluide qui tient compte des déformations du tuyau.

À cet effet on envisage la propagation d'un front d'onde (*cf.* dessin). On suppose que :

$\frac{\delta P}{P_0}$, $\frac{\delta S}{S_0}$, $\frac{\delta\rho}{\rho_0}$ et $\frac{v}{c}$ infiniments petits de premier ordre.

On se placera dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au front d'onde, on considérera que l'écoulement y est stationnaire.

1. En effectuant un bilan de masse, établir une première relation entre $\frac{v}{c}$, $\frac{\delta\rho}{\rho_0}$ et $\frac{\delta S}{S_0}$.

2. Faire un bilan de quantité de mouvement et relier v à δP, c et ρ_0.

3. En déduire la célérité c du front d'onde en fonction de ϕ_0, eE, χ_0 et c_0 célérité classique des ondes acoustiques dans le fluide dans le cas où ϕ serait constant. Commenter.

A.N. : Eau : $\chi_0 \approx 5 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1} ; $\rho_0 \approx 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}

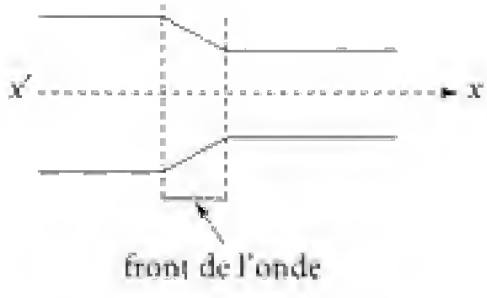
Tuyau : $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ N $\cdot$ m^{-2} ; $e = 1$ mm ; $\phi_0 = 10$ cm et $P_0 = 10^5$ bar.

Solution

1. Considérons une perturbation se propageant dans le tuyau dans le sens de l'axe des x.

Juste en amont du front de l'onde les conditions sont :

$$\begin{cases} P = P_0 + \delta P\,; & v = \text{vitesse du fluide} \\ S = S_0 + \delta S\,; & \rho = \rho_0 + \delta\rho \end{cases}$$



Reproduction interdite du matériel

L'onde étudiée correspond à une discontinuité. Elle permet cependant d'obtenir la célérité des ondes se propageant dans le cadre de la théorie linéaire lorsque les variations envisagées (δP, δS, $\delta\rho$) restent suffisamment petites.

Il nous faut maintenant relier les grandeurs δP, δS, $\delta\rho$, c et v. Plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$ – lié au front d'onde – où le régime est stationnaire.

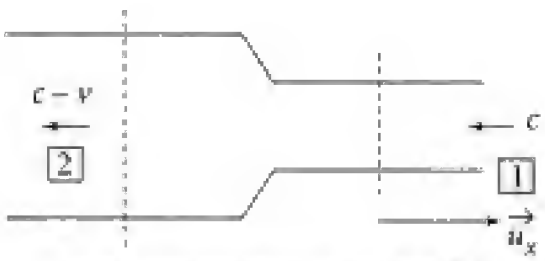
■ Bilan de masse

En aval le fluide se déplace à la vitesse :

$$\overrightarrow{V_1'} = -c\,\vec{u}_x.$$

En amont sa vitesse est :

$$\overrightarrow{V_2'} = -(c-v)\,\vec{u}_x.$$



« schématiquement » dans $\mathcal{R}'$

La conservation de la masse dans $\mathcal{R}'$ se traduit donc par la relation :

$$\rho_1 S_1 c = \rho_2 S_2 (c-v).$$

Or $\rho_1 = \rho_0$, $\rho_2 = \rho_0 + \delta\rho$

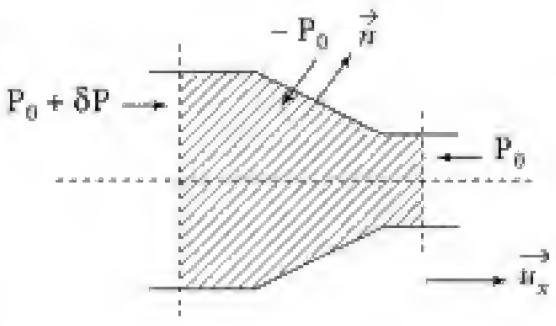
$S_1 = S_0$ et $S_2 = S_0 + \delta S$.

D'où : $$\boxed{\rho_0 S_0 c = (\rho_0 + \delta\rho)(S_0 + \delta S)(c-v)} \quad (1)$$

Linéarisons cette équation : $c - v = c\dfrac{\rho_0}{\rho_0 + \delta\rho}\cdot\dfrac{S_0}{S_0 + \delta S} \rightarrow c - v = c\left(1 - \dfrac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\left(1 - \dfrac{\delta S}{S_0}\right)$

soit $$\boxed{v = c\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{\delta S}{S_0}\right)} \quad (2)$$

2. Considérons le système particulaire hachuré sur le dessin ci-contre. Le régime étant stationnaire, la variation de quantité de mouvement s'écrit :



$$d\mathcal{P} = D_m[-(c-v)\vec{u}_x - (-c\vec{u}_x)]\,dt$$

$$d\mathcal{P} = D_m\,dt\,v\,\vec{u}_x$$

D'où : $\dfrac{d\mathcal{P}}{dt} = \rho_0 S_0\, c\, v\,\vec{u}_x$ $(D_m = \rho_0 S_0 c)$

Le théorème de la quantité de mouvement donne en projection sur $\vec{e}_x$:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = (P_0 + \delta P)(S_0 + \delta S) - P_0 S_0 + \underbrace{\left\{\iint(-P\vec{n})\delta\Sigma\right\}\cdot\vec{u}_x}_{\delta F_x}.$$

Copyrighted material

L'intégrale représente l'action du tuyau sur le fluide dans la zone de contraction.

Or $\delta F = \int -P(\delta l 2\pi R)\cos\alpha$.

Et $\delta l\cos\alpha = dR \rightarrow \delta F_x = \int -P2\pi R\,dR$.

Les variations du rayon de la conduite étant un effet du premier ordre on peut confondre P avec P_0 dans l'expression précédente. Soit :

$$\delta F_x \# -P_0\int 2\pi R\,dR \# -P_0 2\pi R_0\delta R.$$

Or $S - S_0 = \delta S \# 2\pi R_0\delta R \rightarrow \delta F_x = -P_0\delta S$.

Le bilan de quantité de mouvement devient :

$$\rho_0 S_0 cv = (P_0 + \delta P)(S_0 + \delta S) - P_0 S_0 - P_0\delta S.$$

La cohérence impose de ne garder dans cette équation que des termes du premier ordre, d'où :

$$\rho_0 S_0 cv = P_0 S_0 + P_0\delta S + S_0\delta P - P_0 S_0 - P_0\delta S.$$

soit $$\boxed{\rho_0 S_0 cv = S_0\delta P} \quad (3)$$

3. Il reste à utiliser les lois de déformation :

– du tuyau : $\dfrac{1}{S_0}\dfrac{\delta S}{\delta P} = \dfrac{\Phi_0}{eE}$ (4)

– du fluide, en considérant qu'à la limite où δP, δS... tendent vers zéro le « front d'onde » s'accompagne de transformations adiabatiques réversibles et donc isentropiques du fluide :

$$\delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s \delta P \rightarrow \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s \delta P \# \chi_0\delta P.$$

Soit en faisant intervenir la célérité $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_0}}$ associée à la propagation des ondes dans le milieu fluide « infini » :

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \chi_0\rho_0\left(\frac{\delta P}{\rho_0}\right) = \frac{1}{c_0^2}\frac{\delta P}{\rho_0} \quad (5)$$

■ Les équations (2), (3), (4) et (5) relient les quantités c, δP, δS, $\delta\rho$ et v. Elles permettent donc d'en déduire l'expression de la célérité c.

D'après (2), (4) et (5) nous avons :

$$v = c\left[\frac{1}{c_0^2}\frac{\delta P}{\rho_0} + \frac{\Phi_0}{eE}\delta P\right] = \frac{c}{c_0^2}\frac{\delta P}{\rho_0}\left[1 + \frac{\Phi_0}{eE}\cdot\frac{1}{\chi_0}\right]$$

(on a utilisé la propriété $c_0^2\rho_0\chi_0 = 1$).

Or (3) implique :

$$v = \frac{1}{c}\frac{\delta P}{\rho_0}.$$

Copyrighted material

Soit en éliminant v et $\frac{\delta P}{\rho_0}$ entre ces deux dernières équations :

$$\frac{1}{c} = \frac{c}{c_0^2}\left[1 + \frac{\Phi_0}{eE\chi_0}\right] \Rightarrow \boxed{c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{\Phi_0}{eE\chi_0}}}}$$

Commentaire

■ On retrouve bien que $c = c_0$ pour un tuyau complètement rigide ($E \to \infty$).

■ D'autre part la déformation du tuyau a pour incidence de diminuer la célérité des ondes. Pour un matériau « parfaitement déformable » ($E \to 0$) les ondes ne pourraient plus se propager.

■ L'effet de déformation du tuyau est évidemment d'autant moins important que la compressibilité du fluide est élevée.

■ Dans le cas d'un instrument à vent en métal (laiton), on pourra négliger les déformations des parois de l'instrument ($\frac{\Phi_0}{eE} \sim 3 \cdot 10^{-10}\ m^2 \cdot N^{-1}$ et $\chi_0(\text{air}) \sim 9 \cdot 10^{-6}\ m^2 \cdot N^{-1} \to \frac{\Phi_0}{eE\chi_0} \sim 10^{-5} \ll 1$ et $c \sim c_0 \ldots$).

Calculons d'abord la quantité $\frac{\Phi_0}{eE}$:

$$\frac{\Phi_0}{eE} = \frac{10^{-1}}{10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ soit } \frac{1}{\chi_0}\frac{\Phi_0}{eE} = 1$$

et : $c \# \frac{c_0}{\sqrt{2}}$; or $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}} = 1{,}41\ km \cdot s^{-1}$

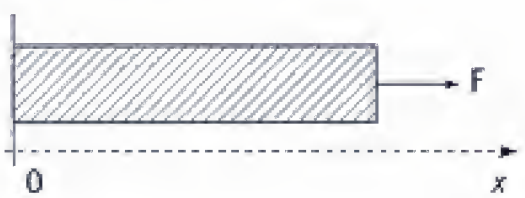
soit : $c = 1{,}00\ km \cdot s^{-1}$.

Négliger la dilatation du tuyau aurait conduit à une erreur de 40 % !

D'autre part pour les gaz χ_0 est de l'ordre de 10^{-5} ($\chi_0 = \frac{1}{\gamma P_0}$ pour un gaz parfait) et $c \# c_0$ à 10^{-4} près.

208 Ondes acoustiques dans un solide

On cherche à déterminer la célérité des ondes acoustiques dans un solide déformable de masse volumique ρ.



Copyrighted material

Dans le domaine d'élasticité quand on tire sur une éprouvette de matériau de section S avec une force F elle s'allonge de ΔL avec :

$$\frac{1}{SE} = \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{F}$$ E est appelé module d'Young.

Au repos une section S est repérée par son abscisse x, et on désigne par $y(x, t)$ le déplacement provoqué par l'onde.

1. Afin de déterminer l'équation de propagation on modélise le système par un ensemble de masses ponctuelles (m) et de ressort sans masse (k, l_0).

Montrer à partir de ce modèle, que la partie $x > x_0$ du matériau exerce sur la partie $x < x_0$ une force $\vec{F} = SE\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)\vec{u}_y$.

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $y(x, t)$ ainsi que la célérité c des ondes.

AN : calculer c pour $E = 2 \cdot 10^{11}\ N \cdot m^{-2}$ et $\rho = 8 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$.

3. Une OPPH acoustique, de fréquence $\nu = 1$ kHz, transportant une intensité $I = 10^5\ W \cdot m^{-2}$, traverse le matériau étudié à la question précédente.

Donner l'expression et la valeur de l'amplitude des vibrations induites par cette onde.

Solution

1. ■ Le solide est modélisé par une chaîne constituée d'une succession masses m, ressorts (k, l_0) sans masse.

avec ici $Nm = \rho SL$ (même masse totale)

$Nl_0 = L$ (même longueur en l'absence de contrainte)

De plus si on tire sur l'extrémité droite avec une force F chaque ressort verra sa longueur varier de $\Delta l = \frac{\Delta L}{N}$ (à l'équilibre la masse A_n est immobile et la somme des forces qui lui sont appliquées doit être nulle, ce qui implique le même allongement des ressorts). On a donc :

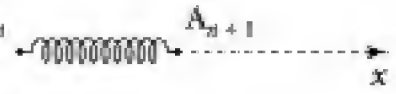
$F = k\Delta l = K\Delta L$ avec par définition $\begin{cases} F = SE\frac{\Delta L}{L} \\ (K = \frac{k}{N} \text{ associations de ressorts en série}) \end{cases}$

D'où par identification : $k = \frac{NSE}{L}$.

Copyrighted material

■ Intéressons-nous maintenant à l'action, sur la masse A_n, de la partie du système située au-delà de A_n.

On a alors : $\vec{F} = k(y_{n+1} - y_n)\vec{u_x}$.



Soit encore : $\vec{F} = k\{y[(n+1)l_0, t] - y[nl_0, t]\}\vec{u_x}$.

Or on passe du modèle discret au système réel en faisant tendre N vers l'infini, ou encore l_0 vers zéro. On peut donc développer le terme entre accolades :

$$y[(n+1)l_0, t] \# y[nl_0, t] + l_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{nl_0} + \cdots$$

D'où $\vec{F} = kl_0\frac{\partial y}{\partial x}\vec{u_x}$.

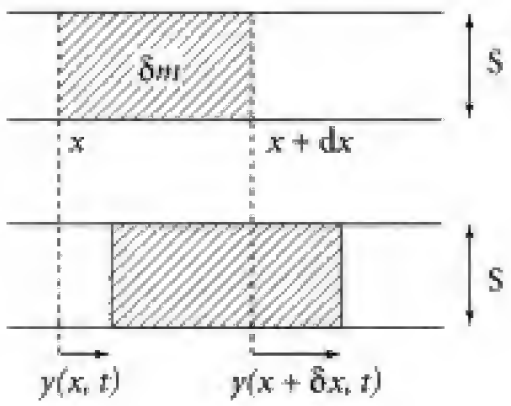
En remplaçant k et l_0 par leurs valeurs en fonction des caractéristiques du système réel :

$$\vec{F} = \frac{NSE}{L}\frac{L}{N}\frac{\partial y}{\partial x}\vec{u_x} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = SE\frac{\partial y}{\partial x}\vec{u_x}} \quad (1)$$

2. On peut alors établir l'équation de propagation des ondes susceptibles de se propager le long du barreau.

Considérons un élément de longueur initiale δx. l'équation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\delta m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(x + \delta x, t) - F(x, t).$$



Soit (δx infiniment petit et section invariable à l'ordre considéré) :

$$\rho S\delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x = SE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

C'est une équation de propagation de d'Alembert. La célérité des ondes est :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

A. N. : $c = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}}$ soit $c = 5 \cdot 10^3\ m \cdot s^{-1}$.

3. L'OPPH acoustique traversant le matériau est de la forme :

$$y = y_0\cos(\omega t - kx) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Copyrighted material

La force exercée par la partie $x < x_0$ sur la partie $x > x_0$ est donnée (*cf.* (1)), pour une section S, par :

$$\vec{F} = -SE\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)\vec{u}_x.$$

Cette force développe une puissance instantanée :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -SE\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)\frac{\partial y}{\partial t}(x_0, t).$$

Soit encore :

$$\mathcal{P} = -SE \cdot [ky_0\sin(\omega t - kx_0)] \cdot [-\omega y_0\sin(\omega t - kx_0)].$$

D'où

$$P = SE\frac{\omega^2}{c}y_0^2\sin^2(\omega t - kx_0).$$

Il en résulte une puissance moyenne par unité de surface, encore appelée intensité I, telle que :

$$I = \frac{\langle\mathcal{P}\rangle}{S} = E\frac{\omega^2}{c}\langle\sin^2(\omega t - kx_0)\rangle y_0^2.$$

Or $\langle\sin^2(\omega t - kx_0)\rangle = \frac{1}{2}$, d'où

$$I = \frac{E\omega^2}{2c}y_0^2 \rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{2Ic}{E\omega^2}}.$$

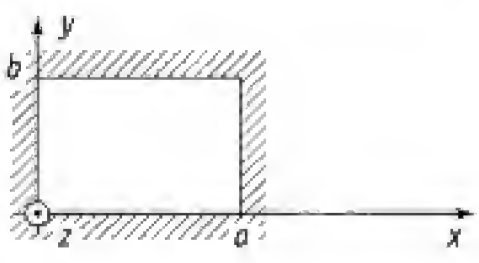
Soit avec les valeurs proposées :

$$y_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 \times 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{11} \times (2\pi 10^3)^2}} \quad \text{et} \quad y = 11\ \mu\text{m}.$$

209 Ondes dans un tuyau à section rectangulaire

Un tuyau sonore a la forme d'un conduit de section rectangulaire $(a \times b)$ à parois rigides.

On cherche à y propager des ondes selon $z'z$.



$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_0}}$ désigne la célérité des ondes acoustiques dans l'air (sans limites).

On envisage pour la surpression p une solution sinusoïdale dans le temps (de pulsation ω) de la forme, en notation complexe :

$$\underline{p} = X(x)Y(y)Z(z)\exp(j\omega t).$$

Copyrighted material

1. Déterminer les fonctions $X(x)$ et $Y(y)$. On montrera que chaque couple possible (X, Y) est associé à la donnée de deux entiers positifs ou nuls (n, m).

2. En déduire que $Z(z)$ peut s'écrire :

$$Z(z) = \underline{A}_{n,m} e^{-jkz} + \underline{B}_{n,m} e^{-jkz}.$$

Commenter.

À quelle condition le mode (n, m) peut-il se propager le long du tuyau ?

Donner dans ce cas la relation de dispersion liant k à ω. Qu'en est-il si la condition précédente n'est pas réalisée ?

3. a. On suppose maintenant que $a = b = L$. Tracer les courbes $c_0 k \to \omega$ pour les différents modes tels que : $0 \leqslant n + m \leqslant 2$. On posera $\omega_c' = \dfrac{c_0 \pi}{L}$.

b. Pour quelles fréquences seul le mode $(0, 0)$ peut se propager ? Caractériser l'onde correspondante. Pour les instruments à vent, on peut prendre L de l'ordre du centimètre.

Calculer f_c' (on prendra $c_0 = 340\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). Commenter.

Solution

1. ■ La surpression $p(x, y, z, t)$ doit satisfaire à l'équation de propagation de d'Alembert, c'est-à-dire :

$$\Delta p = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Soit pour une onde harmonique en $\exp(j\omega t)$:

$$\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\underline{p} = 0.$$

Cherchons une solution de la forme $\underline{p} = X(x)Y(y)Z(z)\exp(j\omega t)$, d'où :

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{F(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{G(y)} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{H(z)} + \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0.$$

Il en résulte que les fonctions F, G et H sont des constantes.

Posons alors $\dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2$ (ainsi $X(x)$ est une fonction sinusoïdale de x qui permettra d'assurer les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$), soit :

$$X(x) = \underline{A}_1 \sin\alpha x + \underline{B}_1 \cos\alpha x \quad (1)$$

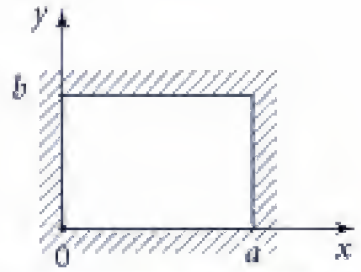
De même, on aura : $\dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2$ et $Y(y) = \underline{A}_2 \sin\beta y + \underline{B}_2 \cos\beta y$ (2)

Dès lors : $\dfrac{d^2Z}{dz^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2 - \beta^2\right)Z(z) = 0$ (3)

Copyrighted material

■ Il reste à traduire les conditions aux limites :

la composante normale aux parois de la vitesse doit être nulle, à savoir :



$$\begin{cases} v_x(0, y, z, t) = v_x(a, y, z, t) = 0 \quad (4) \\ v_y(x, 0, z, t) = v_y(x, b, z, t) = 0 \quad (5) \end{cases}$$

Il est alors nécessaire de relier le champ des vitesses à celui de la surpression. L'équation d'Euler linéarisée donne :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \quad (6) \quad (p = P - P_0)$$

d'où en notation complexe : $\rho_0 j\omega \vec{\underline{v}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \underline{p}$.

Ainsi annuler v_x (respectivement v_y) revient à annuler $\frac{\partial p}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial p}{\partial y}$), soit :

$$(4) \Rightarrow \alpha(\underline{A}_1 \cos\alpha x - \underline{B}_1 \sin\alpha x)\Big)_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0 \rightarrow \begin{cases} \underline{A}_1 = 0 \\ \sin(a\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = n\frac{\pi}{a} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$(5) \Rightarrow \beta(\underline{A}_2 \cos\beta y - \underline{B}_2 \sin\beta y)\Big)_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0 \rightarrow \begin{cases} \underline{A}_2 = 0 \\ \sin(\beta b) = 0 \rightarrow \beta = m\frac{\pi}{b} \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Finalement $\boxed{X(x)Y(y) = \underline{c} \cos\left(n\pi\frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(m\pi\frac{y}{b}\right)}$ (7)

et $$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)Z = 0 \quad (8)$$

2. Posons $\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2} = k^2$ k réel positif pour $k^2 \geqslant 0$; $k = -jK$ où K est un réel positif pour $k^2 < 0$.

L'intégration de (8) donne alors : $Z(z) = \underline{A}_3 \exp(-jkz) + \underline{B}_3 \exp(-jkz)$. D'où la solution (9) :

$$\boxed{\underline{p}_{n,m}(x, y, z, t) = \cos\left(n\pi\frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(m\pi\frac{y}{b}\right)\{\underline{A}_{n,m} \exp j(\omega t - kz) + \underline{B}_{n,m} \exp j(\omega t - kz)\}}$$

trois cas sont à considérer :

– si $\frac{\omega^2}{c^2} > \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$: dès lors $k^2 > 0$, et k est un réel positif ; la propagation selon Oz est possible avec un « vecteur d'onde » $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ réel (avec $k < \frac{\omega}{c}$).

Copyrighted material

La relation de dispersion est :

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 + c_0^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \rightarrow c_0^2 k^2 = \omega^2 - c_0^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right).$$

Pour qu'un tel mode (n, m) puisse être excité dans le guide d'ondes sonores, il est nécessaire que la pulsation soit supérieure à une valeur seuil :

$$\omega > c_0 \pi \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ soit } \omega > \omega_c)_{n,m} = c_0 \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}.$$

Dans ce cas, l'onde (9) est stationnaire dans les directions Ox et Oy et progressive dans le sens positif de l'axe des z (resp. dans le sens négatif) pour le terme associé à $\underline{A}_{n,m}$ (resp. à $\underline{B}_{n,m}$).

Chacune de ces deux ondes n'est donc pas plane.

– si $\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$: cette onde est simplement stationnaire en x et y, et ne dépend pas de z.

– si $\frac{\omega^2}{c^2} < \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$: dans ce cas, on a $k^2 < 0$ et on peut poser $k = -\mathrm{j}K$,

soit $\underline{p}_{n,m} = \cos\left(n\pi \frac{x}{a} \right) \cos\left(m\pi \frac{y}{b} \right) \{ \underline{A}_{n,m} \exp(-Kz) + \underline{B}_{n,m} \exp(+Kz) \} e^{j\omega t}$.

Il s'agit d'ondes évanescentes.

3. a. On suppose maintenant que $a = b = L$. Les pulsations de coupure associées à chaque mode deviennent :

$$\omega_c)_{n,m} = \frac{\pi c_0}{L} \sqrt{n^2 + m^2}.$$

Pour un mode (n, m) donné la relation de dispersion est :

$$c_0^2 k^2 = \omega^2 - \frac{c_0^2 \pi^2}{L^2} (n^2 + m^2).$$

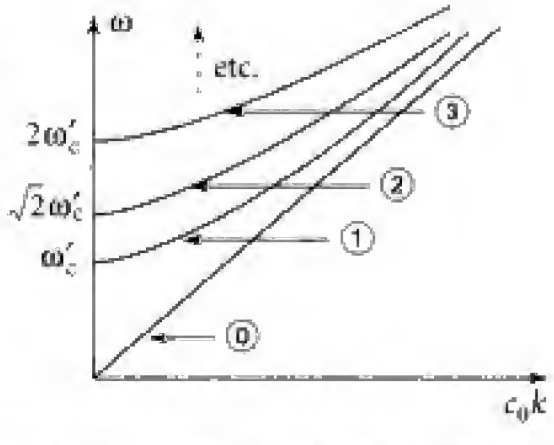
Posons $\omega_c' = \frac{c_0 \pi}{L}$ et traçons les courbes $c_0 k \rightarrow \omega$ pour chaque mode (n, m). Ainsi :

⓪ $\Leftrightarrow n = 0$ et $m = 0 \rightarrow \omega = c_0 k$

① $\Leftrightarrow (n, m) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$

② $\Leftrightarrow (n, m) = (1, 1)$

③ $\Leftrightarrow (n, m) = (2, 0)$ ou $(0, 2)$; etc.



b. Les modes $n \cdot m \neq 0$ sont appelés « modes transverses » (v_x, v_y non tous deux nuls).

Ils correspondent à des fréquences supérieures à $\frac{\omega_c'}{2\pi} = f_c' = \frac{c_0}{2L}$.

Copyrighted material

Ainsi pour $f < f_c'$ seul le mode (0, 0) peut se propager. On a alors :

$$\underline{p}_{0,0} = \underline{A}_{0,0}\exp(-jkz) + \underline{B}_{0,0}\exp(-jkz)$$

et d'après (6) : $\underline{\vec{v}}_{0,0} = \dfrac{j}{\rho_0\omega}\dfrac{\partial \underline{p}}{\partial z}\vec{u}_z$.

Il s'agit d'une onde acoustique longitudinale.

Pour un tuyau source de dimensions transversales de l'ordre du centimètre il vient :

$$f_c' = \frac{c}{2L} = \frac{340}{2\cdot 10^{-2}} \Rightarrow f_c' = 17\ \text{kHz}.$$

Cette fréquence se situe en limite haute du spectre audible ; Ainsi le son émis par les tuyaux sonores des instruments à vent restera harmonique, les fréquences sonores perceptibles correspondant au mode longitudinal pour lequel $k = \dfrac{\omega}{c_0}$ $(n = m = 0)$: les conditions aux extrémités imposeront $\Delta k = \dfrac{\pi}{L}\left(L = n'\dfrac{\lambda}{2}\ \text{ou}\ L = (2n'+1)\dfrac{\lambda}{2}\right)$ soit $\Delta\omega = \dfrac{\pi c_0}{L}$, et les différentes fréquences émises seront régulièrement espacées (ce qui ne serait pas le cas pour les modes transverses – relation non linéaire entre ω et k...).

Copyrighted material

Copyrighted material

chapitre

3

Ondes Électromagnétiques

301 Interférences

Deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement se propagent, dans le vide, dans le même sens (vecteur unitaire $\vec{u}$).

À l'endroit où on se trouve, le champ électrique de la première s'écrit $\vec{E}_1 \cos(\omega_1 t)$ et celui de la seconde $\vec{E}_2 \cos(\omega_2 t + \theta)$.

(ω_1 et ω_2 sont positifs).

1. Calculer les valeurs moyennes $\vec{\phi}_1$ et $\vec{\phi}_2$ des vecteurs de Poynting de chaque onde.

2. Calculer la valeur moyenne $\vec{\phi}$ du vecteur de Poynting de l'onde résultante.

Quand a-t-on : $\vec{\phi} \neq \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2$?

De quel phénomène s'agit-il ?

1. Ce qu'il faut savoir

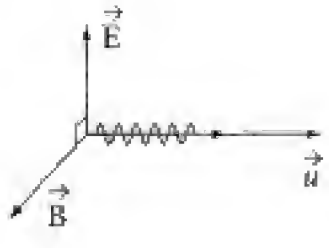
- Ondes planes progressives monochromatiques.
- Vecteur de Poynting - Interférences.

2. Ce qu'il faut comprendre

On remarquera que la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à la superposition des deux ondes ne se réduit pas nécessairement à la somme des valeurs moyennes des vecteurs de Poynting de chaque onde. Il faut tout d'abord calculer les champs résultants $\vec{E}_T$ et $\vec{B}_T$.

3. Solution

1. Le vecteur de Poynting $\vec{P}$ d'une onde progressive s'écrit :



$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{\mu_0 c} \right) = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c} \vec{E}^2$$

(car $\vec{u}$ et $\vec{E}$ sont perpendiculaires)

soit : $\vec{P}_1 = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c} E_1^2 \cos^2(\omega_1 t)$ et $\vec{P}_2 = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c} E_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta)$

et les valeurs moyennes (dans le temps) sont données par les relations :

$$\boxed{\vec{\phi}_1 = \frac{\vec{u}}{2\mu_0 c} E_1^2 \quad \text{et} \quad \vec{\phi}_2 = \frac{\vec{u}}{2\mu_0 c} E_2^2}$$

$\left(\vec{\phi}_k = \langle \vec{P}_k \rangle = \frac{1}{T_k} \int_{t_0}^{t_0 + T_k} \vec{P}_k(t)\,dt \text{, de plus } \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2} \right)$.

Copyrighted material

2. Effectuons les mêmes calculs sur l'onde résultante :

$$\vec{P} = \vec{E_T} \wedge \frac{\vec{B_T}}{\mu_0} \quad \text{avec} \quad \vec{E_T} = \vec{E_1}\cos(\omega_1 t) + \vec{E_2}\cos(\omega_2 t + \theta)$$

et $\vec{B_T} = \vec{B_1} + \vec{B_2} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E_1} + \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E_2} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge (\vec{E_1} + \vec{E_2})$.

On a ici $\vec{B_T} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E_T}$ les deux ondes planes progressives se propagent dans le même sens.

D'où $\vec{P} = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}(\vec{E_1}\cos(\omega_1 t) + \vec{E_2}\cos(\omega_2 t + \theta))^2$

et $\vec{P} = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}(E_1^2\cos^2(\omega_1 t) + 2\vec{E_1} \cdot \vec{E_2}\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t + \theta) + E_2^2\cos(\omega_2 t + \theta))$

dont la valeur moyenne est :

$$\vec{\phi} = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}\left[\frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 + 2\vec{E_1} \cdot \vec{E_2} \cdot \langle[\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t + \theta)]\rangle\right]$$

soit $\boxed{\vec{\phi} = \vec{\phi_1} + \vec{\phi_2} + \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}(2\vec{E_1} \cdot \vec{E_2}) \cdot \langle[\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t + \theta)]\rangle}$

Pour pouvoir moyenner, linéarisons le produit des cosinus :

$$\cos\omega_1 t\cos(\omega_2 t + \theta) = \frac{1}{2}\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \theta] + \frac{1}{2}\cos[(\omega_1 - \omega_2)t - \theta]$$

ω_1 et ω_2 étant des grandeurs définies positives (pulsations) le premier cosinus est nécessairement à valeur moyenne nulle. Il en est de même du second pour $\omega_1 \neq \omega_2$. Soit :

$$\langle\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t + \theta)\rangle = 0 \quad \text{pour} \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

$$\langle\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t + \theta)\rangle = \frac{1}{2}\cos\theta \quad \text{pour} \quad \omega_1 = \omega_2.$$

Il est donc nécessaire que les deux ondes aient même pulsation (ou même fréquence), on a alors :

$$\vec{\phi} = \vec{\phi_1} + \vec{\phi_2} + \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}(\vec{E_1} \cdot \vec{E_2})\cos\theta.$$

Il faut aussi que les polarisations des deux ondes ne soient pas orthogonales pour que le produit scalaire $\vec{E_1} \cdot \vec{E_2}$ ne soit pas nul.

Nous venons de retrouver les conditions générales des interférences lumineuses. Notons cependant que l'égalité des pulsations des deux ondes ne suffit pas. Encore faut-il qu'il y ait cohérence, ce que l'on réalisera en utilisant une seule source et en procédant soit par division d'amplitude (exemple du Michelson) soit par division du front d'onde (cas des fentes d'Young)…

Copyrighted material

Commentaire

Dans le cas où les deux ondes ont même polarisation ($\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ parallèles et de même sens), en posant :

$$\vec{\phi_1} = I_1 \vec{u}\ ,\ \vec{\phi_2} = I_2 \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{\phi} = I \vec{u}$$

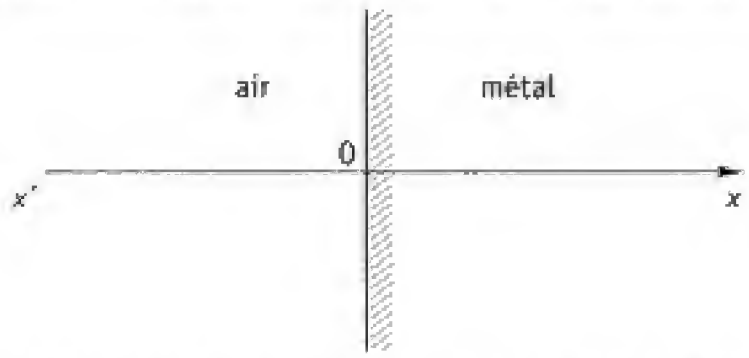
l'expression trouvée plus haut peut s'écrire :

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\theta}$$

qui est la formule habituelle des interférences où θ représente le déphasage entre les deux ondes.

302 Réflexion sur un métal, pression de radiation

Une onde plane progressive sinusoïdale de fréquence f et d'intensité I se propage dans l'air (assimilé au vide). Cette onde arrive sous incidence normale sur un miroir métallique (le plan $x = 0$) et s'y réfléchit selon les lois de Descartes.



1. L'onde incidente présente une polarisation circulaire gauche. Donner l'expression du champ électromagnétique correspondant existant dans l'air ($x < 0$) en notation réelle puis complexe.

2. Le métal est assimilé à un conducteur parfait. Déterminer le champ électromagnétique dans l'air correspondant à l'onde réfléchie ; préciser alors l'état de polarisation de cette onde réfléchie.

3. Trouver l'expression du champ électrique global dans l'air : comment peut-on qualifier ce champ ?

4. La distribution de charges et courants est caractérisée en un point P de la surface $x = 0$ du métal par une densité surfacique de charge $\sigma(P, t)$ et une densité surfacique de courant $\vec{j_s}(P, t)$.

Préciser les expressions de ces deux champs.

5. L'existence de courant sur la surface en présence d'un champ magnétique provoque l'apparition de forces électromagnétiques s'exerçant sur la périphérie du métal. En toute rigueur, dans le cadre de la modélisation adoptée, le champ magnétique n'est pas défini sur la surface. On admettra cependant que, pour le calcul des forces élec-

Copyrighted material

tromagnétiques sur la surface, on peut faire comme si le champ magnétique y était égal à la moyenne du champ magnétique de part et d'autre du plan $x = 0$. Déterminer alors l'expression de la force s'exerçant sur un élément de surface d'aire dS du miroir. Montrer qu'il est possible de définir une pression (dite « pression de radiation ») provoquée par l'existence du rayonnement : exprimer cette pression à l'aide de I et c (célérité du rayonnement dans le vide). Calculer la valeur numérique de cette pression si $I = 3 \cdot 10^5$ W · m^{-2}.

6. On adopte maintenant une modélisation « corpusculaire » du rayonnement en assimilant le rayonnement incident à une assemblée de photons se déplaçant à la vitesse c et ayant chacun une énergie hf (h représentant la constante de Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s) et une quantité de mouvement $\frac{hf}{c}\vec{u}_x$.

a. On note n^* la densité volumique des photons constituant le rayonnement incident : préciser la relation existant entre n^*, I, h, c et f.

b. On modélise la réflexion en considérant que chaque photon incident arrivant sur la paroi métallique subit un choc et possède après ce choc une quantité de mouvement opposée. Déterminer alors la valeur moyenne de la force exercée par les photons sur un élément de surface d'aire dS du miroir : peut-on retrouver l'expression de la pression de radiation ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Ondes électromagnétiques planes dans le vide et dans le conducteur parfait.
- Relations de passage entre le vide et le conducteur parfait.

2. Ce qu'il faut comprendre

- Pour étudier la polarisation circulaire, il faut considérer le point de vue de l'observateur qui reçoit le rayonnement et déterminer le sens de rotation du champ.
- Pour utiliser les relations de passage lorsqu'on ne connait pas la distribution de charges, on ne s'intéresse qu'aux composantes du champ qui ne subissent pas de discontinuité à l'interface.

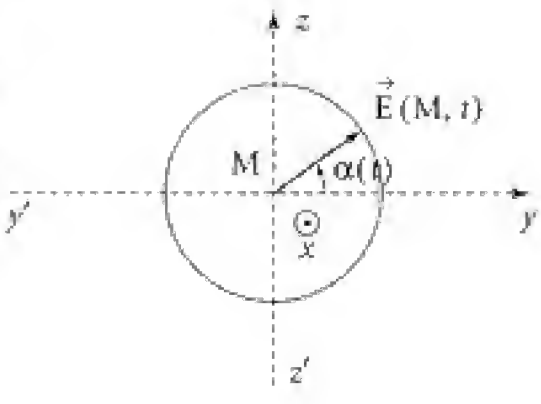
3. Solution

1. Dans le cas d'une polarisation circulaire gauche, l'observateur qui reçoit le rayonnement incident voit tourner le vecteur champ $\vec{E}(M, t)$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :

l'angle $\alpha(t)$ est donc une fonction croissante du temps :

$$\alpha(t) = 2\pi f t - k x$$

(avec $k = \frac{2\pi f}{c}$).



Copyrighted material

D'où une expression réelle du champ correspondant à cette onde incidente :

$$\vec{E}_{\text{incident}} = E_0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(2\pi f t - kx) \\ \sin(2\pi f t - kx) \end{vmatrix}$$

Pour déterminer l'amplitude E_0, on utilise l'intensité I du rayonnement incident :

$$I = \left\langle \left\| \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right\| \right\rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle E^2 \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2} \right) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}.$$

D'où $\boxed{E_0 = \sqrt{\mu_0 c I}}$ (choix de $E_0 > 0$).

De plus, $\vec{B}_{\text{incident}} = \frac{1}{c} (\vec{u}_x \wedge \vec{E}_{\text{incident}})$ (onde plane progressive).

D'où $\boxed{\vec{B}_{\text{incident}} = \frac{E_0}{c} \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin(2\pi f t - kx) \\ \cos(2\pi f t - kx) \end{vmatrix}}$

En notation complexe :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_{\text{incident}} &= E_0 \exp[i(2\pi f t - kx)] \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{vmatrix} \\ \underline{\vec{B}}_{\text{incident}} &= \frac{E_0}{c} \exp[i(2\pi f t - kx)] \begin{vmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned}}$$

2. L'onde réfléchie est une onde plane progressive sinusoïdale se propageant dans le sens négatif de l'axe $x'x$. En notation complexe, le champ électrique correspondant à cette onde s'écrit donc :

$$\underline{\vec{E}}_{\text{réfléchie}} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}'_{0y} \exp[i(2\pi f t + kx)] \\ \underline{E}'_{0z} \exp[i(2\pi f t + kx)] \end{vmatrix}$$

À L'interface, il y a continuité des composantes tangentielles du champ électrique. Donc, en $x = 0^-$, les composantes tangentielles du champ résultant sont nulles (comme dans le métal parfait) :

$$E_0 + \underline{E}'_{0y} = 0 \Rightarrow E'_{0y} = -E_0$$
$$-iE_0 + \underline{E}'_{0z} = 0 \Rightarrow E'_{0z} = iE_0$$

À l'interface, il doit y avoir aussi continuité de composante normale du champ magnétique. Cette continuité est assurée, la composante B_x étant nulle des deux côtés.

Copyrighted material

On en déduit donc le champ électrique correspondant à l'onde réfléchie :

$$\underline{\vec{E}}_{réfléchi} = E_0 \exp[i(2\pi f t + kx)] \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ i \end{vmatrix}$$

et, en notation réelle :

$$\vec{E}_{réfléchi} = E_0 \begin{vmatrix} 0 \\ -\cos(2\pi f t + kx) \\ -\sin(2\pi f t + kx) \end{vmatrix}$$

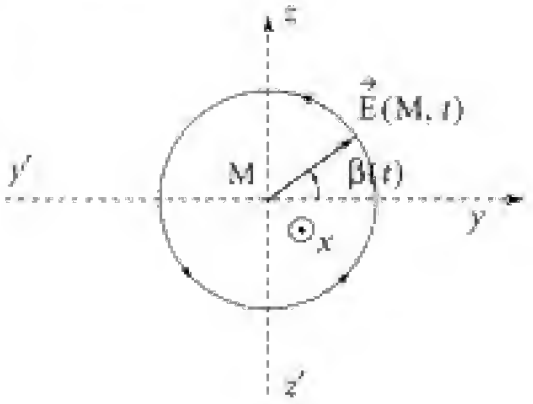
On trouve ensuite le champ magnétique en utilisant $\vec{B}_{réfléchi} = \frac{1}{c}(-\vec{u}_x \wedge \vec{E}_{réfléchi})$. Ce qui donne, en notation réelle :

$$\vec{B}_{réfléchi} = \frac{E_0}{c} \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin(2\pi f t + kx) \\ \cos(2\pi f t + kx) \end{vmatrix}$$

ou, en notation complexe :

$$\underline{\vec{B}}_{réfléchi} = \frac{E_0}{c} \exp[i(2\pi f t + kx)] \begin{vmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{vmatrix}$$

Pour étudier la polarisation de cette onde, on peut déjà noter qu'elle est circulaire car $\left\|\vec{E}_{réfléchi}\right\| = E_0$. Pour savoir si elle est circulaire droite ou gauche, on peut chercher l'angle $\beta(t)$ que fait le vecteur champ avec l'axe $y'y$:



Pour cela, on peut écrire :

$$\vec{E}_{réfléchi} = E_0 \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(2\pi f t + kx + \pi) \\ \sin(2\pi f t + kx + \pi) \end{vmatrix}$$

ce qui montre que $\beta(t) = 2\pi f t + kx + \pi$: il s'agit d'un angle qui est une fonction croissante du temps. Le vecteur $\vec{E}_{réfléchi}$ tourne donc dans le sens positif. Mais il faut adopter le point de vue de l'observateur qui reçoit le rayonnement. Ce rayonnement se propage dans le sens négatif de l'axe $x'x$: donc l'observateur verra le vecteur champ tourner dans le sens des aiguilles d'une montre : il s'agit donc d'une polarisation circulaire droite.

Copyrighted material

3. En notation complexe, le champ électrique résultant est :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_{\text{incident}} + \underline{\vec{E}}_{\text{réfléchi}} = E_0 \exp(i2\pi f t) \left| \begin{array}{l} 0 \\ \exp(-ikx) - \exp(ikx) \\ -i\exp(-ikx) + i\exp(ikx) \end{array} \right. .$$

D'où $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i2\pi f t) \left| \begin{array}{l} 0 \\ -2i\sin kx \\ -2\sin kx \end{array} \right.$

soit $\boxed{\vec{E} = -2E_0 \sin kx \exp(i2\pi f t) \left| \begin{array}{l} 0 \\ i \\ 1 \end{array} \right.}$

En notation réelle $\boxed{\vec{E} = 2E_0 \sin kx \left| \begin{array}{l} 0 \\ \sin(2\pi ft) \\ -\cos(2\pi ft) \end{array} \right.}$

Ce champ peut être qualifié d'onde stationnaire.

4. La relation de passage s'écrit $\vec{E}(0^+, t) - \vec{E}(0^-, t) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$.

Comme $\vec{E}(0^+, t) = \vec{E}(0^-, t) = \vec{0}$, on en déduit $\boxed{\sigma = 0.}$

Pour le champ magnétique, la relation de passage s'écrit :

$\vec{B}(0^+, t) - \vec{B}(0^-, t) = \mu_0(\vec{j}_s \wedge \vec{u}_x) = \mu_0(-j_{sy}\vec{u}_z + j_{sz}\vec{u}_y)$

Ici $\vec{B}(0^+, t) = \vec{0}$ (conducteur parfait)

et $\vec{B}(0^-, t) = \vec{B}_{\text{incident}}(0^-, t) + \vec{B}_{\text{réfléchi}}(0^-, t)$

$$= -2\frac{E_0}{c}\vec{u}_y \sin(2\pi ft) + 2\frac{E_0}{c}\vec{u}_z \cos(2\pi ft)$$

On en déduit donc :

$$-\mu_0 j_{sy} = -2\frac{E_0}{c}\cos(2\pi ft) \quad \text{et} \quad \mu_0 j_{sz} = +2\frac{E_0}{c}\sin(2\pi ft).$$

D'où $\boxed{\vec{j}_s = \dfrac{2E_0}{\mu_0 c}(\vec{u}_y \cos(2\pi ft) + \vec{u}_z \sin(2\pi ft))}$

Il s'agit, ici encore, d'un vecteur de norme constante qui tourne au cours du temps.

5. Avec la modélisation adoptée, la résultante des forces électromagnétiques sur l'élément de surface est :

$$\vec{\delta f} = \frac{1}{2}\vec{j}_s \wedge \vec{B}(0^-, t)\,dS.$$

Copyrighted material

Avec les expressions de $\vec{j}_s$ et $\vec{B}(0^-, t)$ vues précédemment, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta f} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \, dS \, \vec{u}_x}$$

Cette force est analogue à une force de pression $P\vec{n} \, dS$ orientée vers l'intérieur du métal (avec $\vec{n} = \vec{u}_x$).

D'où la pression de radiation : $\boxed{P = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} = \frac{2I}{c}}$

Si $I = 3 \cdot 10^5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, $\boxed{P = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}}$

Il apparaît donc que même avec une intensité relativement forte, cette pression est faible.

6. a. L'intensité I correspond à la puissance moyenne reçue par une surface unité disposée orthogonalement au rayonnement.

Or, le nombre de photons arrivant par unité de temps sur une surface unité disposée orthogonalement est $n^* c$ (il s'agit du nombre de photons se trouvant à l'instant t à l'intérieur d'un cylindre de section d'aire unité, de génératrices parallèles à $x'x$ et de hauteur égale à c).

On a donc $\boxed{I = n^* c \, h f}$

b. La variation de quantité de mouvement d'un photon lors d'un choc est donc :

$$\frac{h f}{c}(-\vec{u}_x) - \frac{h f}{c}\vec{u}_x = -2\frac{h f}{c}\vec{u}_x.$$

Le nombre de photons du rayonnement incident arrivant sur l'élément d'aire dS entre t et $t + dt$ est :

$$n^* c \, dS(dt).$$

Donc, entre t et $t + dt$, la variation de quantité de mouvement des photons constituant le rayonnement incident est :

$$\overrightarrow{dp} = -2n^* h f \, dS dt \, \vec{u}_x.$$

La force moyenne exercée par l'élément d'aire dS sur les photons est donc :

$$\frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = -2n^* h f \, dS \, \vec{u}_x = -2\frac{I}{c} dS \, \vec{u}_x.$$

Ainsi, la force moyenne exercée sur l'élément d'aire dS est : $+2\frac{I}{c} dS \, \vec{u}_x$.

Cette expression permet de retrouver la pression :

$$P = \frac{2I}{c}.$$

Copyrighted material

303 Polarisation rotatoire

Un milieu $(\mathcal{M})$ se caractérise par des vitesses de phase différentes c_G et c_D associées à la propagation d'ondes planes progressives monochromatiques (ω) polarisées circulairement gauche ou droite. On pourra noter :

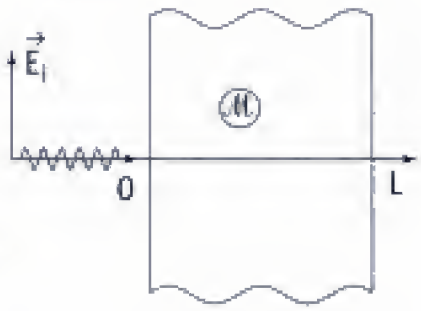
$$c_G(\omega) = \frac{c}{n_G(\omega)} \quad \text{et} \quad c_D(\omega) = \frac{c}{n_D(\omega)}$$

c est la vitesse de la lumière dans le vide.

On envoie, en incidence normale, sur un tel milieu une OPPM(ω) polarisée rectilignement.

Comment ressort-elle après avoir parcouru une distance L dans $\mathcal{M}$?

On ne se préoccupera pas des problèmes associés aux interfaces vides – $\mathcal{M}$.



1. Ce qu'il faut savoir

- Onde plane progressive monochromatique (harmonique).
- Polarisation rectiligne – Polarisation circulaire.
- Vitesse de phase – Indice.

2. Ce qu'il faut comprendre

Montrer qu'une OPPM polarisée rectilignement peut se décomposer en deux OPPM circulaires de même amplitude, l'une gauche et l'autre droite. Ces deux ondes se propagent dans le milieu avec des vitesses de phase différentes $(c_G \neq c_D)$. Elles présentent donc en sortie un déphasage : leur recombinaison redonne une OPPM de polarisation rectiligne (polarisation de direction différente de celle de l'onde incidente).

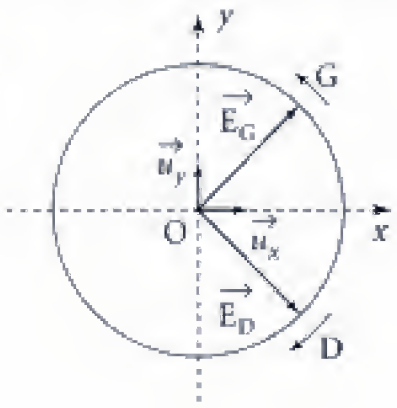
3. Solution

Considérons deux OPPM(ω) de même amplitude, la première polarisée circulaire gauche, la deuxième circulaire droite.

Les champs électriques sont donnés par :

$$\overrightarrow{E_G}(z,t) = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{u}_x \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \cdot \vec{u}_y \end{cases}$$

$$\overrightarrow{E_D}(z,t) = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{u}_x \\ -E_0 \sin(\omega t - kz) \cdot \vec{u}_y \end{cases}$$



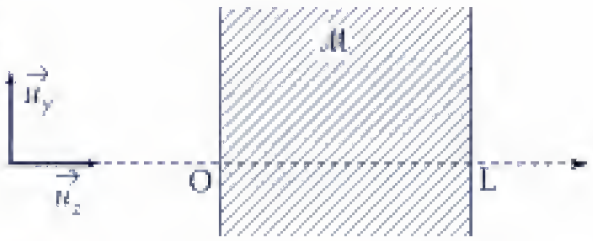
Copyrighted material

La superposition de ces deux ondes fournit une OPPM telle que :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E_G}(z, t) + \vec{E_D}(z, t) = 2E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{u_x}.$$

La polarisation est rectiligne selon $\vec{u_x}$.

■ L'OPPM(ω) polarisée rectilignement arrivant sur le milieu $\mathcal{M}$ peut être décomposée en deux OPPM(ω) l'une circulaire droite, l'autre circulaire gauche.



Dans le vide, on a : $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Dans le milieu $\mathcal{M}$ il faut remplacer k par kn_D ou kn_G pour les OPPMCD et OPPMCG.

À la sortie de $\mathcal{M}$ on a donc ($z > L$) :

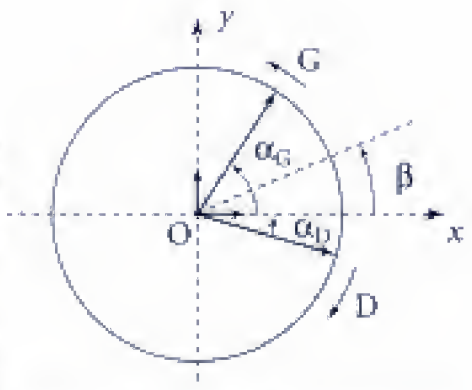
$$\vec{E_G}(z, t) = \begin{cases} E_0 \cos[\omega t - k(z - L) - kn_G L] \cdot \vec{u_x} \\ E_0 \sin[\omega t - k(z - L) - kn_G L] \cdot \vec{u_y} \end{cases}$$

$$\vec{E_D}(z, t) = \begin{cases} E_0 \cos[\omega t - k(z - L) - kn_D L] \cdot \vec{u_x} \\ -E_0 \sin[\omega t - k(z - L) - kn_D L] \cdot \vec{u_y}. \end{cases}$$

D'où le schéma :

$\alpha_G = \omega t - k(z - L) - kn_G L$

$\alpha_D = \omega t - k(z - L) - kn_D L$.



Fixons z : $\vec{E_G}$ et $\vec{E_D}$ sont deux vecteurs de même module tournant en sens inverses à la même vitesse. Le vecteur résultant a donc une direction fixe associée à la bissectrice intérieure $(\vec{E_D}, \vec{E_G})$.

L'onde émergeant du milieu $\mathcal{M}$ est de ce fait une OPPM(ω) polarisée rectilignement, mais dont la direction de polarisation a tourné d'un angle β par rapport à la direction de polarisation incidente.

On a $\beta = \dfrac{\alpha_G - \alpha_D}{2}$ soit $\beta = \dfrac{1}{2}(n_D - n_G)kL$.

Et en introduisant la longueur d'onde dans le vide λ telle que $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$\boxed{\beta = \pi \frac{L}{\lambda}[n_D(\lambda) - n_G(\lambda)]}$$

Le modèle précédemment étudié peut caractériser le phénomène de polarisation rotatoire.

Copyrighted material

304 Onde guidée

On étudie une onde électromagnétique se propageant dans le vide, parallèlement à Ox, entre les plans $(z = 0)$ et $(z = a)$, et dont le champ électrique est de la forme

$\vec{E} = E\vec{u}_y$ avec $E = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(kx - \omega t)$.

On considérera que k est un réel positif.

1. Calculer k en fonction de ω. Calculer la vitesse de phase de l'onde.

2. On superpose deux ondes du type précédent, de même amplitude, de pulsations voisines $(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})$ et $(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})$, de vecteurs d'onde $(k - \frac{\Delta k}{2})$ et $(k + \frac{\Delta k}{2})$, $(\Delta\omega \ll \omega)$.

Calculer l'onde résultante et la vitesse à laquelle se propage, suivant Ox, l'enveloppe du signal. Commenter.

3. a. Calculer le champ magnétique, en ne conservant que la partie variable dans le temps.

b. Calculer l'énergie moyenne contenue dans le parallélépipède de base l'unité de surface dans le plan Oxy et de hauteur a selon Oz.

Calculer le flux moyen du vecteur de Poynting à travers une surface perpendiculaire à Ox de largeur l'unité selon Oy et de hauteur a. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de propagation de d'Alembert.
- Propagation avec dispersion.
- Vitesse de phase – Vitesse de groupe.
- Énergie électromagnétique – Vecteur de Poynting.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'onde proposée doit vérifier l'équation de propagation.

2. La relation de dispersion liant k à ω n'est pas linéaire, et deux ondes de fréquences différentes présenteront des vitesses de phase distinctes. Pour $\Delta\omega$ suffisamment petit le signal obtenu par superposition des deux ondes est quasi-sinusoïdal : son amplitude, et donc l'énergie associée, se propage à une vitesse appelée vitesse de groupe (c'est celle du « paquet d'onde »).

3. Si l'on peut associer une vitesse à la propagation de l'énergie elle sera définie comme le rapport d'un flux moyen du vecteur de Poynting à une énergie électromagnétique moyenne.

Copyrighted material

3. Solution

1. Le champ électrique doit vérifier l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

équation dont seule la projection sur Oy nous intéresse :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

laquelle s'écrit aussi :

$$E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(kx - \omega t)\left[-k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] = 0.$$

Nous trouvons la relation cherchée en k et ω :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Pour que cette onde progressive existe, il faut que $\omega > \frac{\pi c}{a}$. On a alors (onde se propageant dans le sens des x positifs) :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos\left[\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}\, x - \omega t\right]\vec{u}_y.$$

Commentaire

• Un tel champ $\vec{E} = E(x, z, t)\,\vec{u}_y$ est bien à divergence nulle puisqu'il est porté par $\vec{u}_y$ et qu'il ne dépend pas de la variable d'espace y.

• D'autre part, il s'annule en $z = 0$ et $z = a$ ce qui assure la continuité de E_{1y} à la traversée des plans $z = 0$ et $z = a$ (« plans » parfaitement conducteurs).

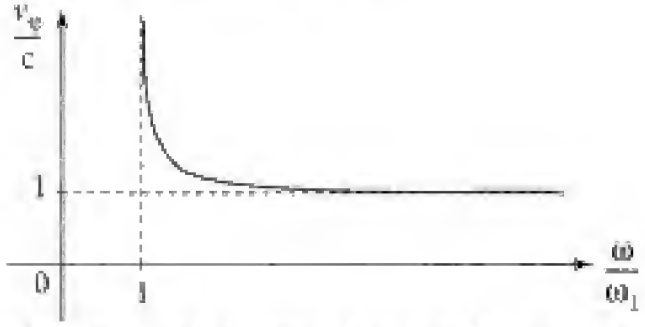
La phase de cette onde est définie par $\varphi = kx - \omega t$. En deux points distants de dx, la phase prend la même valeur pour un intervalle de temps dt tel que :

$$d\varphi = k\,dx - \omega t = 0 \quad \text{d'où} \quad v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

La vitesse de phase de l'onde vaut donc :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$$

$\left(\omega_1 = \frac{\pi c}{a}\right)$.



Cette vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui n'est pas contradictoire puisqu'elle ne peut pas être ici associée à la vitesse de propagation de l'énergie.

Copyrighted material

2. Le champ total vaut :

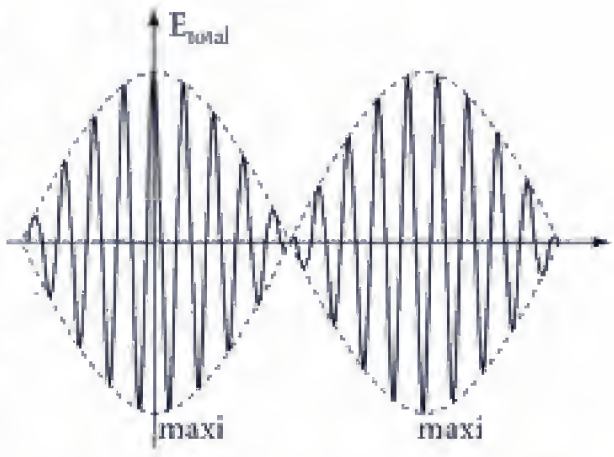
$$E_{total} = \left(E_0 \sin \pi \frac{z}{a}\right)\left[\cos\left([kx - \omega t] - \frac{[\Delta k\, x - \Delta\omega\, t]}{2}\right) + \cos\left([kx - \omega t] + \frac{[\Delta k\, x - \Delta\omega\, t]}{2}\right)\right].$$

Expression de la forme $\cos(a - b) + \cos(a + b)$, qui est égale à $2\cos a \cdot \cos b$.

d'où $\boxed{\overrightarrow{E_{total}} = 2E_0 \cdot \sin\left(\pi \frac{z}{a}\right) \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \cos\frac{(\Delta k x - \Delta\omega t)}{2} \vec{u}_y}$

avec $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}$ et $\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)\Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$.

Le dessin de E_{total} pour $t = 0$ a l'allure ci-contre, il s'agit d'un phénomène de battements.



L'enveloppe du signal étant proportionnelle à :

$$\cos\left[\frac{(\Delta k\, x - \Delta\omega\, t)}{2}\right]$$

la vitesse à laquelle elle se propage est :

$$\boxed{v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2} \quad (\omega > \omega_1)}$$

v_g est la vitesse à laquelle se propage un paquet de signal, on la nomme vitesse de groupe, elle n'est pas nécessairement égale à la vitesse de phase qui est la vitesse à laquelle se propagent, par exemple, les points où le signal est nul. La relation $v_\varphi v_g = c^2$ provient de la forme prise ici par la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \text{cte}$. En effet en différentiant cette équation nous obtenons :

$$k\,dk = \frac{1}{c^2}\omega\, d\omega.$$

D'où $c^2 = \frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = v_\varphi \cdot v_g$, $\left(v_\varphi = \frac{\omega}{k}\right)$.

3. a. Le champ $\vec{B}$ peut s'obtenir à partir de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

D'où : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & E \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial z} = E_0 \frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - kx) \\ 0 \\ -\frac{\partial E}{\partial x} = -E_0 k \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$

Copyrighted material

Intégrons les trois équations précédentes en ne conservant que la partie variable avec le temps :

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{a\omega} E_0 \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \\ 0 \\ \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

Remarquons que l'onde étudiée est progressive, monochromatique mais non plane (à x fixé les champs dépendent de z).

b. ■ la densité volumique d'énergie $u_v(x, y, z, t)$ vaut :

$$u_v = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2\right) \quad (\text{car } \varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1).$$

Soit avec les valeurs de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

$$u_v = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\left\{ \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos^2(\omega t - kx) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\sin^2(\omega t - kx) + \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos^2(\omega t - kx) \right\}.$$

La valeur moyenne dans le temps $\langle u_v \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u_v(t)\,dt$ s'obtient aisément en remarquant que :

$$\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$$

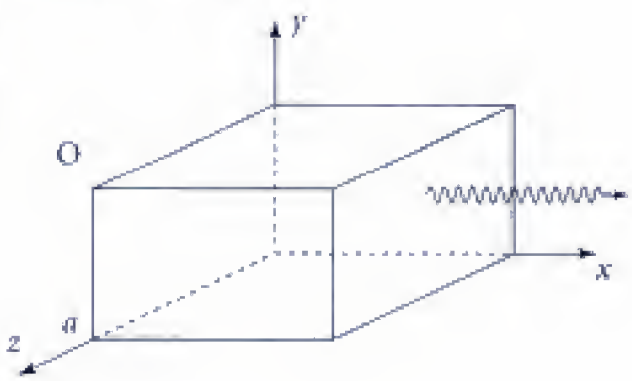
d'où :

$$\langle u_v \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2}\left[\left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right].$$

L'énergie moyenne contenue dans le parallélépipède (de hauteur a selon z et de base $\delta\Sigma = 1$) est donnée par :

$$\langle U \rangle = \int_0^a \langle u_v \rangle\, dz\, \delta\Sigma$$

$$\langle U \rangle = \int_0^a \langle u_v \rangle\, dz.$$



Or $\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) dz = \int_0^a \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{a}\right) dz = \frac{a}{2}$.

Copyrighted material

De même $\int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) dz = \int_0^a \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi z}{a}\right) dz = \frac{a}{2}$.

Donc $\langle U \rangle = \frac{E_0^2 a}{8\mu_0 c^2}\left[1 + \frac{k^2c^2}{\omega^2} + \frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{c^2}{a^2}\right]$.

Or, d'après la première question $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, et le crochet vaut 2, d'où :

$$\boxed{\langle U \rangle = \frac{E_0^2 a}{4\mu_0 c^2}}$$

■ Le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \wedge \vec{B})$, soit ici :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} 0 & B_x \\ E & \wedge\ 0 \\ 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} EB_z \\ 0 \\ -E \cdot B_x \end{vmatrix} \rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \langle EB_z \rangle \\ 0 \\ -\langle E \cdot B_x \rangle \end{vmatrix}.$$

Remarquons que E et B_x sont en quadrature, et la valeur moyenne du produit de ces champs est donc nulle :
$\langle \cos(\omega t - kx)\sin(\omega t - kx) \rangle = 0$.
D'autre part :

$$\langle EB_z \rangle = \frac{k}{\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{kE_0^2}{2\omega}\sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right).$$

D'où $$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\vec{u}_x.$$

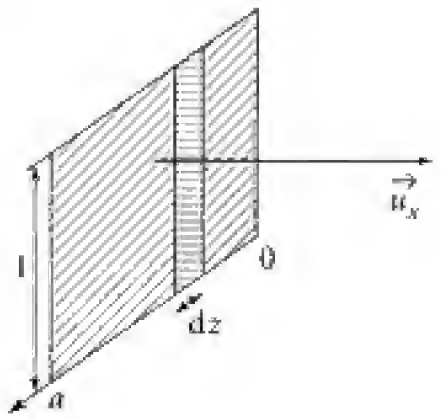
Soit un flux moyen à travers la surface d'aire $a\delta y$ perpendiculaire à $\vec{u}_x$:

$$\langle \varphi \rangle = \int_{z=0}^{z=a} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{u}_x \cdot dz\, \delta y$$

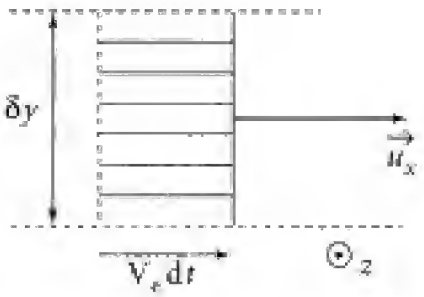
et : $\langle \varphi \rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) dz$

(pour $\delta y = 1$)
Ce qui donne :

$$\boxed{\langle \varphi \rangle = \frac{kE_0^2 a}{4\mu_0\omega}}$$



■ Pour définir une vitesse V_e de propagation de l'énergie, considérons l'énergie moyenne qui traverse la surface précédente pendant dt.
Cette énergie vaut $\langle \varphi \rangle dt$ par définition.
D'autre part, elle doit correspondre à l'énergie moyenne contenue dans le parallélépipède de surface $a\,\delta y$ et de longueur $V_e dt$, d'où :



Copyrighted material

$\langle \varphi \rangle \, dt = \langle U \rangle \cdot [V_e dt \, \delta y]$ avec $\delta y = 1$.

(En effet, $\langle U \rangle$ est l'énergie moyenne associée au volume $\delta y = 1$, $\Delta z = a$ et $\delta x = 1$).

Soit :

$$V_e = \frac{\langle \varphi \rangle}{\langle U \rangle} \quad \text{et} \quad \boxed{V_e = \frac{kc^2}{\omega}}$$

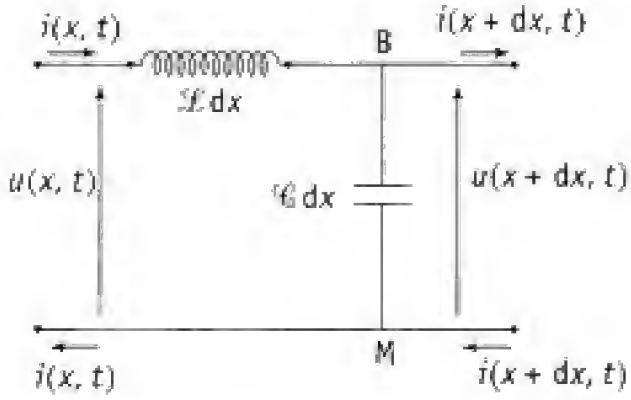
Or $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}$ et $\boxed{V_e = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$

La vitesse de propagation de l'énergie s'identifie ici à la vitesse de groupe.

305 Ligne sans pertes

Un câble coaxial sans pertes peut être assimilé à une succession de quadripôles élémentaires, chacun correspondant à la partie du câble comprise entre x et $x + dx$. $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}$ sont les auto-inductance et capacité linéique du câble. On notera :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}\mathscr{C}}} \quad \text{et} \quad R_0 = \sqrt{\frac{\mathscr{L}}{\mathscr{C}}}.$$



1. Expliciter le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions en $u(x, t)$ et $i(x, t)$.

Montrer que $u(x, t)$ peut se mettre sous la forme :

$$u(x, t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct)$$

pendant que l'intensité $i(x, t)$ peut s'exprimer en fonction de u_+, u_- et R_0.

2. le câble coaxial envisagé s'étend de $x = 0$ à $x = l$. L'extrémité $x = l$ est libre, tandis que l'extrémité $x = 0$ est reliée à un générateur de tension continue V_0. Une fois l'équilibre atteint, calculer u_+ et u_-.

3. On débranche le générateur de tension puis, à l'instant $t = 0$, on ferme l'extrémité $x = l$ sur une résistance de valeur R_0 (pour $t > 0$, on a : $u(l, t) = R_0 i(l, t)$). Calculer l'intensité $i(l, t)$ qui traverse la résistance.

1. Ce qu'il faut savoir

- Inductance, capacité.
- Équation de propagation : solution sous la forme de la superposition de deux ondes planes progressives.

Copyrighted material

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Écrire les lois de l'électrocinétique classique aux bornes de l'inductance et de la capacité.

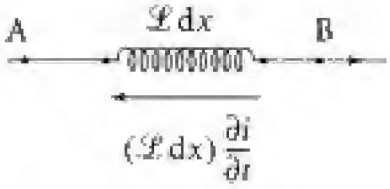
2. On exprime qu'en régime établi il n'y a pas de courant dans le câble ouvert en son extrémité. Il en résulte que $u(x, t)$ est une constante.

3. On écrit que le courant reste nul à l'entrée du câble (générateur débranché), et qu'en sortie $u(l, t) = R_0\, i(l, t)$.

3. Solution

1. Aux bornes de l'auto-inductance, la loi d'Ohm s'écrit :

$$V_A - V_B = (\mathscr{L}\,dx)\frac{\partial i}{\partial t}$$

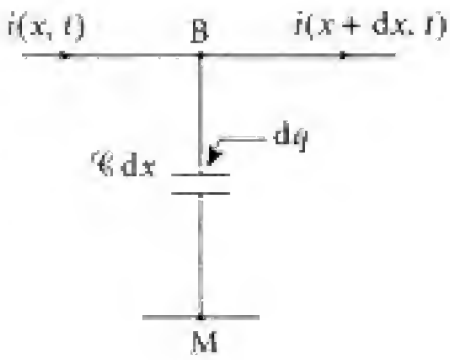


mais d'autre part :

$$V_A - V_B = u(x, t) - u(x + dx, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

on a donc $\boxed{\mathscr{L}\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}}$ (1)

Aux bornes du condensateur, par définition de la capacité, on a : $dq = (\mathscr{C}\,dx)u$ et l'intensité qui traverse la branche BM, de B vers M, vaut $\frac{dq}{dt}$, c'est-à-dire : $(\mathscr{C}\,dx)\frac{\partial u}{\partial t}$.



Cette intensité peut se calculer aussi en appliquant la loi des nœuds en B ; elle vaut :

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = -\frac{\partial i}{\partial x}dx$$

on a donc $\boxed{\mathscr{C}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}}$ (2)

En éliminant i entre les équations (1) et (2) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = -\mathscr{L}\frac{\partial^2 j}{\partial x\,\partial t} = -\mathscr{L}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\mathscr{C}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \mathscr{L}\mathscr{C}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Il s'agit d'une équation de propagation du type :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}\mathscr{C}}}}$$

Donc la solution générale est de la forme :

$$u(x, t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct).$$

$u(x, t)$ est une solution du type onde plane qui se décompose en la somme d'une onde plane progressive $u_+(x - ct)$ et d'une onde plane régressive $u_-(x + ct)$. La grandeur c

Copyrighted material

apparaît comme la célérité associée aux deux ondes précédentes : c'est ici une constante, le système proposé est de ce fait non dispersif.

u_+ et u_- sont deux fonctions d'une variable dont la forme dépend à la fois des conditions initiales et des conditions aux limites.

Pour obtenir i, reportons u dans (1) et (2) :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{\mathscr{L}}[u'_+(x-ct) + u'_-(x+ct)]$$

(u'_+ et u'_- désignent les dérivées respectivement par rapport aux variables $x-ct$ et $x+ct$)

et en intégrant :

$$i(x,t) = \frac{1}{c\mathscr{L}}[u_+(x-ct) - u_-(x+ct)] + f(x)$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\mathscr{C}[-c\,u'_+(x-ct) + cu'_-(x+ct)]$$

et en intégrant :

$$i(x,t) = c\mathscr{C}[u_+(x-ct) - u_-(x+ct)] + g(t).$$

Si l'on remarque que $\frac{1}{c\mathscr{L}} = c\mathscr{C} = \frac{1}{R_0}$, on s'aperçoit que $f(x) = g(t)$, ces deux fonctions sont constantes, on peut les prendre nulle sans nuire à la généralité de l'exercice. on obtient alors :

$$\boxed{i(x,t) = \frac{1}{R_0}[u_+(x-ct) - u_-(x+ct)]}$$

2. Une fois l'équilibre atteint, plus aucun courant ne circule et la différence de potentiel entre les deux armatures est la même partout :

$$\begin{cases} V_0 = u_+(x-ct) + u_-(x+ct) \\ 0 = \frac{1}{R_0}[u_+(x-ct) - u_-(x+ct)] \end{cases} \quad (3)$$

Ces deux équations sont valables pour $0 \leqslant x \leqslant l$ quel que soit t :

$$\boxed{u_+(\alpha) = \frac{V_0}{2}, \; u_-(\beta) = \frac{V_0}{2}} \quad \text{(en notant } \alpha = x-ct \text{ et } \beta = x+ct\text{)}$$

3. Lorsqu'on débranche le générateur, il ne se passe rien, le câble reste chargé, les équations (3) restent donc valables tant que l'on ne branche pas la résistance R_0, c'est-à-dire pour $0 \leqslant x \leqslant l$ et $t < 0$, soit encore $\alpha > 0$ et $\beta < l$:

$$\begin{cases} u_+(\alpha) = \frac{V_0}{2} \text{ pour } \alpha > 0 \\ u_-(\beta) = \frac{V_0}{2} \text{ pour } \beta < l. \end{cases}$$

Copyrighted material

Pour t positif, une fois la résistance branchée, on peut écrire que l'intensité reste nulle au niveau de l'extrémité libre $x = 0$:

$$i(0, t) = 0, \text{ d'où } u_+(-ct) - u_-(ct) = 0 \text{ pour } t > 0.$$

Cette dernière relation traduit pour $\alpha < 0$:

$$\boxed{u_+(\alpha) = u_-(-\alpha)}$$

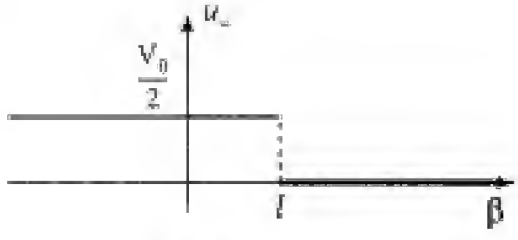
Écrivons maintenant que l'extrémité $x = l$ est, pour t positif, fermée sur la résistance R_0 :

$$u_+(l - ct) + u_-(l + ct) = R_0 \frac{1}{R_0}[u_+(l - ct) - u_-(l + ct)].$$

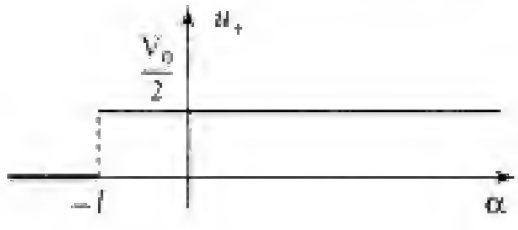
Soit $u_-(l + ct) = 0$ pour $t > 0$, d'où $u_-(\beta) = 0$ pour $\beta > l$.

Nous avons ainsi obtenu :

$$\begin{cases} u_-(\beta) = \dfrac{V_0}{2} \text{ pour } \beta < l \\ u_-(\beta) = 0 \text{ pour } \beta > l. \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_+(\alpha) = \dfrac{V_0}{2} \text{ pour } \alpha > 0 \\ u_+(\alpha) = u_-(-\alpha) \text{ pour } \alpha < 0. \end{cases}$$



d'où les courbes $\beta \to u_-(\beta)$ et $\alpha \to u_+(\alpha)$.

L'intensité qui passe dans la résistance vaut :

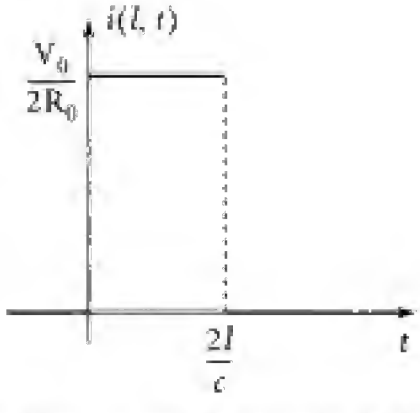
$$i(l, t) = \frac{1}{R_0}[u_+(l - ct) - u_-(l + ct)] = \frac{1}{R_0} u_+(l - ct) : (u_-(l + ct) = 0).$$

D'où $\boxed{i(l, t) = \dfrac{1}{R_0} u_+(l - ct)}$

Pour t positif, $(l - ct)$ varie de l à moins l'infini,

la fonction $u_+(l - ct)$ vaut donc $\dfrac{V_0}{2}$ jusqu'à ce que $l - ct_0 = -l$ (d'après le graphe de $u_+(\alpha)$), c'est-à-dire jusqu'à $t_0 = \dfrac{2l}{c}$. La fonction $u_+(l - ct)$ est nulle par la suite $(t > t_0)$.

On a donc le graphe ci-contre.



Le dispositif décrit dans cet exercice permet d'obtenir des impulsions d'intensité rectangulaires dont on peut faire varier la durée avec la longueur du câble coaxial utilisé.

Copyrighted material

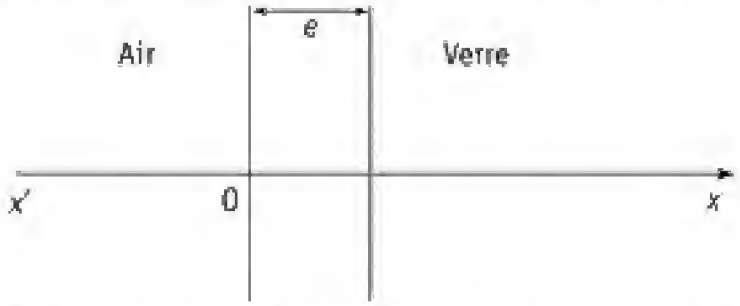
306 Couche semi-réfléchissante

Un dioptre plan orthogonal à l'axe $x'x$ sépare l'air et le verre. Les indices de ces deux milieux vis-à-vis de la radiation étudiée sont respectivement 1 et N = 1,5. On s'intéresse aux phénomènes de réflexion-transmission provoqués par la présence de ce dioptre en l'absence puis en présence d'une couche transparente supplémentaire déposée sur le verre.

Dans toute l'étude, les ondes électromagnétiques sont monochromatiques planes de directions de propagation colinéaires à $x'x$. Elles sont en outre polarisées rectilignement, le plan de polarisation étant le plan yOz. Ainsi, le champ électrique correspondant à l'onde incidente dans l'air s'écrira en notation complexe $E_0 \vec{u}_y \exp[i(\omega t - kx)]$ avec $k = \dfrac{\omega}{c}$.

1. Déterminer en l'absence de toute couche supplémentaire le coefficient énergétique de réflexion R au niveau du dioptre séparant l'air du verre.

2. On dépose sur le verre une couche d'épaisseur uniforme e d'un matériau isolant transparent. Ce matériau présente un indice $n > 1$ pour la radiation étudiée.



La présence de ce matériau intermédiaire provoque l'apparition de phénomènes de réflexions multiples. Dans l'air ($x < 0$), on notera $\underline{E_r}$ l'amplitude complexe en $x = 0^-$ de l'onde globalement réfléchie. Dans le milieu intermédiaire ($0 < x < e$), on notera $\underline{E_+}$ l'amplitude complexe en $x = 0^+$ de l'onde se propageant dans le sens positif de l'axe $x'x$ et $\underline{E_-}$ l'amplitude complexe au même point de l'onde se propageant dans le sens négatif. Dans le verre $x > e$, on notera $\underline{E_{tr}}$ l'amplitude complexe en $x = e^+$ de l'onde transmise.

a. Écrire alors (en amplitude complexe) les expressions des composantes non nulles du champ électromagnétique dans chacun des trois milieux.

b. Écrire, sans chercher à le résoudre, le système de quatre équations à quatre inconnues permettant *a priori* de déterminer les quatre amplitudes complexes inconnues introduites précédemment.

3. On cherche à réaliser une « couche anti-reflet », c'est-à-dire que l'on cherche à réaliser l'absence d'onde réfléchie dans l'air. Déterminer une condition nécessaire faisant intervenir n, N, k et e pour qu'il en soit ainsi. En déduire la valeur nécessaire de l'indice n. Préciser enfin les valeurs nécessaires du produit ne à l'aide de la longueur d'onde λ du rayonnement dans l'air.

Copyrighted material

4. On cherche maintenant à réaliser une « couche semi-réfléchissante », c'est-à-dire telle que le coefficient énergétique de réflexion R' dans l'air soit égal à 0,5. De nombreuses solutions sont possibles, on se restreint ici aux solutions pour lesquelles il existe une relation entre n et e identique à celle trouvée dans la question précédente (mais avec *a priori* une valeur pour n différente de celle trouvée précédemment). Montrer que l'existence de cette relation entre n et e permet d'exprimer E_r à l'aide de E_0 et des indices ; en déduire l'expression de R' à l'aide des indices. Déterminer alors la valeur de n pour avoir un dispositif semi-réfléchissant. Pour finir, vérifier en exprimant E_{tr} que le coefficient énergétique de transmission dans le verre a bien dans ce cas la valeur attendue.

1. Ce qu'il faut savoir

- Onde plane progressive sinusoïdale dans un milieu isolant transparent.
- Coefficients énergétiques de réflexion et transmission.
- Continuité (ou discontinuité) des différentes composantes du champ électromagnétique au niveau du dioptre.

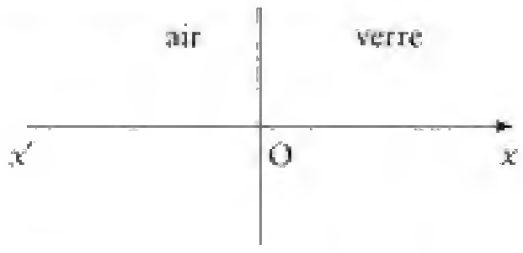
2. Ce qu'il faut comprendre

1. Dans cette question, il n'y a qu'une réflexion. On utilise alors souvent la notion de coefficient de réflexion pour une composante donnée du champ électromagnétique.

2,3,4. Dans ces questions, il y a présence de réflexions multiples. Soit on étudie les réflexions multiples, soit on adopte un point de vue global : c'est cette seconde méthode que l'on choisit. Ainsi, dans le milieu intermédiaire, l'onde se propageant dans le sens positif est, en réalité, la superposition d'une infinité d'ondes et l'onde se propageant dans le sens négatif est, en réalité, la superposition d'une infinité d'ondes réfléchies, mais on ne se préoccupe pas d'étudier ces superpositions.

3. Solution

1. Il s'agit ici d'un calcul classique vu en cours.



Dans l'air ($x < 0$), le champ électromagnétique est caractérisé par :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{u_y} \exp[i(\omega t - kx)] + r E_0 \vec{u_y} \exp[i(\omega t + kx)]$$

Copyrighted material

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}\vec{u}_z \exp[i(\omega t - kx)] - r\frac{E_0}{c}\vec{u}_z \exp[i(\omega t + kx)]$$

en notant r le coefficient de réflexion pour le champ électrique.
Dans le verre ($x > 0$), le champ électromagnétique est caractérisé par :

$$\underline{\vec{E}} = \tau E_0 \vec{u}_y \exp[i(\omega t - Nkx)]$$

$$\underline{\vec{B}} = N\tau\frac{E_0}{c}\vec{u}_z \exp[i(\omega t - Nkx)].$$

La continuité en $x = 0$ de la composante tangentielle du champ électrique donne $1 + r = \tau$.

La continuité en $x = 0$ du champ magnétique donne $1 - r = N\tau$.

On en déduit $r = -\dfrac{N-1}{N+1}$.

L'intensité du faisceau incident dans l'air est égale à la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting correspondant au faisceau incident :

$$I_{incident} = \left\langle \frac{E_0^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - kx)\right\rangle = \frac{1}{2c\mu_0}E_0^2.$$

De même pour le faisceau réfléchi :

$$I_{réfléchi} = \frac{1}{2c\mu_0}|r|^2 E_0^2.$$

Le coefficient énergétique de réflexion est donc égal à $|r|^2$ et donc :

$$\boxed{R = \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 = 0{,}04}$$

2. a. Dans l'air ($x < 0$), les amplitudes complexes sont :

$$\underline{E_y} = E_0 \exp(-ikx) + \underline{E_r}\exp(ikx)$$

$$\underline{B_z} = \frac{E_0}{c}\exp(-ikx) - \frac{\underline{E_r}}{c}\exp(ikx).$$

Dans le milieu intermédiaire ($0 < x < e$) :

$$\underline{E_y} = \underline{E_+}\exp(-inkx) + \underline{E_-}\exp(inkx)$$

$$\underline{B_z} = n\frac{\underline{E_+}}{c}\exp(-inkx) - n\frac{\underline{E_-}}{c}\exp(inkx).$$

Dans le verre ($x > e$) :

$$\underline{E_y} = \underline{E_0}\exp[-iNk(x-e)] \quad \text{car} \quad \underline{E_0} = \underline{E_t}(x = e)$$

$$\underline{B_z} = N\frac{\underline{E_0}}{c}\exp[-iNk(x-e)].$$

Copyrighted material

b. En $(x = 0)$, il y a continuité de $\underline{E_y}$ et $\underline{B_z}$, donc :

$$E_0 + \underline{E_r} = \underline{E_+} + \underline{E_-} \qquad (1)$$

$$E_0 - \underline{E_r} = n\,\underline{E_+} - n\,\underline{E_-} \qquad (2)$$

En $x = e$, il y a continuité de $\underline{E_y}$ et $\underline{B_z}$, donc :

$$\underline{E_+}\exp(-inke) + \underline{E_-}\exp(inke) = \underline{E_{tr}} \qquad (3)$$

$$n\,\underline{E_+}\exp(-inke) - n\,\underline{E_-}\exp(inke) = N\,\underline{E_{tr}} \qquad (4)$$

3. Dans le cas où $\underline{E_r} = 0$, les équations (1) et (2) donnent, par élimination de E_0 :

$$\underline{E_+} + \underline{E_-} = n\,\underline{E_+} - n\,\underline{E_-} \text{ d'où } (n-1)\,\underline{E_+} - (n+1)\,\underline{E_-} = 0. \qquad (1')$$

Le système linéaire de 3 équations $\{(1'), (3), (4)\}$ n'admet de solution non nulle que si le déterminant associé est nul :

$$\begin{vmatrix} n-1 & -(n+1) & 0 \\ \exp(-inke) & \exp(inke) & -1 \\ \exp(-inke) & -n\exp(inke) & -N \end{vmatrix} = 0$$

et donc : $-N(n-1)\exp(inke) + n(n+1)\exp(-inke) - n(n-1)\exp(inke)$
$- N(n+1)\exp(-inke) = 0$

soit $$\boxed{\exp(2inke) = \frac{(n+1)(n-N)}{(n-1)(n+N)}}$$

Les indices étant réels, on a donc :

– soit $\exp(2inke) = 1$, ce qui conduit à $(n+1)(n-N) = (n-1)(n+N)$

et donc à $-nN + n = nN - n$

soit : $2n = 2nN$, ce qui est impossible :

– soit $\exp(2inke) = -1$, ce qui conduit à

$$n^2 - N = -n^2 + N$$

soit à $n^2 = N$ et donc $\boxed{n = \sqrt{N} = 1{,}22}$

$\exp(2inke) = -1 \Rightarrow 2nke = \pi + p\,2\pi \quad (p \in \mathbb{N})$

$$\boxed{ne = \frac{\pi}{2k} + p\,\frac{\pi}{k}}$$

Comme $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, on en déduit :

$$\boxed{ne = \frac{\lambda}{4} + p\,\frac{\lambda}{2}}$$

Copyrighted material

4. On a donc $\exp(ink\ell) = \pm i$.

La relation (3) s'écrit alors : $\underline{E_+} - \underline{E_-} = \pm i\,\underline{E_{tr}}$ (3')

La relation (4) s'écrit : $n\,\underline{E_+} + n\,\underline{E_-} = \pm i\,N\,\underline{E_{tr}}$ (4')

Or, d'après (2), $\underline{E_+} - \underline{E_-} = \dfrac{1}{n}(E_0 - \underline{E_r})$

et, d'après (1), $\underline{E_+} + \underline{E_-} = E_0 + \underline{E_r}$.

En remplaçant dans (3') et (4'), il vient :

$$\frac{1}{n}(E_0 - \underline{E_r}) = \pm i\,\underline{E_{tr}} \quad \text{et} \quad n(E_0 + \underline{E_r}) = \pm i\,N\,\underline{E_{tr}}.$$

D'où $\dfrac{N}{n}(E_0 - \underline{E_r}) = n(E_0 + \underline{E_r})$

et $\boxed{\underline{E_r} = E_0\dfrac{N - n^2}{N + n^2}}$

Le coefficient énergétique de réflexion est alors :

$$\boxed{R' = \left(\frac{|\underline{E_r}|}{|E_0|}\right)^2 = \left(\frac{N - n^2}{N + n^2}\right)^2}$$

Pour que le coefficient R' soit égal à 0,5, il faut que $\left|\dfrac{N - n^2}{N + n^2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

L'équation $\dfrac{N - n^2}{N + n^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ne présente pas de solution acceptable.

Par contre $\dfrac{n^2 - N}{n^2 + N} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donne $\boxed{n = \sqrt{N\dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - 3}}$

On a donc $\underline{E_r} = -\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}$.

On en déduit $\underline{E_{tr}}$ par une des relations vues précédemment :

$$\frac{1}{n}\left(E_0 + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\right) = \pm i\,\underline{E_{tr}}$$

et donc $|\underline{E_{tr}}|^2 = \dfrac{E_0^2}{n^2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Le coefficient énergétique de transmission est donné par :

$$T' = N\frac{|\underline{E_{tr}}|^2}{|E_0|^2} = \frac{N}{n^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

D'où $\boxed{T' = \dfrac{1}{2}}$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Et $e^{-i\varphi} = (-1)^N$.

Cela revient à prendre pour origine des phases de l'onde transmise l'état de phase qu'aurait une onde incidente qui parcourrait sans encombre la distance L du matériau…

Le coefficient de transmission τ' vaudrait alors $\tau' = \dfrac{2\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^N}{1+\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{2N}}$.

• On peut également constater que pour $n_1 = n_2$ le coefficient de réflexion r vaut 0 et $|\tau| = 1$. Ce qui est en accord avec les observations suivantes :

– Le déphasage associé à un aller retour est un multiple de 2π (puisque $2kn_1L = 2N\pi$).

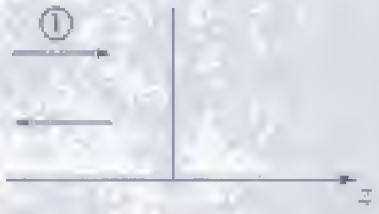
– Et les coefficients de réflexion sur les faces $z = 0$ et $z = L$ sont de signes contraires $r' = \pm\left(\dfrac{1-n_1}{1+n_1}\right)$.

• Enfin pour $n_1 \neq n_2$, $|r|$ est d'autant plus proche de 1 que n_1 est différent de n_2 et que N est grand.

c. Le coefficient de réflexion en énergie vaut $R = |r|^2$ (l'onde réfléchie appartient au même milieu que l'onde incidente).

Point méthode

On a en effet pour l'onde incidente :



$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}_i \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}_i = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i$$

$$\text{soit } \vec{\Pi}_i = \frac{1}{\mu_0 c} E_i^2 \vec{u}_z \quad (\vec{E}_i \perp \vec{u}_z).$$

De même pour l'onde réfléchie globale :

$$\vec{B}_r = -\frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}_r \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}_r = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r$$

$$\text{soit } \vec{\Pi}_r = +\frac{1}{\mu_0 c} E_r^2 \cdot (-\vec{u}_z).$$

On a donc avec $\phi_i = \langle \vec{\Pi}_i \vec{u}_z \rangle \cdot S$ et $\phi_r = \langle \vec{\Pi}_r \cdot (-\vec{u}_z) \rangle S$:

$$R = \frac{\phi_t}{\phi_i} = \frac{\langle E_r^2 \rangle}{\langle E_i^2 \rangle} = |r|^2.$$

Remarquons que l'on a également $\phi_T = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{u}_z \rangle \cdot S$ avec

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}_i + \vec{E}_r) \wedge (\vec{B}_i + \vec{B}_r)$$

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_i + \vec{\Pi}_r + \underbrace{\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}_r \wedge \vec{B}_i)}_{\vec{0}} = \vec{\Pi}_i + \vec{\Pi}_r$$

$$\text{soit } \phi_T = \phi_i - \phi_r.$$

D'où :

un coefficient de réflexion énergique : $$R = \left[\frac{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}}{1+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}}\right]^2$$

Commentaire

Le milieu n'est pas absorbant. On doit vérifier que $R + T = 1$ où $T = |\tau|^2$ (même raison que ci-dessus). Posons : $X = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^N$.

$$R = \left(\frac{1-X^2}{1+X^2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4X^2}{(1+X^2)^2}.$$

soit : $R + T = \frac{(1-X^2)^2 + 4X^2}{(1+X^2)^2} = 1$ comme il se doit.

A.N. : on a $n_1 = 2{,}3$ et $n_2 = 1{,}4$ soit $\frac{n_1}{n_2} = 1{,}64$

et

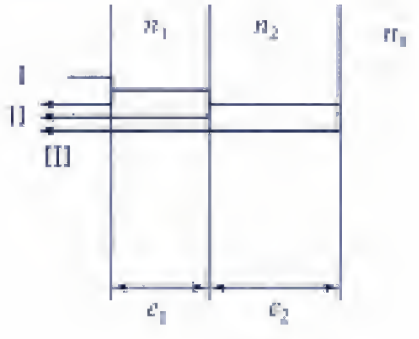
N	1	5	10
R	0,21	0,97	~1

Il est donc envisageable d'obtenir, à partir d'un système de couches diélectriques d'indices alternativement plus ou moins réfringents, un *miroir* de coefficient R proche de l'unité. Il faut alors remarquer que cette propriété repose sur la double égalité $n_1 e_1 = n_2 e_2 = \frac{\lambda}{4}$. Ainsi le coefficient de réflexion en énergie R prendra des valeurs plus faibles pour des λ non « accordées » au système…

Commentaire

Pour $1 < n_1$ et $n_2 < n_1$ les ondes I, II et III sont effectivement en phase comme on peut le vérifier aisément avec :

- $r'(1/n_1) = \frac{1-n_1}{1+n_1} < 0$
- $r'(n_1/n_2) = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} > 0$ et $2kn_1e_1 = \pi$
- $r'(n_2/n_1) < 0$ et $2k(n_1e_1 + n_2e_2) = 2\pi$.



Copyrighted material

308 Ondes dans un plasma idéal

Une onde plane progressive harmonique (champs en $\exp j(\omega t - kz)$ se propage selon Oz dans un plasma dilué idéal composé d'électrons et d'ions de charges $-e$ et $+e$ en densités volumiques égales à n_0. On fera l'approximation que seuls les électrons sont libres de se déplacer et on négligera les interactions entre les charges.

Le milieu est de plus soumis à un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B_0} = B_0 \vec{u_x}$.

On étudie la propagation d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) de pulsation ω selon Oz.

On pose $\omega_p^2 = \dfrac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}$ et $\omega_c = \dfrac{eB_0}{m}$

m désigne la masse d'un électron.

1. Établir des équations reliant les composantes complexes du vecteur densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}(\underline{j_x}, \underline{j_y}, \underline{j_z})$ à celles $(\underline{E_x}, \underline{E_y}, \underline{E_z})$ du champ électrique $\underline{\vec{E}}$:

a. en étudiant le mouvement des électrons ;

b. en exploitant les équations de Maxwell.

2. On envisage une OPPH polarisée rectilignement selon Ox. À quelle relation de dispersion correspond-t-elle ? Commenter le résultat obtenu.

3. Que dire d'une OPPH telle que $E_x = 0$? Étudier le cas particulier où $\omega = \omega_c$.

Solution

1. a. Un électron sera soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{f} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge B_0 \vec{u_x}).$$

Point méthode

• On néglige la force magnétique (due au champ $\vec{B}$ de l'onde) devant la force électrique

$$\frac{\left\| \vec{v} \wedge \vec{B} \right\|}{\left\| \vec{E} \right\|} = \frac{v}{v_\varphi} \ll 1 \quad (v_\varphi \equiv \text{vitesse de phase de l'onde}).$$

• On se place en régime sinusoïdal établi, toutes les grandeurs étant en $\exp j(\omega t - kz)$:

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} \exp j(\omega t - kz)$; $\underline{\vec{j}} = \underline{\vec{j_0}} \exp j(\omega t - kz)$ (densité volumique de courant)…

• On fait une étude linéaire :

$$\vec{j} = \underbrace{n_0(e) \cdot \vec{0}}_{\text{ions}} + n(-e)\vec{v} = -n_0 e \vec{v} \rightarrow \underline{\vec{j}} = -n_0 e \underline{\vec{v}}.$$

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à l'électron donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge B_0\vec{u}_z) \rightarrow m\,j\omega\,\underline{\vec{v}} = -e\,\underline{\vec{E}} - e\vec{v} \wedge B_0\vec{u}_z$$

d'où $\underline{\vec{j}} = -j\frac{n_0e^2}{m\omega}\underline{\vec{E}} + j\frac{eB_0}{m}\underline{\vec{j}} \wedge \vec{u}_z \rightarrow \underline{j}_x = -j\frac{n_0e^2}{m\omega}\underline{E}_x$

soit encore avec $\omega_p^2 = \frac{n_0e^2}{\varepsilon_0 m}$ $\boxed{\underline{j}_x = -j\frac{\omega_p^2}{\omega}\varepsilon_0\underline{E}_x}$ (1)

$$\left|\begin{array}{l} \underline{j}_y = -j\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}\underline{E}_y + j\dfrac{\omega_c}{\omega}\underline{j}_z \quad (2') \\ \underline{j}_z = -j\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}\underline{E}_z - j\dfrac{\omega_c}{\omega}\underline{j}_y \quad (3') \end{array}\right.$$

Soit encore :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{j}_y\cdot\left(1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = -j\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}\left(\underline{E}_y + j\dfrac{\omega_c}{\omega}\underline{E}_z\right) \quad (2) \\ \underline{j}_z\cdot\left(1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = -j\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}\left(\underline{E}_z - j\dfrac{\omega_c}{\omega}\underline{E}_y\right) \quad (3) \end{array}}$$

$\omega_p^2 = \frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}$ représente la pulsation de plasma, et $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ est la pulsation cyclotronique.

b. Examinons maintenant les équations de Maxwell :

• L'équation de Maxwell-gauss s'écrit :

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow -jk\,\underline{E}_z = \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0} \quad (\rho = \text{densité volumique de charges}).$$

Couplons cette équation à celle de conservation de la charge :

$$\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \rightarrow j\omega\,\underline{\rho} + (-jk\,\underline{j}_z) = 0.$$

Soit en éliminant $\underline{\rho}$: $\boxed{\underline{j}_z = -j\omega\varepsilon_0\underline{E}_z}$ (4)

• L'équation de Maxwell-Faraday et celle de Maxwell-Ampère donnent :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{j}} + \frac{1}{c^2}j\omega\underline{\vec{E}}$$

Copyrighted material

Hidden page

$$\underline{J_z} = -j\varepsilon_0\omega\,\underline{E_z} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)}\left\{-j\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}\left(\underline{E_z} - j\frac{\omega}{\omega_c}\underline{E_y}\right)\right\}.$$

$\underline{E_y}$ et $\underline{E_z}$ sont ainsi solutions d'un système de Cramer dont la compatibilité fournit l'équation de dispersion sous la forme $k^2 = f(\omega^2)$.

L'onde correspondante n'est pas transverse électrique puisque $E_z \neq 0$.

• Étudions plus particulièrement le cas où $\omega = \omega_c$ et $E_x = 0$.

Les équations (2) et (3) conduisent à $E_z = jE_y$.

Si on reporte alors les expressions de $\underline{J_z}$ (éq (4)) et $\underline{J_y}$ (*cf.* éq (5)) dans (3') on obtient avec $E_z = jE_y$ la relation qui définit k :

$$k^2 = \frac{2\omega_c^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

Une telle onde n'existe (c'est-à-dire peut se propager dans le milieu que si $\omega_c > \dfrac{\omega_p}{\sqrt{2}}$).

Le champ électrique de cette onde est « polarisé » circulairement dans le plan yOz perpendiculairement à $\overrightarrow{B_0} = B_0\,\overrightarrow{u_x}$.

Commentaire

En résumé cette étude a permis de mettre en évidence la possibilité de propager selon z (direction perpendiculaire à $\overrightarrow{B_0}$) deux types d'OPPH :
– une OPPH transverse électrique polarisée selon Oz (si $\omega > \omega_p$) ;
– une OPPH non transverse électrique.
Ces deux ondes ne correspondent pas à la même relation de dispersion et ne se propagent donc pas à la même vitesse de phase…

309 Réflexion sur un plasma

Un plasma neutre dilué est constitué d'électrons considérés comme libres et d'ions positifs supposés fixes (de par leur plus grande inertie), ces derniers ayant pour seul rôle d'assurer la neutralité électrique globale du milieu. Les électrons de masse m, de charge $-e$, sont au nombre de n_0 par unité de volume.

1. Montrer qu'on peut lui associer une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ quand, à l'intérieur de celui-ci, le seul champ auquel sont soumis les électrons est un champ uniforme sinusoïdal d'expression complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\exp j\omega t$ où $\underline{\vec{E}_0}$ est l'amplitude complexe. Commenter.

Copyrighted material

2. On cherche à propager dans le plasma une onde plane progressive harmonique (OPPH) dont le vecteur champ électrique est de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} \exp j(\omega t - kz)$$

où $\vec{k} = k\vec{u}_z$ est le vecteur d'onde.

On note $\vec{v}(z, t)$ est le champ des vitesses associé au « fluide » électronique.

a. On traite le problème dans le cadre d'une étude linéaire.

En déduire que la densité volumique de courant $\vec{j}$ et le champ électrique sont liés par la relation :

$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}$ (en notation complexe).

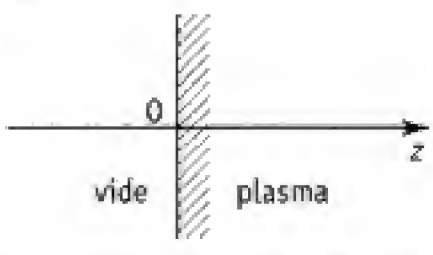
b. On suppose que la pulsation ω est différente de $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}}$. Montrer que l'OPPH est transverse.

En donner la relation de dispersion.

Que se passe-t-il pour $\omega > \omega_p$ puis pour $\omega < \omega_p$?

c. On assimile le plasma à un milieu diélectrique non chargé d'indice $n(\omega)$. Donner l'expression de $n(\omega)$ pour $\omega > \omega_p$ puis pour $\omega < \omega_p$.

3. Le plasma occupe le demi-espace ($z > 0$). Une OPPH incidente (pulsation ω) se propage dans le vide et atteint le plasma sous incidence normale.



a. Définir les coefficients (éventuellement complexes) $\underline{r}$ et $\underline{\tau}$ de réflexion et de transmission en amplitude : ces coefficients relatifs au champ électrique seront exprimés en fonction de l'indice équivalent $n(\omega)$ du milieu.

b. Définir et calculer les coefficients réels R et T de réflexion et de transmission en intensité. Tracer la courbe donnant $\dfrac{\omega}{\omega_p} \to R(\omega)$.

Commenter.

Solution

1. Nous cherchons un régime permanent sinusoïdal pour lequel la densité volumique de courant doit être de la forme :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\vec{j}_0} \exp(j\omega t)$$

si $\underline{\vec{j}_0}$ est proportionnel à $\underline{\vec{E}_0}$, le coefficient de proportionnalité sera la conductivité cherchée. La vitesse d'un électron, de la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp(j\omega t)$, doit vérifier la relation fondamentale de la dynamique :

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Point méthode

On a $\langle \phi_i \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \frac{\left(\underline{\vec{E}_i^*} \wedge \underline{\vec{B}_i} \right)}{\mu_0} \cdot \vec{u}_z \right\}$

soit $\langle \phi_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left\{ \left(\underline{\vec{E}_i^*} \wedge \left(\frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \underline{\vec{E}_i} \right) \vec{u}_z \right) \right\} = \frac{1}{2\mu_0 c} \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}_i} \cdot \underline{\vec{E}_i^*} \right)$

de même $\langle \phi_r \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}_r} \cdot \underline{\vec{E}_r^*} \right) = |\underline{r}|^2 \langle \phi_i \rangle \rightarrow R = |\underline{r}|^2$

et $\langle \phi_\tau \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \mathrm{Re}\left\{ \left(\underline{\vec{E}_\tau^*} \wedge \left(n \wedge \underline{\vec{E}_\tau} \right) \right) \vec{u}_z = \frac{1}{2\mu_0 c} |\underline{\tau}|^2 \mathrm{Re}\left[n \underline{\vec{E}_i} \cdot \underline{\vec{E}_i^*} \right] \right.$.

– Pour $\omega > \omega_p$, une onde peut se propager dans le plasma et elle transporte une partie de l'intensité associée à l'onde incidente. On a avec $n(\omega)$ réel.

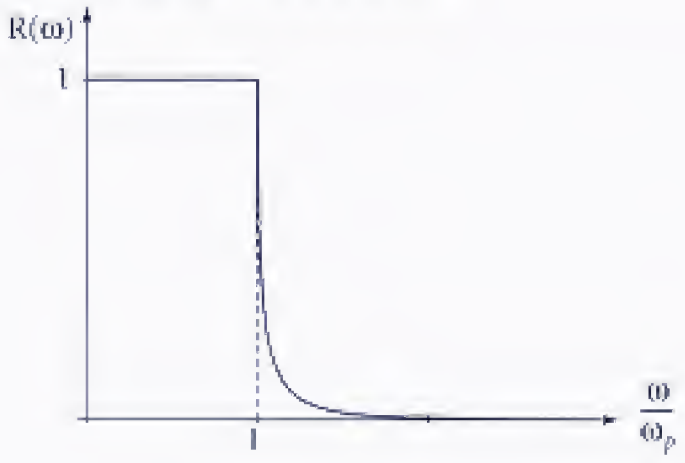
$$\boxed{R = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 \text{ et } T = \frac{4n}{(1+n)^2}}$$

(On a bien $R + T = 1$ relation qui traduit ici la conservation de l'énergie.)

– Pour $\omega < \omega_p$, il vient $n = -j\frac{Kc}{\omega}$ (*cf.* 2.b), et le plasma est le siège d'une onde évanescente (*cf.* 2. b) qui ne transporte aucune puissance en moyenne (on vérifie que $\langle \phi_\tau \rangle = 0$ puisque $\mathrm{Re}\left[n \underline{\vec{E}_i} \cdot \underline{\vec{E}_i^*} \right] = 0$ dans ce cas), soit :

$$R = \left| \frac{1 + j\frac{Kc}{\omega}}{1 - j\frac{Kc}{\omega}} \right| = 1 \quad \text{et} \quad T = 0.$$

Il y a « réflexion totale » (et $\underline{r} = |\underline{r}| e^{-j\theta} \ldots$), l'intensité de l'onde réfléchie étant alors égale à celle de l'onde incidente. D'où le graphe :



Hidden page

Partie

4

Optique ondulatoire

Copyrighted material

Chapitre

1

Interférences

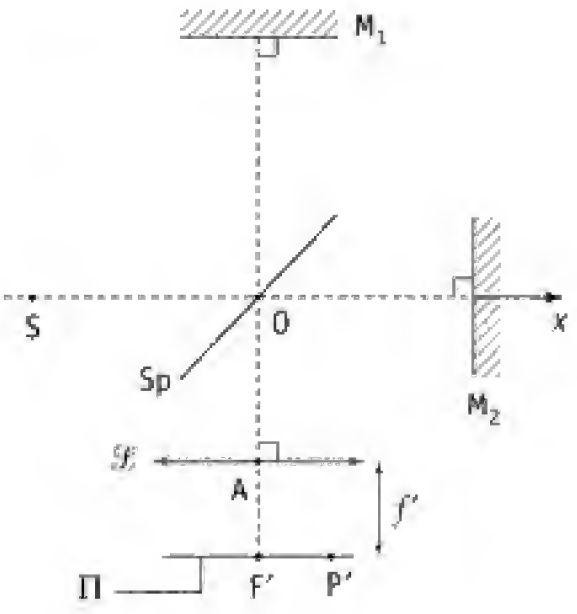
101 Interféromètre de Michelson

Un interféromètre de Michelson est réglé dans la configuration « lame à faces parallèles ».

On suppose qu'il est idéalement compensé, et qu'il peut donc être modélisé par deux miroirs parfaits M_1 et M_2 associés à une séparatrice Sp ((d'épaisseur négligeable et semi-réfléchissante), sans compensatrice).

Il est éclairé par une lampe au Sodium qui présente, dans le jaune, un doublet de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 assimilées à des raies monochromatiques.

On déplace le miroir M_2 selon Ox, M_2 restant perpendiculaire à M_1.



L'observation s'effectue dans le plan focal Π d'une lentille convergente $\mathscr{L}$ de foyer F' et de distance focale f'.

1. Isolant la raie λ_1, décrire la figure d'interférences obtenue dans le plan Π. Dépend-elle de ce que la source est ponctuelle ou étendue ?

2. a. On prend en compte les deux raies λ_1 et λ_2 en les supposant de même intensité I_0.

Montrer simplement que les interférences « disparaissent », au voisinage de F', pour certaines valeurs x_n de x que l'on déterminera (x position du miroir M_1 comptée à partir du contact optique).

b. Comment est modifié le résultat précédent si les deux raies ont des intensités différentes ?

3. a. Revenant aux raies λ_1 et λ_2 de même intensité I_0, calculer l'intensité $I(\delta)$ en un point P' associé à une différence de marche δ. Montrer que l'on peut définir un terme de contraste $C_1(\delta) = |\cos(\pi \Delta\sigma\, \delta)|$ où $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}$ $(\lambda_2 > \lambda_1)$. On posera $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$. Retrouver les résultats du **2. a.**

b. Reprendre la question précédente dans le cas où $I_{0_1} \neq I_{0_2}$.

4. Des mesures permettent de relever une suite de valeurs $x(1)\ldots x(7)$ pour lesquelles on observe effectivement la disparition des anneaux au voisinage de F'.

$x(1) = 32{,}96$; $x(2) = 33{,}25$; $x(3) = 33{,}54$; $x(4) = 33{,}84$

$x(5) = 34{,}13$; $x(6) = 34{,}42$; $x(7) = 34{,}71$. (x en mm)

En déduire l'écart $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ entre les deux raies, ainsi que la valeur de λ_2 sachant que $\lambda_1 = 589{,}0$ nm.

La précision sur les « pointés » des $x(i)$ est de l'ordre de $\pm\, 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ mm.

Copyrighted material

Hidden page

Le rayon (1) est obtenu à partir du rayon JK_1 par réflexion sur le miroir M_1.

Le rayon (2) résulte des réflexions successives du rayon JK_2 sur le miroir M_2 et sur la séparatrice Sp.

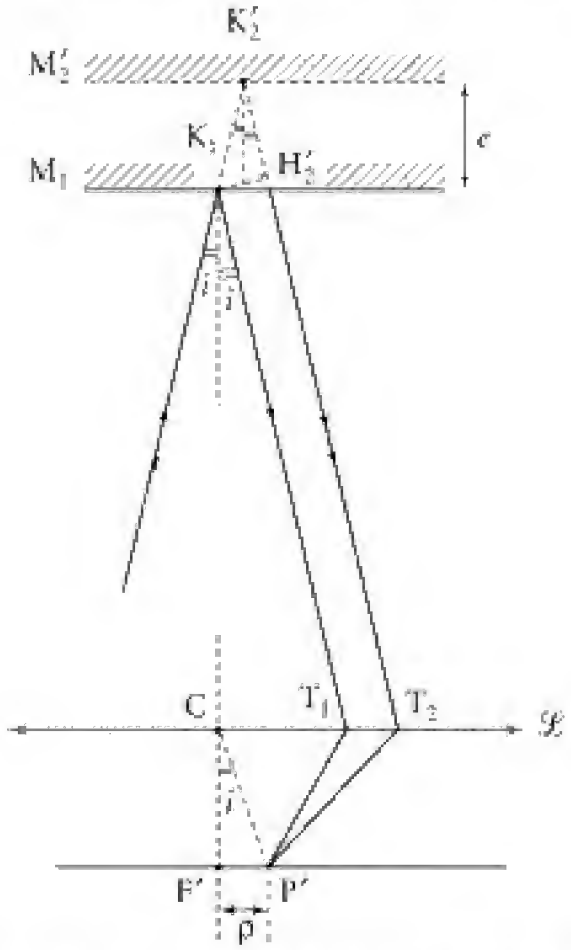
Ces deux rayons viennent interférer au point P′ du plan focal Π de la lentille convergente $\mathscr{L}$.

On peut remarquer que le chemin JK_2N est identique au chemin $JK_2'N$ obtenu par symétrie par rapport à la séparatrice Sp (inclinée à 45°). On peut donc raisonner sur les miroirs M_1 (réel) et M_2' (virtuel ; image de M_2 par rapport à Sp). Les deux miroirs M_1 et M_2' sont parallèles (réglages de l'appareil dans la configuration lame à faces parallèles).

■ Le rayon SJ provient du point source S lorsque celle-ci est réductible à une source « ponctuelle » : dans ce cas les interférences sont non localisées, et on a rejeté ici le plan d'observation à l'infini.

Pour une source spatialement étendue, ce rayon est issu d'un point S de la source ; l'observation à l'infini correspond au lieu de contraste maximal (interférences localisées dans ce cas). Un autre point S′ de la source pourra donner un rayon incident parallèle à SJ venant renforcer l'intensité lumineuse en P′ (S et S′ incohérents → $I(P') = I_S(P') + I_{S'}(P')$).

■ En un point P′ du plan d'observation caractérisé par l'angle i [$(\overrightarrow{CF'}, \overrightarrow{CP'}) = i$] la différence de marche $\delta(P')$ est une fonction de i et de e : distance entre les miroirs M_1 et M_2'.



D'après les propriétés des lentilles on peut écrire l'égalité des chemins optiques $[K_1T_1P']$ et $[H_2'T_2P']$.

Copyrighted material

Hidden page

Le contact optique correspond à $e = 0$. Prenons l'origine des x pour cette configuration. Les positions x_n $(n > 0)$ associées à ces brouillages s'identifient alors aux e_n, d'où :

$$\boxed{x_n = \left(\frac{2n+1}{4}\right)\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}} \quad (1) \quad \{n = 0, 1\ldots\}$$

en posant $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 > 0$ et $\lambda_0^2 = \lambda_1\lambda_2$ ($\lambda_0 \approx \lambda_1$ ou λ_2 car $\Delta\lambda \ll \lambda_1$).

b. Les deux raies voisines possèdent maintenant des intensités différentes I_{0_1} et I_{0_2}. D'où :

$$I_1 = \frac{1}{2}I_{0_1}(1 + \cos\Delta\phi_1) \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2}I_{0_2}(1 + \cos\Delta\phi_2).$$

Dans le cas où $I_{0_2} = I_{0_1}$, la condition de brouillage ($\cos\Delta\phi_1 = -\cos\Delta\phi_2$) implique la disparition des franges, ce qui correspond à un contraste nul. Pour $I_{0_2} \neq I_{0_1}$, la même condition fixe le contraste minimal à une valeur non nulle $C_m = \left|\frac{I_{0_2} - I_{0_1}}{I_{0_2} + I_{0_1}}\right|$ (les franges peuvent ne plus disparaître pour I_{0_2} trop différent de I_{0_1}, bien évidemment…).

3. a. L'intensité au point P′ caractérisé par une différence de marche δ est donnée par (*cf.* question précédente) :

$$I(\delta) = I_1(\delta) + I_2(\delta)$$

avec $\quad I_1(\delta) = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_1}\right)\right]$ et $I_2(\delta) = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\right]$.

D'où : $\quad I(\delta) = \frac{I_0}{2}\left[2 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_1}\right) + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\right]$.

Soit encore : $\quad I(\delta) = I_0\left[1 + \cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\right]$

Posons $\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2}$ (nombres d'onde)

Puis $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ et $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$.

Il vient :

$$I(\delta) = I_0[1 + \cos(\pi\Delta\sigma\delta)\cos(2\pi\sigma_0\delta)].$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{I(\delta) = I_0[1 + V(\delta)\cos(2\pi\sigma_0\delta)]} \quad \text{où} \quad \boxed{V(\delta) = \cos(\pi\Delta\sigma\delta).}$$

Commentaire

Pour λ_1 et λ_2 tendant vers λ_0 $(\Delta\sigma = 0)$ le terme de visibilité $V(\delta)$ tend vers 1 comme il se doit.

On retrouve d'autre part dans cette expression le terme habituel $\cos(2\pi\sigma_0\delta)$ des interférences à deux ondes, terme centré sur la valeur σ_0 de σ.

Copyrighted material

Avec une bonne approximation ($\Delta\lambda \ll \lambda_1,\ \lambda_2$) on peut écrire :

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_0}$$

et

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}.$$

Remarquons que le terme $\cos(2\pi\sigma_0\delta)$ varie selon δ avec une longueur caractéristique $\delta_c = \dfrac{1}{\sigma_0}$ alors que le terme de visibilité $|V(\delta)|$ présente des variations caractérisées par $\delta_c' = \dfrac{1}{\Delta\sigma}$. Mais $\Delta\sigma \ll \sigma_0$, soit $\delta_c' \gg \delta_c$. On peut donc considérer que $V(\delta)$ module $\cos(2\pi\sigma_0\delta)$. Il est alors possible de définir un terme de contraste, fonction de δ, $V(\delta)$ variant très peu sur des intervalles de l'ordre de quelques δ_c pour lesquels $\cos(2\pi\sigma_0\delta)$ varie de -1 à $+1$. D'où :

$$C(\delta) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{(1 + |V(\delta)|) - (1 - |V(\delta)|)}{(1 + |V(\delta)|) + (1 - |V(\delta)|)} = |V(\delta)|.$$

Il y aura brouillage au voisinage d'un point caractérisé par une différence de marche δ à chaque fois que le terme de contraste « s'annule », ce qui se produit pour :

$$\pi(\Delta\sigma)\delta_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \delta_n = (2n+1)\frac{1}{2\Delta\sigma}.$$

Or $\delta_n = 2x_n \cos i$ soit $2x_n \cos i = (2n+1)\dfrac{1}{2\Delta\sigma}$, soit au voisinage de $F'(i = 0)$ dès que :

$$2x_n = (2n+1)\frac{1}{2\Delta\sigma}, \text{ d'où : } \boxed{\Delta x_n = \frac{1}{2\Delta\sigma} = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}} \quad (2)$$

Résultat conforme à (1).

b. Cette fois-ci $I_{0_2} \neq I_{0_1}$, soit avec $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ et $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$:

$$I(\delta) = \frac{1}{2}(I_{0_2} + I_{0_1}) + \frac{1}{2}I_{0_2}\cos\left[2\pi\left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\delta\right] + \frac{1}{2}I_{0_1}\cos\left[2\pi\left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\delta\right]$$

ou encore en utilisant la notation complexe :

$$I(\delta) = \frac{1}{2}(I_{0_2} + I_{0_1}) + \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left\{\underbrace{\left(I_{0_2}e^{-j\pi\Delta\sigma\delta} + I_{0_1}e^{+j\pi\Delta\sigma\delta}\right)}_{\underline{\mathcal{A}}(\delta)}e^{j2\pi\sigma_0\delta}\right\}.$$

Posons $\underline{\mathcal{A}}(\delta) = |\underline{A}(\delta)|e^{j\varphi(\delta)}$ où ces différentes fonctions varient selon une échelle de l'ordre de $\delta_c' = \dfrac{1}{\Delta\sigma}$. Et :

$$I(\delta) = \frac{1}{2}(I_{0_1} + I_{0_2}) + \left|\underline{\mathcal{A}}(\delta)\right|\cos(2\pi\sigma_0\delta + \varphi(\delta))$$

avec

$$\frac{1}{2}\left|I_{0_2} - I_{0_1}\right| \leqslant \left|\underline{\mathcal{A}}(\delta)\right| \leqslant \frac{1}{2}(I_{0_2} + I_{0_1}).$$

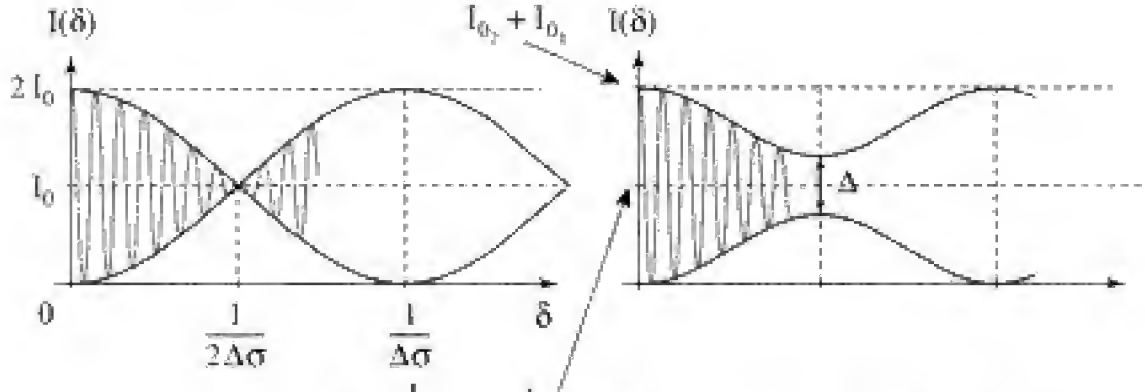
Copyrighted material

Les zones de contraste maximum sont associées à $\left|\underline{\mathcal{I}}(\delta)\right| = \frac{1}{2}(I_{0_2} + I_{0_1}) \Rightarrow C_{max} = 1$.

Les zones de contraste minimum correspondent à :

$$\left|\underline{\mathcal{I}}(\delta)\right| = \frac{1}{2}\left|I_{0_2} - I_{0_1}\right| \rightarrow C_{min} = \left|\frac{I_{0_2} - I_{0_1}}{I_{0_2} + I_{0_1}}\right|.$$

Ces résultats sont conformes à ceux du **2. b.**



$I_{0_2} = I_{0_1} = \frac{I_0}{2}$ $\qquad \frac{1}{2}(I_{0_2} + I_{0_1})$ $\quad I_{0_2} > I_{0_1} : \Delta = \left|I_{0_2} - I_{0_1}\right|$

4. L'expérience fournit $\Delta x_n = \dfrac{x(7) - x(1)}{6} = \dfrac{L}{6} = 0{,}29$ mm.

D'où $\qquad \Delta\lambda = \dfrac{\lambda_0^2}{2\Delta x_n}$; et $\Delta\lambda = 5{,}98$ Å.

Pour évaluer l'incertitude correspondante différentions la formule donnant $\Delta\lambda$ en fonction de λ_0 et Δx_n :

$$\frac{d(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} = 2\frac{d\lambda_0}{\lambda_0} - \frac{d(\Delta x_n)}{\Delta x_n}.$$

Soit en passant aux valeurs absolues :

$$\frac{\Delta(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \approx 2\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} + \frac{\Delta(\Delta x_n)}{\Delta x_n}.$$

On peut évaluer :

$$\frac{\Delta(\Delta x_n)}{\Delta x_n} \text{ à } \frac{\Delta L}{L} = \frac{2 \times 0{,}5 \cdot 10^{-2}}{1{,}75} \approx 6 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{et } \frac{2\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \sim \frac{2\Delta\lambda}{\lambda_0} \sim 2\frac{5{,}98}{5\,890} = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\left\{ \frac{\Delta(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \approx 8 \cdot 10^{-3} \right.$$

et : $\qquad \Delta(\Delta\lambda) \approx 8 \cdot 10^{-3} \times 5{,}98 \approx 0{,}05$ Å

Soit : $\qquad \boxed{\Delta\lambda = 5{,}98 \pm 0{,}05 \text{ Å}} \qquad \boxed{5{,}93 \leq \Delta\lambda \leq 6{,}03 \text{ Å}}$

On a également : $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda \rightarrow \boxed{\lambda_2 \neq 589{,}6 \text{ nm}}$

Copyrighted material

Commentaire

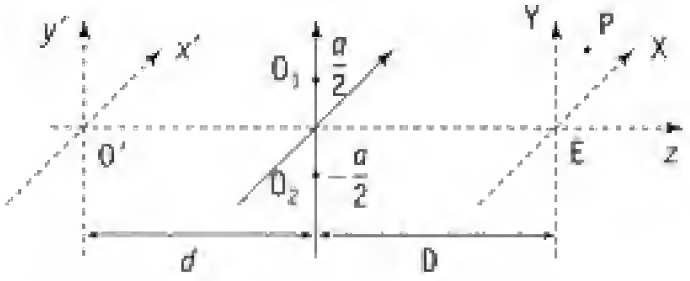
Les tables donnent en fait :

$$\lambda_1 = 5\,889{,}950\ \text{Å} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 5\,895{,}925\ \text{Å}.$$

D'où $\boxed{\Delta\lambda = 5{,}97\ \text{Å}}$

102 Influence de la largeur de la fente source

On réalise une expérience d'interférences utilisant le dispositif des trous d'Young situés en O_1 et O_2 et séparés de a ($O_1O_2 = a$).



1. a. La source est ponctuelle et se confond avec O'. On isole une longueur d'onde $\lambda = 0{,}589\ \mu\text{m}$. Décrire la figure d'interférences obtenue au voisinage du point E du plan d'observation (EXY). On supposera que les trous sont suffisamment petits et que $D \gg (|X|, |Y|, a)$.

b. La source ponctuelle, de longueur d'onde λ, est placée en $S(x', y')$ avec $d \gg (|x'|, |y'|, a)$.
Comment est modifiée la figure d'interférences ?

2. a. La source (longueur d'onde λ) est maintenant assimilée à une fente parallèle à $O'x'$ centrée en O' et de largeur b selon $O'y'$. Les différents « points » de la fente source sont supposés incohérents entre eux. On admettra qu'un élément de largeur dy' émet une intensité lumineuse proportionnelle à dy'.

Exprimer l'éclairement en un point P(X, Y) de l'écran voisin de E. Définir un terme de contraste C. Quelle valeur maximale b_{max} faut-il donner à la largeur b de la fente source pour que le contraste C soit supérieur où égal à 0,1 ?
A.N. : calculer b_{max} avec $a = 1$ mm, $d = 10$ cm.

b. Le contraste C s'annule pour la première fois pour une valeur b_0 de b. Retrouver ce résultat par un raisonnement simple ne faisant pas directement appel au calcul de l'intensité I(X, Y).

1. Ce qu'il faut savoir

- Détermination d'une différence de marche.
- Des rayonnements incohérents n'interfèrent pas entre eux.
- Contraste d'un système de franges.

Copyright du matériel

Hidden page

et avec $d \gg (|y'|, |x'|$ et $a)$, il vient (même démarche qu'au **1. a.**) :

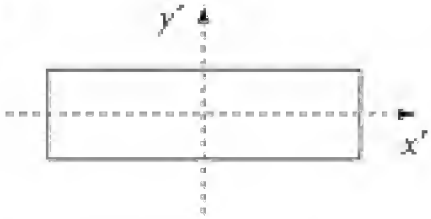
$$SO_2 - SO_1 = \frac{ay'}{d}.$$

D'où : $\delta(P) = \frac{aY}{D} + \frac{ay'}{d} = \frac{a}{D}\left(Y + y'\frac{D}{d}\right)$ et

$$I(P) = I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda D}\left(Y + \frac{D}{d}y'\right)\right)\right].$$

On observe la « même » figure d'interférences qu'au **1. a.** translatée de $-\frac{D}{d}y'$ selon $\vec{u}_{y'}$.

2. a. On va décomposer la fente source en « fils sources » très fins parallèles à $\vec{u}_{x'}$, centrés en $(0, y')$ et de largeur élémentaire dy'.



■ Contribution du fil source $(0, y')$:

Tous les points sources, incohérents entre eux, le constituant conduisent à la « même » figure d'interférence (même y'). On peut donc leur associer une intensité en P telle que :

$$dI(P) = A_0 dy'\left[1 + \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda D}\left(Y + \frac{D}{d}y'\right)\right)\right].$$

■ Et pour la fente source on sommera les intensités données par l'ensemble des fils sources également incohérents entre eux, d'où :

$$I(P) = A_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda D}\left(Y + \frac{D}{d}y'\right)\right)\right] dy'$$

soit

$$I(P) = A_0 b + A_0 \frac{\lambda d}{2\pi a}\left\{\sin\left[\frac{2\pi a}{\lambda D}\left(Y + \frac{Db}{2d}\right)\right] - \sin\left[\frac{2\pi a}{\lambda D}\left(Y - \frac{Db}{2d}\right)\right]\right\}$$

$$I(P) = A_0 b\left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)}{\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)}\cos\left(\frac{2\pi aY}{\lambda D}\right)\right].$$

Posons $\operatorname{sinc}(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \Rightarrow Y = I(P) = A_0 b\left[1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)\cos\left(\frac{2\pi aY}{\lambda D}\right)\right]$.

Il apparaît un terme de visibilité $V(b) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)$ qui module le terme d'interférence $\cos\left(\frac{2\pi aY}{\lambda D}\right)$. Les franges brillantes présentent une intensité maximale $I_{max} = A_0 b[1 + |V|]$, les franges « sombres » une intensité minimale $I_{min} = A_0 b[1 - |V|]$. On peut définir un contraste par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \Rightarrow C = |V| = \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)\right|.$$

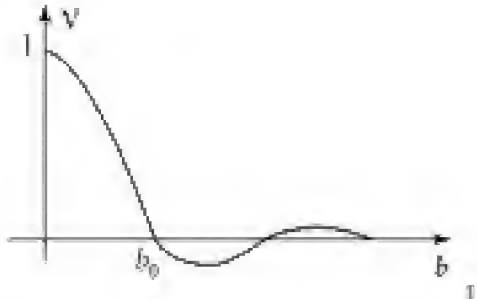
Copyrighted material

Commentaire

• Le contraste est indépendant de D et donc de la position du plan d'observation : les interférences sont non localisées.

• Quand on passe d'une configuration $V > 0$ à une configuration $V < 0$ (en modifiant d par exemple), il y a inversion du système de franges (les franges brillantes prennent la place des franges sombres).

• Le contraste s'annule pour la première fois pour une largeur critique b_0 de la fente source telle que :



$$\text{sinc}\left(\frac{\pi a b_0}{\lambda d}\right) = 0 \rightarrow b_0 = \frac{\lambda d}{a}.$$

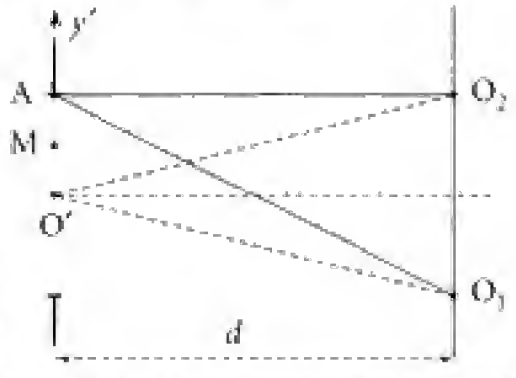
$$A.N. : b_0 = \frac{0{,}589 \cdot 10^{-6} \times 0{,}1}{10^{-3}} \rightarrow b = 59\ \mu\text{m}.$$

On veut $C \geqslant 0{,}1$ et donc $\text{sinc}\left(\frac{\pi a b_0}{\lambda d}\right) \geqslant 0{,}1$, soit :

$$\frac{ab}{\lambda d} < 0{,}91 \Rightarrow b < 0{,}91 \cdot b_0 ; \text{ d'où } b < 53\ \mu\text{m} = b_{max}.$$

b. On a $C = 0$ pour $b_0 = \frac{\lambda d}{a}$ (et $b = n b_0$). Retrouvons ce résultat. La différence de marche, en un point P du plan d'observation, des rayons provenant du fil source centré en M est :

$$\delta(M, P) = \underbrace{(MO_2 - MO_1)}_{\frac{ay'}{d}} + \underbrace{(O_2P - O_1P)}_{\text{indépendant de M}}$$



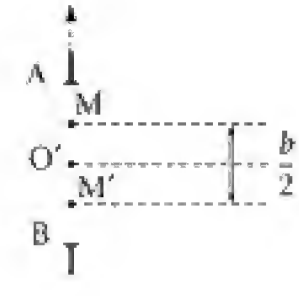
Considérons alors les fils sources centrés en A et en O'. Il leur correspond une différence de différence de marche $\Delta\delta = \delta(A, P) - \delta(O', P) = \frac{a}{d}\Delta y' = \frac{ab}{2d}$ $\left(O'A = \frac{b}{2}\right)$.

Le système de franges donné par l'un sera exactement brouillé par celui donné par l'autre dès que : $\Delta\delta = \frac{\lambda}{2}$ (pour la valeur la plus petite…). Ce qui se produit pour une largeur b_0 de la fente source définie par :

$$\frac{ab_0}{2d} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow b_0 = \frac{\lambda d}{a}.$$

On peut alors associer les fils sources deux à deux (M – M' distant de $\frac{b_0}{2}$) et décrire ainsi toute la fente source, la demi-fente source supérieure brouillant la demi-fente source inférieure.

Il y a donc bien brouillage total pour $b_0 = \frac{\lambda d}{a}$.



Copyrighted material

Commentaire

• On aurait également pu diviser la fente source en quatre, huit… parties égales.
On aura donc de nouveaux brouillages pour :

$$\Delta\delta = \frac{\lambda}{2} \text{ avec } \Delta y' = \frac{b}{2n} \Rightarrow \frac{a}{d}\frac{b}{2n} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow b = nb_0.$$

Ce que confirme l'expression du contraste ($|V| = 0$ pour $b = nb_0$).

• Revenant au cas où $b = b_0$, les intensités dues aux fils sources incohérents centrés en M_1 et M_2 sont respectivement proportionnelles à :

$$M_1 \mapsto \left(1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta(M_1, P)}{\lambda}\right)\right);\ M_2 \mapsto \left(1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta(M_2, P)}{\lambda}\right)\right)$$

et avec $\delta(M_2, P) = \delta(M_1, P) + \Delta\delta = \delta(M_1, P) + \frac{\lambda}{2}$, d'où :

$$M_2 \mapsto \left\{1 + \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\delta(M_1, P) + \frac{\lambda}{2}\right)\right]\right\} = \left(1 - \cos\left(2\pi\frac{\delta(M_1, P)}{\lambda}\right)\right)$$

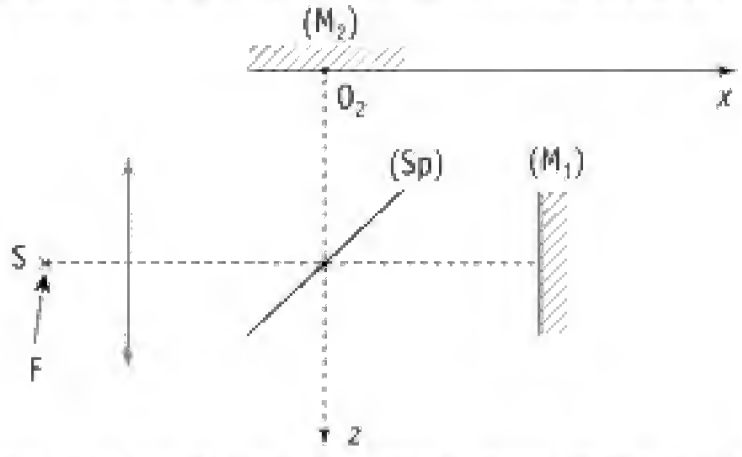
on vérifie ainsi que les systèmes d'interférences associés à chaque fil se compensent.

• On a $\delta(O', P) = \frac{aY}{D}$ et $\delta(A, P) = \frac{aY}{D} + \frac{\lambda}{2} = \frac{a}{D}\left(Y + \frac{\lambda D}{2a}\right) = \frac{a}{D}\left(Y + \frac{i}{2}\right)$: le système de franges obtenu avec le fil source centré en A est décalé d'une demie interfrange par rapport à celui associé au fil source centré en O', une frange brillante de l'un coïncidant avec une fente sombre de l'autre, ce qui explique le brouillage.

103 Interféromètre de Michelson en coin d'air

Dans cette étude, on néglige l'épaisseur des lames de l'interféromètre ainsi que les déphasages pouvant intervenir au cours des phénomènes de réflexion.

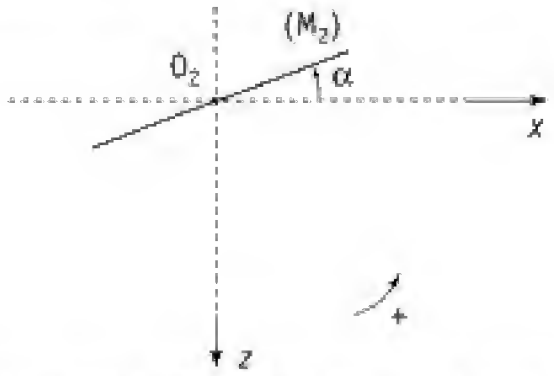
En position dite de « contact optique » (épaisseur nulle, angle nul), le schéma de l'interféromètre est le suivant, avec les deux miroirs et la séparatrice (Sp) :



À partir de cette position de référence, on fait tourner le miroir (M_2) d'un petit angle

Copyrighted material

α = 0,5 minute = 1,5 · 10^{-4} radian autour de l'axe $y'O_2y$. L'interféromètre est alors en configuration de lame d'air :



1. Dans cette première question, l'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde dans l'air λ = 546 nm. Cette source ponctuelle est placée, comme l'indique le schéma figurant en début d'énoncé, au foyer objet F d'une lentille convergente de focale f' = 20 cm.

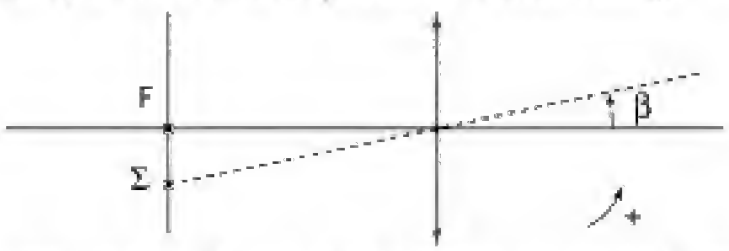
a. Montrer que l'interféromètre permet alors de réaliser en sortie l'interférence de deux ondes planes monochromatiques dont on donnera les deux vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ (pour l'onde n° 1 réfléchie sur (M_2)) et $\vec{k}_2$ (pour l'onde n° 2 réfléchie sur (M_2)).

b. Ces deux ondes peuvent être considérées comme étant en phase au point O_2, bien que l'onde n° 1 présente un caractère virtuel en ce point. Déterminer alors l'expression faisant intervenir $\overrightarrow{O_2M}$ de l'amplitude complexe de la grandeur lumineuse résultante en M.

c. L'observation du phénomène se fait dans le plan z = D. Déterminer, en se limitant à l'ordre 1 en α, l'expression de l'éclairement au point $M(x, y, D)$ de ce plan (on notera E_0 l'éclairement que l'on aurait en M en l'absence d'interférence).

d. En déduire l'expression et la valeur numérique de l'interfrange.

2. L'interféromètre est maintenant éclairé par une source monochromatique (λ = 549 nm) étendue. Cette source est assimilée à un trait lumineux d'intensité uniforme, de longueur b = 2 cm, de milieu F, parallèle à l'axe $z'z$. On note Σ un point de cette source étendue, la position de ce point étant caractérisée par l'angle β.



2. a. La portion de trait lumineux de longueur dz et de point moyen Σ peut être assimilée à une source ponctuelle comparable à celle étudiée dans la première partie. Déterminer en utilisant α et β les nouveaux vecteurs d'onde $\vec{k}_1'$ et $\vec{k}_2'$ caractérisant les deux ondes en sortie.

b. On s'intéresse à l'éclairement au point $M(x, y, D)$ dû à cette source. Déterminer de façon analogue au calcul fait précédemment l'expression de cet éclairement, sachant

Copyrighted material

qu'en l'absence d'interférence l'éclairement serait proportionnel à dz et pourrait donc s'écrire $E_0\frac{dz}{b}$. On se limitera à l'ordre 1 en α et β.

c. En déduire l'expression de l'éclairement total au point M dû à l'ensemble du trait lumineux et préciser alors l'expression du contraste de la figure d'interférences obtenue.

d. Quelle est la valeur maximum de D compatible avec un contraste supérieur à 0,8 ($sinc(1,1) = 0,8$) ? Est-il possible, avec le montage envisagé, d'observer sur un écran une figure d'interférences bien contrastée ?

3. Avec une source étendue, les interférences sont localisées au voisinage immédiat du miroir (M_2). Préciser alors la focale de la lentille convergente qu'il faut mettre en sortie de l'interféromètre pour observer les interférences sur un écran disposé à 1,25 mètre de (M_2) avec un grandissement de l'interfrange égal à 4.

1. Ce qu'il faut savoir

- Notion d'onde plane progressive monochromatique.
- Interféromètre de Michelson.
- Notion de localisation des interférences.

2. Ce qu'il faut comprendre

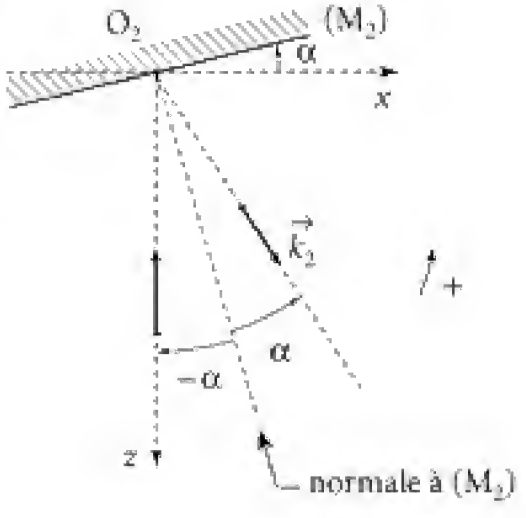
Lorsqu'il y a interférence entre deux ondes, il faut sommer les grandeurs lumineuses avant de calculer l'éclairement.

En l'absence d'interférence, ce sont les éclairements qui s'ajoutent.

3. Solution

1. a. Le faisceau correspondant à l'onde n° 1 émerge de la lentille parallèlement à $x'x$, se réfléchit sur (M_1) et ensuite sur (Sp). En sortie, ce faisceau est donc parallèle à l'axe $z'z$ et $\boxed{\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}_z}$

Le faisceau correspondant à l'onde n° 2 émerge de la lentille parallèlement à $x'x$, se réfléchit sur (Sp) et arrive donc sur (M_2) avec un angle d'incidence égal à α. Le faisceau en sortie est donc caractérisé par un vecteur d'onde $\vec{k}_2$ faisant un angle 2α avec $z'z$ et $\boxed{\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_x \sin 2\alpha + \vec{u}_z \cos 2\alpha)}$

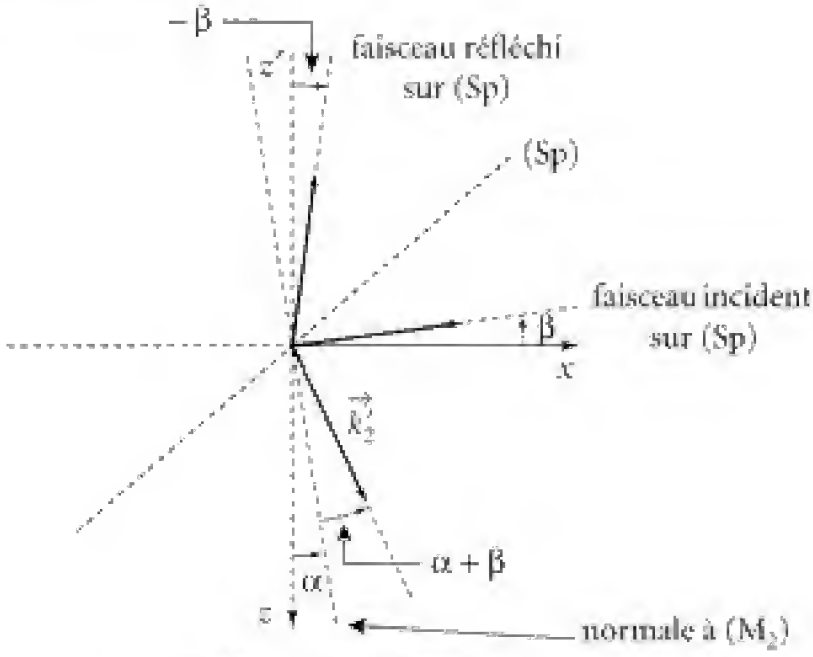


Copyrighted material

Hidden page

On a donc $\boxed{\vec{k}_1' = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_x \sin\beta + \vec{u}_z \cos\beta)}$

On fait de même pour le faisceau n° 2 :



D'où $\boxed{\vec{k}_2' = \frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u}_x \sin(\beta + 2\alpha) + \vec{u}_z \cos(\beta + 2\alpha)]}$

b. En procédant de façon analogue, l'éclairement s'écrit :

$$E_0 \frac{dz}{b}(1 + \cos((\vec{k}_2' - \vec{k}_1') \cdot \overrightarrow{O_2M})).$$

Avec $(\vec{k}_2' - \vec{k}_1') \cdot \overrightarrow{O_2M} = (\sin(\beta + 2\alpha) - \sin\beta)x + (\cos(\beta + 2\alpha) - \cos\beta)D.$

À l'ordre 1 en α : $\begin{cases} \sin(\beta + 2\alpha) - \sin\beta = 2\alpha\cos\beta \\ \cos(\beta + 2\alpha) - \cos\beta = -2\alpha\sin\beta \end{cases}$

Donc, à l'ordre 1 en α et β :

$$(\vec{k}_2' - \vec{k}_1') \cdot \overrightarrow{O_2M} = 2\alpha x - 2\alpha\beta D.$$

D'où l'expression de l'éclairement :

$$\boxed{E_0 \frac{dz}{b}\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi\alpha}{\lambda}(x - D\beta)\right)\right]}$$

c. À l'ordre 1 en β : $dz = f' d\beta$.

L'éclairement total est alors :

$$\mathcal{E} = \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} E_0 f' \frac{d\beta}{b}\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi\alpha D}{\lambda}\beta - \frac{4\pi\alpha x}{\lambda}\right)\right]$$

avec $\beta_1 = \frac{b}{2f'}$.

Copyrighted material

D'où :

$$\mathscr{E} = E_0\left[1 + \frac{f'}{b}\frac{\lambda}{4\pi\alpha D}\left(\sin\left(\frac{4\pi\alpha D\beta_1}{\lambda} - \frac{4\pi\alpha x}{\lambda}\right) + \sin\left(\frac{4\pi\alpha D\beta_1}{\lambda} + \frac{4\pi\alpha x}{\lambda}\right)\right)\right].$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{E} = E_0\left[1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi\alpha Db}{\lambda f'}\right)\cos\left(\frac{4\pi\alpha x}{\lambda}\right)\right]}$$

Le contraste est :

$$C = \frac{\mathscr{E}_{max} - \mathscr{E}_{min}}{\mathscr{E}_{max} + \mathscr{E}_{min}} \quad \text{avec} \quad \mathscr{E}_{max} = E_0\left[1 + \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi\alpha Db}{\lambda f'}\right)\right|\right]$$

$$\mathscr{E}_{min} = E_0\left[1 - \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi\alpha Db}{\lambda f'}\right)\right|\right]$$

D'où :

$$\boxed{C = \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi\alpha Db}{\lambda f'}\right)\right|}$$

Commentaire

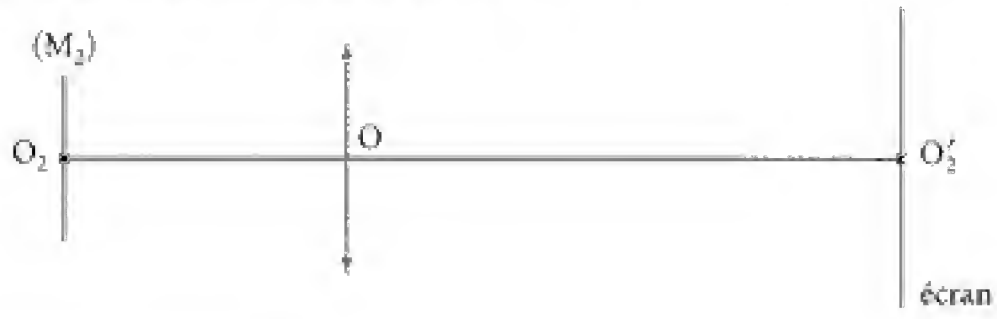
On retrouve bien que si $b \mapsto 0$ (source ponctuelle), alors $C \mapsto 1$: c'est le cas idéal étudié à la première question.

$$C > 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{2\pi\alpha Db}{\lambda f'} < 1{,}1 \Rightarrow \boxed{D < 6{,}4 \text{ mm}}$$

Il apparait donc strictement impossible d'observer la figure d'interférences sur un écran car, concrètement, la distance D est supérieure au bras de l'interféromètre qui est au moins de 10 cm.

Les interférences avec une source étendue sont alors localisées au voisinage immédiat de (M_2) et présentent ainsi un caractère que l'on peut qualifier de « virtuel ».

3. On réalise l'image sur l'écran du miroir (M_2).



Le grandissement est $\left|\dfrac{\overline{OO_2'}}{\overline{OO_2}}\right| = 4$.

Donc, sachant que $\left|\overline{OO_2'}\right| + \left|\overline{OO_2}\right| = 1{,}25$ m, il faut :

$$\overline{OO_2'} = 1{,}0 \text{ m} \quad \text{et} \quad \overline{OO_2} = -0{,}25 \text{ m}.$$

Copyrighted material

La relation de conjugaison de la lentille donne :

$$\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{\overline{OO_2'}} - \frac{1}{\overline{OO_2}} = 5\ \text{m}^{-1}.$$

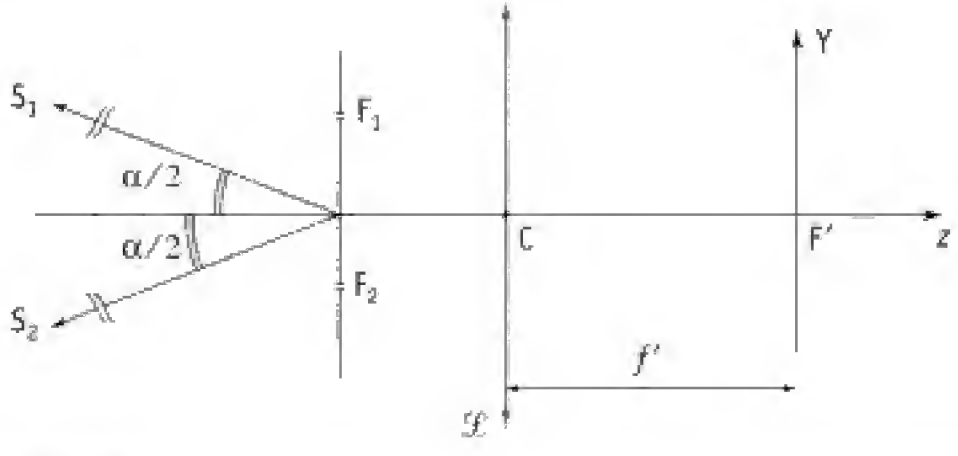
d'où la focale de la lentille à utiliser :

$$\boxed{f_1' = 20\ \text{cm}}$$

Cette lentille devra être placée à 25 cm de (M_2).

104 Étoile double

Pour mesurer l'écart angulaire α entre deux étoiles S_1 et S_2, on utilise le dispositif suivant :



Il est constitué :

- de deux trous fins F_1 et F_2 distants de a ($F_1F_2 = a$) que l'on peut faire varier.
- d'une lentille convergente $\mathscr{L}$ de distance focale f',
- l'observation s'effectuant dans le plan focal F'XY de $\mathscr{L}$.

Les deux sources S_1 et S_2 sont dans le plan de figure et on note $\pm\frac{\alpha}{2}$ leur distance angulaire, l'axe du système se confondant à celui de la lentille Cz ; (α est petit).

S_1 et S_2 constituent deux sources ponctuelles monochromatiques (longueur d'onde étudiée λ) et incohérentes. Elles sont de même intensité.

1. Décrire la figure d'interférences observée dans le plan F'XY au voisinage du foyer F'.

On déterminera l'intensité I(Y) en un point de l'axe F'Y. Définir un terme de contraste C dont on donnera l'expression en fonction de a, λ et α.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

■ Au total l'éclairement en un point P de l'écran est donné par :

$$I(P) = I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda}\left(\frac{Y}{f'} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] + I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda}\left(\frac{Y}{f'} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$

$$I(P) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\pi \frac{a\alpha}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi \frac{aY}{\lambda f'}\right)\right]$$

soit encore en introduisant l'interfrange i : $I(P) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\pi \frac{a\alpha}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi \frac{Y}{i}\right)\right]$.

On obtient un système de franges d'interfrange i avec :

– pour les franges « brillantes » : $I = I_{max} = 2I_0 \cdot \left[1 + \left|\cos\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right)\right|\right]$

– pour les franges « sombres » : $I = I_{min} = 2I_0 \cdot \left[1 - \left|\cos\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right)\right|\right]$

soit un contraste $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \Rightarrow C = \left|\cos\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right)\right|$.

2. a. Les franges disparaissent pour $C = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\pi \frac{a\alpha}{\lambda} = \frac{\pi}{2}(2p + 1) \Rightarrow a = \frac{\lambda}{2\alpha}(1 + 2p) \quad (3)$$

La valeur la plus petite de a est : $\boxed{a_m = \frac{\lambda}{2\alpha}}$

Cette valeur est d'autant plus grande que l'écart angulaire entre les deux étoiles est faible.

A.N. : $\alpha = \frac{0{,}547 \cdot 10^{-6}}{2 \times 4{,}5 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \alpha = 6 \cdot 10^{-6}$ rad.

b. Il y aura brouillage lorsque le système de franges donné par S_2 est en anti-coïncidence avec celui fourni par S_1, ce qui se produit dès que la différence des différences de marche en un point P du lieu d'observation est égale à $(2p + 1)\frac{\lambda}{2}$.

Ainsi : $\delta(S_1, P) - \delta(S_2, P) = (2p + 1)\frac{\lambda}{2}$

$$\Rightarrow \Delta\phi(S_1, P) - \Delta\phi(S_2, P) = \frac{2\pi}{\lambda}(2p + 1)\frac{\lambda}{2} = (2p + 1)\pi$$

(alors les deux cosinus prennent – dans les expressions (1) et (2) – des valeurs opposées…).

Or $\left.\begin{aligned} \delta(S_1, P) &= \frac{aY}{f'} + \frac{a\alpha}{2} \\ \delta(S_2, P) &= \frac{aY}{f'} - \frac{a\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a\alpha = (2p + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow a = \frac{\lambda}{2\alpha}(1 + 2p)$.

Résultat conforme à (3).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Commentaire

$\Omega_0 = 2\pi(1-\cos i_{max})$ avec $\cos i_{max} = \dfrac{f}{\sqrt{f^2+R^2}} \approx \left(1-\dfrac{R^2}{2f^2}\right)$ pour $\dfrac{R^2}{f^2} \ll 1$,

soit $\Omega_0 \approx \pi\dfrac{R^2}{f^2}$

b. Traçons la courbe donnant S en fonction de e.

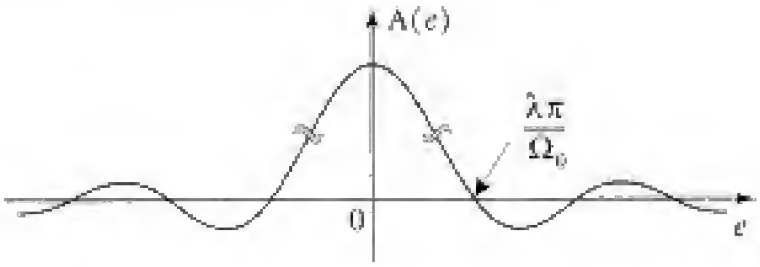
$S - S_0$ se présente comme un signal « quasi-sinusoïdal ».

$$S - S_0 = S_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{e\,\Omega_0}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\frac{2e}{\lambda}\left(1-\frac{\Omega_0}{4\pi}\right)\right)$$

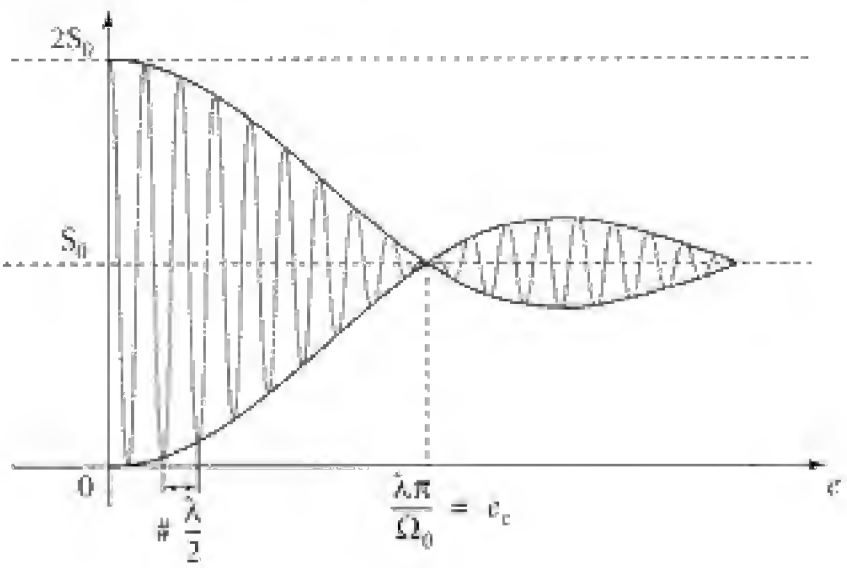
$$S - S_0 = S_0 A(e)\cos\left[2\pi\frac{2e}{\lambda}\left(1-\frac{\Omega_0}{4\pi}\right)\right]$$

de « période » selon e égale à $\dfrac{\lambda}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\Omega_0}{4\pi}} \approx \dfrac{\lambda}{2}$ pour $\dfrac{R^2}{f^2} \ll 1$ (*cf.* $\dfrac{\Omega_0}{4\pi} \approx \dfrac{R^2}{4f^2}$ dans ce cas)

et modulé en amplitude par la fonction $A(e) = \operatorname{sinc}\left(\dfrac{e\,\Omega_0}{\lambda}\right)$



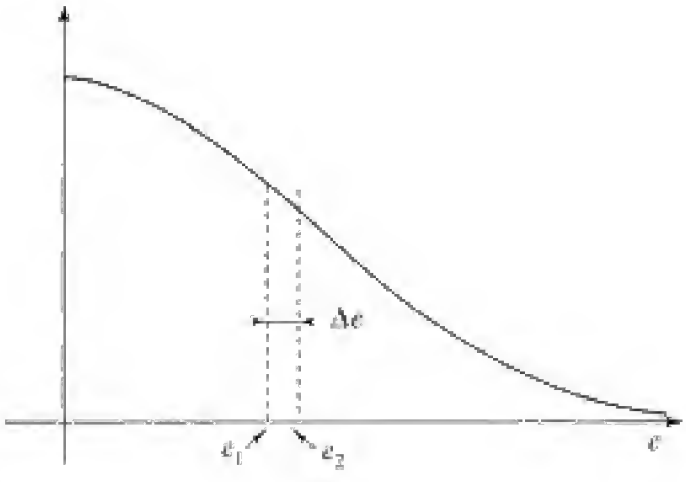
or $\dfrac{\lambda\pi}{\Omega_0} \approx \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{2f^2}{R^2} \gg \dfrac{\lambda}{2}$ ce qui justifie l'appellation « signal quasi-sinusoïdal » ainsi que le graphe qui suit (quand e varie de quelques λ, le cosinus varie de -1 à $+1$ alors que la fonction $A(e)$ reste pratiquement constante) :



Hidden page

Hidden page

Hidden page



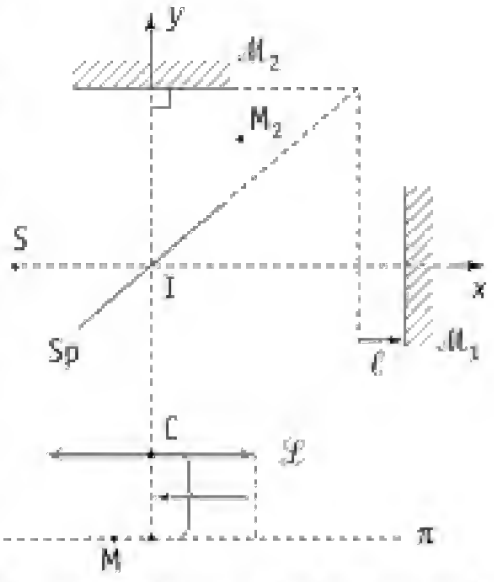
Or $C(e) = e^{-\frac{e^2}{e_0^2}}$ avec $e_0 = \dfrac{1}{2\pi a}$ et avec $a \ll \sigma_0$, c'est-à-dire $e_0 \gg \Delta e$, on peut considérer que l'on a avec une bonne approximation $C(e_2) \# C(e_1)$.

D'où un contraste $\Gamma = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = C(e)$.

106 Spectrométrie à transformée de Fourier

Un interféromètre idéal de Michelson est constitué :

- d'une lame séparatrice Sp semi-réfléchissante d'épaisseur nulle ;
- de deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ plans parfaitement réfléchissants inclinés à 45° par rapport à Sp ;
- d'une lentille $\mathcal{L}$ stigmatique : on observe dans le plan π.
- pour $\ell = 0$ les miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont exactement symétrique par rapport à Sp.
- les points M_2 et M sont conjugués par rapport à la lentille $\mathcal{L}$.



1. Une source ponctuelle S, monochromatique de longueur d'onde λ_0, est placée sur l'axe Ix à distance finie. On note S_2 l'image de S par rapport aux réflexions successives sur Sp puis $\mathcal{M}_2$, et S_1' celle de S par rapport aux réflexions sur Sp puis $\mathcal{M}_1'$ (miroir symétrique de $\mathcal{M}_1$ par rapport à Sp).

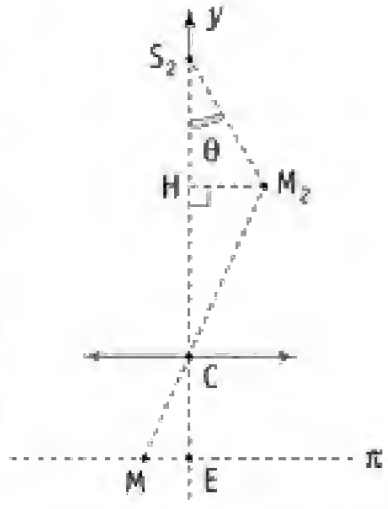
a. Montrer que l'on peut remplacer l'appareil (source S, séparatrice, miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$) par les deux sources secondaires S_2 et S_1'. Sont-elles en phase ? Déterminer leur distance S_2S_1'.

Copyrighted material

b. On suppose $S_2H = D \gg \ell$ et l'angle θ est petit.

Calculer l'intensité lumineuse en M. On se limitera aux termes du second ordre en θ.

Qu'observe-t-on sur l'écran confondu avec le plan π ?



c. Le grandissement de la lentille est $|\gamma|$ en valeur absolue. On suppose que le centre de la figure d'interférences correspond à un maximum d'intensité.

Déterminer le rayon R_n du $n^{ième}$ anneau lumineux en fonction de $|\gamma|$, λ_0, ℓ, D et n.

d. Que se passe-t-il lorsqu'on augmente ℓ à partir de $\ell = 0$; lorsque à ℓ fixé on déplace la source ponctuelle S parallèlement à $\vec{u}_y$?

e. Les rayons incidents sont maintenant issus d'une source étendue incohérente (λ_0) assimilable à un disque de rayon R centré sur S et perpendiculaire à $\vec{u}_y$.

Comment est modifiée la figure d'interférence par rapport à S ponctuelle ? Évaluer l'ordre de grandeur N du nombre (supposé grand) d'anneaux visibles. Commenter le résultat obtenu : on envisagera le cas $D \to \infty$.

2. la source est spatialement étendue autour de S. On fait varier ℓ de 0 à $L > 0$ et on observe au foyer F' de la lentille $\mathscr{L}$ où un détecteur « ponctuel » mesure l'intensité $I(\delta)$, δ représentant la différence de marche des rayons en F'. Un logiciel de calcul permet alors de déterminer la quantité :

$$G(\omega) = \int_0^{\delta_{max}} I(\delta)\cos\left(\frac{\omega\,\delta}{c}\right)d\delta.$$

a. La source est monochromatique de pulsation $\omega_0 = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0}$. Donner $G(\omega)$.

b. La source comprend deux raies très fines de pulsations ω_1 et ω_2 de part et d'autre de ω_0. Représenter la courbe associée à $G(\omega)$. À quelle condition ce dispositif permet-t-il de résoudre les deux raies ? En déduire le pouvoir de résolution $\mathscr{R}$ défini par :

$$\mathscr{R} = \frac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|_{min}}.$$

Solution

1. a. ■ Soit une source ponctuelle S placée sur l'axe Ix. Deux rayons issus de S sont susceptibles de venir interférer en M.

Le premier résulte d'une réflexion sur Sp puis d'une autre sur $\mathscr{M}_2$, l'émergent correspondant doit passer par M_2 image de M par rapport à $\mathscr{L}$.

Pour ce rayon, on a un chemin optique $\mathscr{L}_2(S, M)$ tel que :

$$\mathscr{L}_2(S, M) = [SM_2] + [M_2M] = [SI_2M_2] + [M_2M]$$

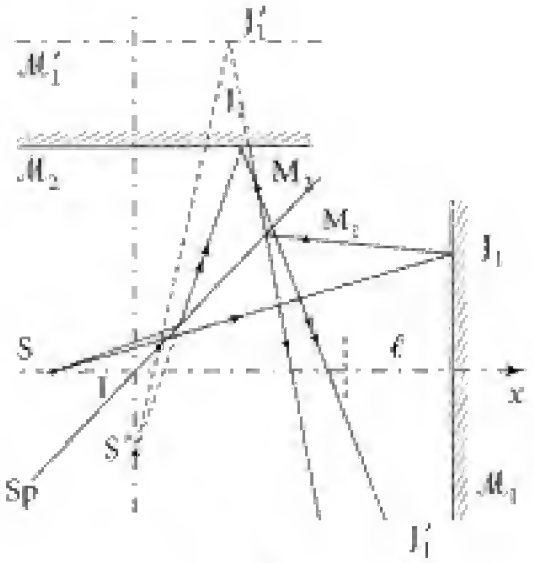
Copyrighted material

Le deuxième rayon correspond à la traversée de Sp, réflexion sur $\mathcal{M}_1$ puis sur Sp. Le rayon réfléchi par $\mathcal{M}_1$ doit passer par le point M_1 symétrique de M_2 par rapport à Sp (chemin $S \to Sp \to J_1 \to M_1$ symétrique du chemin $S \to Sp \to J_1' \to M_2$).

On a donc un chemin optique :

$$\mathcal{L}_1(S, M) = [SM_1] + [M_1M]$$
$$= [SJ_1M_1] + [M_1M]$$

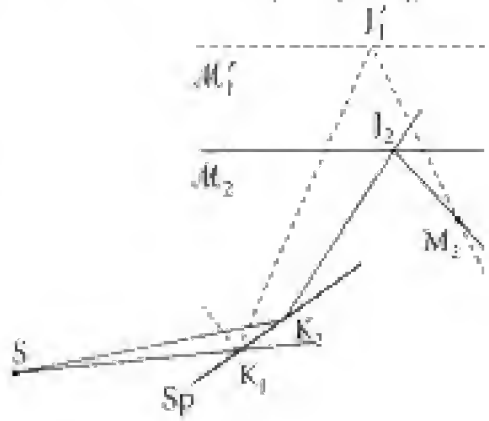
$$\mathcal{L}_1(S, M) = [SJ_1'M_2] + [M_2M].$$



Finalement :

$$\mathcal{L}_2(S, M) - \mathcal{L}_1(S, M) = [SJ_2M_2] - [SJ_1'M_2]$$

et $$\Delta\phi(S, M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\{[SJ_2M_2] - [SJ_1'M_2]\} \quad (1)$$



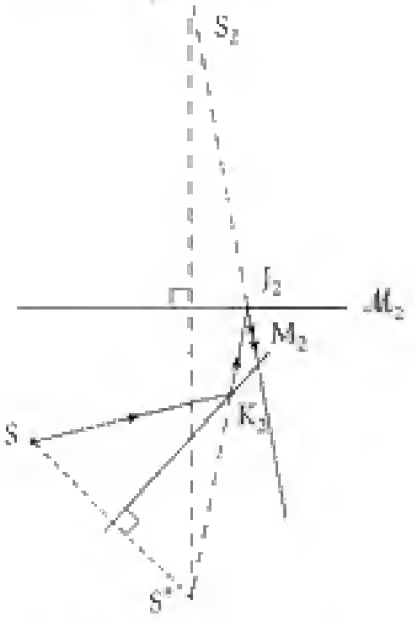
■ Dans le cadre de l'optique géométrique, le rayon issu de S et passant par le point M_2 après réflexion sur Sp et $\mathcal{M}_2$ semble provenir du point S_2 tel que :

$$S \xrightarrow{Sp} S^* \xrightarrow{\mathcal{M}_2} S_2$$

De la même façon on a :

$$S \xrightarrow{Sp} S^* \xrightarrow{\mathcal{M}_1'} S_1'$$

■ On peut alors substituer au montage $\{S, Sp, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ deux points secondaires S_2 et S_1'.



De plus

$$[SK_2J_2M_2] = SK_2 + K_2J_2 + J_2M_2 = \underbrace{S^*K_2 + K_2J_2}_{S^*J_2 = S_2J_2} + J_2M_2 = S_2J_2 + J_2M_2 = S_2M_2$$

de même $[SK_1J_1'M_2] = S_1'M_2$

on a donc $$\Delta\phi(S, M) = \frac{2\pi}{\lambda}\{S_2M_2 - S_1'M_2\} \quad (2)$$

Copyrighted material

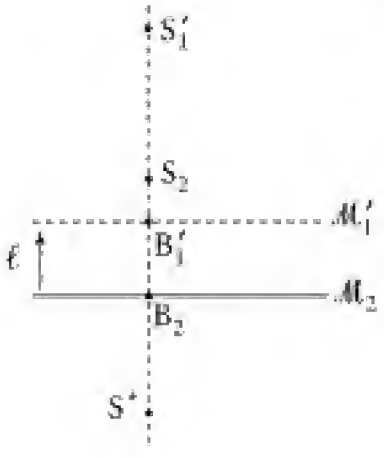
Commentaire

Les deux sources S_2 et S_1' sont cohérentes et en phase. Il reviendrait au même d'écrire $[SK_2I_2M_2] = [SS_2] + [S_2M_2]$, où $[SS_2] = 0$ (S et S_2 images l'un de l'autre après une succession de réflexions sur des surfaces planes parfaitement stigmatiques).

■ Calculons S_2S_1':

On a $\left.\begin{aligned} S^*S_1' &= 2S^*B_1' \\ S^*S_2 &= 2S^*B_2 \end{aligned}\right\} S_2S_1' = 2(S^*B_1' - S^*B_2)$

soit $\boxed{S_2S_1' = 2\ell}$ (3)



b. La différence de marche au point M est donnée par :

$$\delta(S, M) = S_2M_2 - S_1'M_2 .$$

Rappelons que les chemins optiques $[M_2M]_{(1)}$ et $[M_2M]_{(2)}$ sont égaux (lentilles stigmatiques dans les conditions d'utilisation...)

Or $S_2M_2 = \dfrac{S_2H}{\cos\theta} = \dfrac{D}{\cos\theta} \sim D \cdot \left(1 + \dfrac{\theta^2}{2}\right)$

et $S_1'M_2 = ((D + 2\ell)^2 + D^2\tan^2\theta)^{1/2}$

$= (D + 2\ell) \cdot \left(1 + \left(\dfrac{D\tan\theta}{D + 2\ell}\right)^2\right)^{1/2}$

soit $S_1'M_2 \# D + 2\ell + \dfrac{D^2}{D + 2\ell} \cdot \dfrac{\theta^2}{2}$

d'où $S_2M_2 - S_1'M_2 = D \cdot \left(1 + \dfrac{\theta^2}{2}\right)$

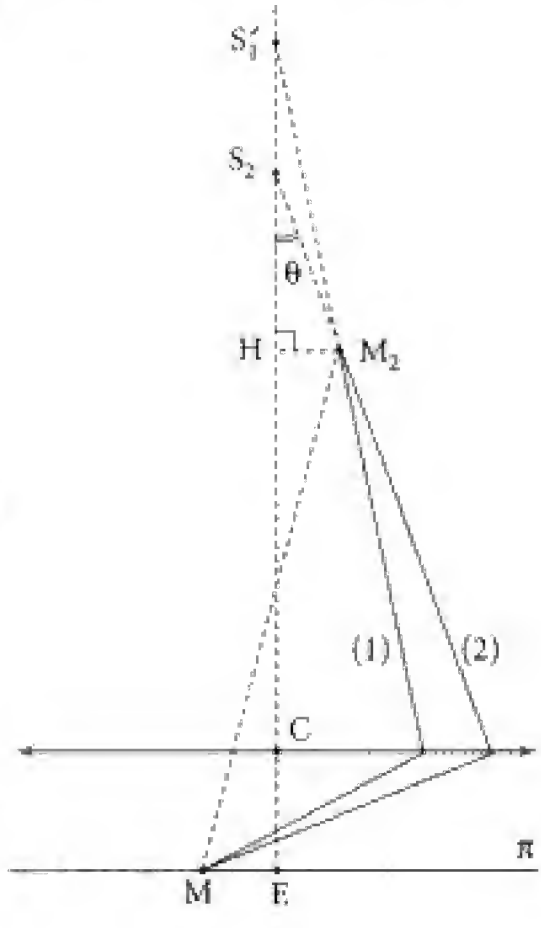
$- D - 2\ell - \dfrac{D^2}{D + 2\ell} \cdot \dfrac{\theta^2}{2}$

$\delta = -2\ell + \dfrac{\theta^2}{2} D\left(1 - \dfrac{D}{D + 2\ell}\right)$

$\rightarrow \boxed{\delta = -2\ell\left(1 - \dfrac{\theta^2}{2}\right)}$ $(D \gg \ell)$.

On obtient donc une différence de phase :

$\Delta\phi = -\dfrac{4\pi\ell}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \dfrac{\theta^2}{2}\right)$.



Copyrighted material

Les rayons venant interférer au point M ayant la même intensité :

$$I(M) = 2I_0 \cdot (1 + \cos\Delta\phi).$$

Finalement :

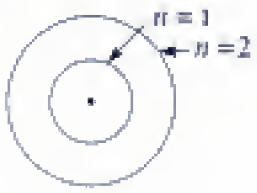
$$I(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos\frac{4\pi\ell}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right] \quad (4)$$

L'état d'interférence dans le plan π ne dépend donc que de θ (à λ_0 et ℓ fixés). L'ensemble des points M de même intensité correspond donc, dans le plan conjugué π′ (de π par rapport à $\mathcal{L}$), à un cercle (θ = cste) d'axe S_2S_1'. Son image dans π est également un cercle de centre E. La figure d'interférences obtenue dans π est ainsi formée d'anneaux concentriques.

c. L'ordre d'interférence en M vaut :

$$p(M) = \frac{2\ell}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

(on a pris $p = \dfrac{\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2}{\lambda_0} > 0$ pour $\ell > 0$) soit un ordre au centre $p(M) = \dfrac{2\ell}{\lambda_0}$ entier d'après l'énoncé (maximum d'intensité au centre de la figure d'interférences) : $p(E) = \dfrac{2\ell}{\lambda_0} = m$ (m entier).



Les anneaux brillants correspondent alors à des valeurs θ_n de θ telles que $p(\theta_n) = m - n$ (p diminue quand θ augmente)

d'où $\dfrac{2\ell\,\theta_n^2}{2\lambda_0} = n \rightarrow \theta_n = \left(\dfrac{n\lambda_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\{n = 1, 2\ldots\}$.

Le lieu des points M_2 est un cercle de rayon :

$$R_n' = D \cdot \theta_n = D \cdot \left(\frac{n\lambda_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et les rayons R_n des anneaux brillants valent $R_n = |\gamma| R_n'$

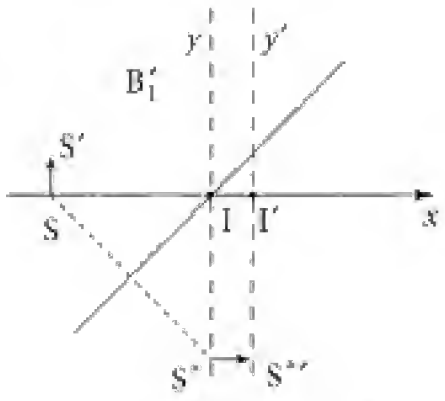
soit $\boxed{R_n \# |\gamma| D \cdot \left(\dfrac{n\lambda_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}}$ (5)

d. ■ Lorsque $\ell = 0$, il n'y a pas d'anneaux. On observe une *teinte plate* (intensité uniforme). Lorsque ℓ augmente des anneaux apparaissent. Leur nombre est d'autant plus grand que ℓ est important : les anneaux semblent naître au centre de la figure d'interférences et disparaître sur le bord (pour un anneau d'ordre j donné, on a en effet $p_j = \dfrac{2\ell}{\lambda_0}\left(1 - \dfrac{\theta_j^2}{2}\right) = j$: quand ℓ augmente, θ_j croît pour un anneau d'ordre d'interférence fixé).

D'autre part $\dfrac{\ell}{\lambda_0}(\theta_{j+1}^2 - \theta_j^2) =$ cte : les anneaux se resserrent quand ℓ augmente…

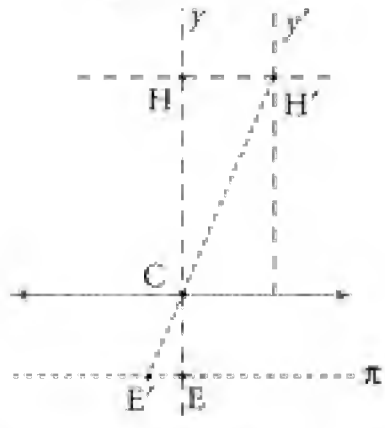
Copyrighted material

■ Si l'on translate S perpendiculairement à Ox, et donc par exemple parallèlement à Oy, la source image par rapport à Sp passe de S^* à $S^{*\prime}$ et donc se translate de la même quantité selon $\vec{u}_x$. Il en est de même de S_1' et de S_2. Dans le plan π', l'axe des cercles passe de Iy à $I'y'$:



$\theta = 0$ correspond maintenant au point E' image de H'. La frange brillante associée à θ_n est l'image dans π du cercle de π' de centre H' et de rayon R_n'. Si l'on reste dans l'approximation de Gauss, il s'agit d'un cercle de rayon $R_n = |\gamma| R_n'$ centré en E' image de H' à travers $\mathscr{L}$. Dans ces conditions on observera la même figure d'interférences translatée de :

$$\overrightarrow{EE'} = -|\gamma| \overrightarrow{HH'}.$$



e. Considérons maintenant un disque source centré sur S et perpendiculaire à $\vec{u}_x$. Il constitue une source plane incohérente et monochromatique (λ_0).

Chaque « point » du disque source se déduit du « point central S » par une translation $\overrightarrow{SS'}$.

Les différentes intensités associées aux points S, S'... s'ajoutent (incohérence). Or la figure d'interférences due à S' se déduit de celle due à S par une translation dans le plan π telle que $-|\gamma| \overrightarrow{S^*S^{*\prime}}$. Il va donc y avoir apparition *d'un brouillage* qui va se manifester dans un premier temps sur le bord de la figure d'interférences (les anneaux y sont plus serrés), et qui sera d'autant plus important que ℓ est grand.

Pour évaluer le nombre N d'anneaux visibles, il suffit de traduire que l'observation pourra s'effectuer jusqu'au rang $n = N$ tant que $R_{n+1}' - R_n' \geqslant 2R$ (« distance » entre les anneaux n et $n+1$ supérieure à « l'élargissement » d'un anneau dû au rayon R de la source). D'où la condition :

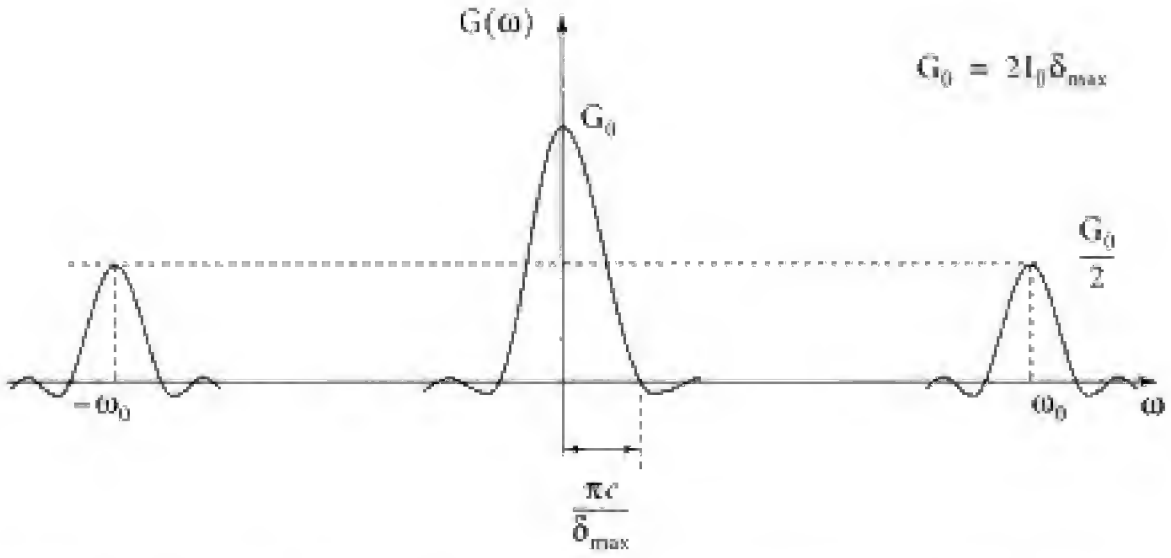
$$\left.\begin{array}{l} D\left(\dfrac{\lambda_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{N+1} - \sqrt{N}) \geqslant 2R \\ \text{Et pour N grand : } \sqrt{N+1} - \sqrt{N} = \dfrac{1}{\sqrt{N+1} + \sqrt{N}} \simeq \dfrac{1}{2\sqrt{N}} \end{array}\right\} N \leqslant \frac{D^2\lambda_0}{16\ell R^2} \quad (6)$$

N est d'autant plus grand que R est petit, ce qui est normal (étendue plus faible de la source).

L'expression précédente permet de conclure qu'il suffit de rendre D infini, et donc de confondre le plan π avec le plan focal image de $\mathscr{L}$: il s'agit d'une *observation à l'infini*. Il n'y a plus de brouillage.

Copyrighted material

Hidden page



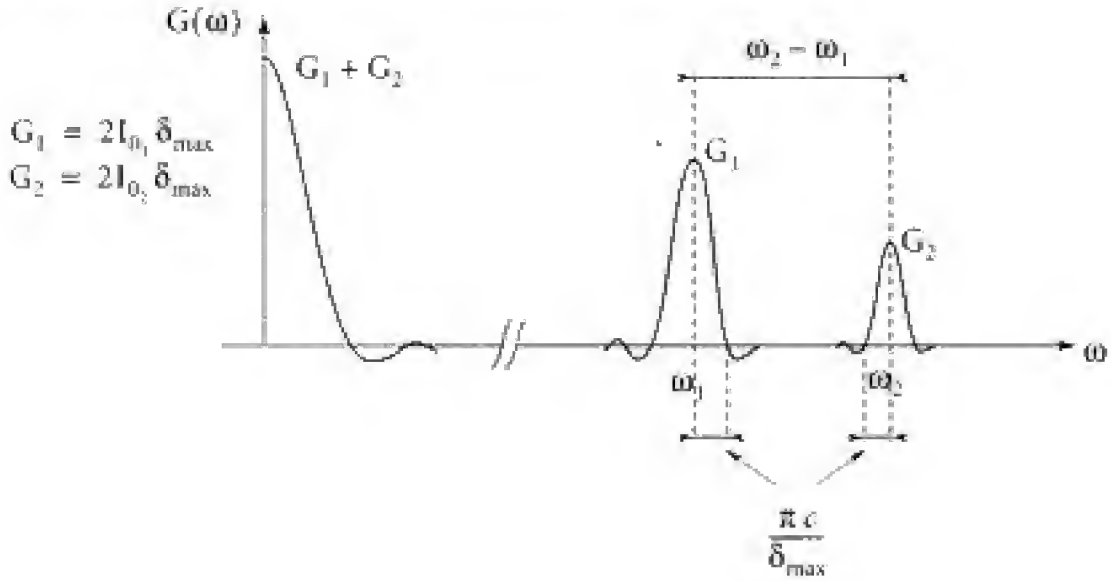
Pour $\omega > 0$, on observe un pic centré sur ω_0 et de demi-largeur aux pieds égale à $\frac{\pi c}{\delta_{max}}$. Il est bien séparé du pic central pour $\omega_0 \gg \frac{\pi c}{\delta_{max}}$.

b. Dans le cas de deux raies de pulsation ω_1 et ω_2 ($\omega_1 = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}$), on a :

$$G(\omega) = G_1(\omega) + G_2(\omega) \quad \text{avec :}$$

$$\begin{cases} G_1(\omega) = 2I_{0_1}\delta_{max}\left\{\text{sinc}\left[\frac{\omega\,\delta_{max}}{c}\right] + \frac{1}{2}\text{sinc}\left[\frac{(\omega-\omega_1)\delta_{max}}{c}\right] + \frac{1}{2}\text{sinc}\left[\frac{(\omega+\omega_1)\delta_{max}}{c}\right]\right\} \\ G_2(\omega) = 2I_{0_2}\delta_{max}\left\{\text{sinc}\left[\frac{\omega\,\delta_{max}}{c}\right] + \frac{1}{2}\text{sinc}\left[\frac{(\omega-\omega_2)\delta_{max}}{c}\right] + \frac{1}{2}\text{sinc}\left[\frac{(\omega+\omega_2)\delta_{max}}{c}\right]\right\} \end{cases}$$

Soit dans le cas où les pics sont suffisamment bien séparés :



Copyrighted material

La transformée de Fourier $G(\omega)_c$ en cosinus, de l'interférogramme $I(S)$ peut permettre de discerner l'existence de deux raies de pulsation ω_1 et ω_2, et ainsi de remonter au spectre de la source.

Adoptons pour critère de séparation celui retenu par Rayleigh : la distance entre les pics doit être au moins égale à leur largeur (évaluée à $\frac{\pi c}{\delta_{max}}$ d'après ce qui précède).

D'où $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \geqslant \frac{\pi c}{\delta_{max}}$ soit $(\omega_2 - \omega_1)_{min} = \frac{\pi c}{\delta_{max}}$ où $\delta_{max} = 2L$

soit un pouvoir de résolution :

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)_{min}} \rightarrow \boxed{\mathcal{R} = \frac{\omega_0 \delta_{max}}{\pi c} = \frac{2L\omega_0}{\pi c}}$$

Commentaire

• Le nombre N' de maxima d'intensité enregistrés en F' quand ℓ varie de 0 à L est :

$$N' = \frac{\delta_{max}}{\lambda_0} = \frac{2L}{\lambda_0} = \frac{2L\nu_0}{c} = \frac{L\omega_0}{\pi c}, \text{ soit } \mathcal{R} = 2N'.$$

• Pour résoudre le doublet du sodium ($\langle\lambda\rangle = 0{,}589\ \mu m$, $\Delta\lambda = 6\ \mathring{A}$), on doit avoir :

$$2L \geqslant \frac{\pi c}{\Delta\omega} \rightarrow 2L \geqslant \frac{\pi c}{2\pi\Delta\nu} \neq \frac{\pi c}{2\pi c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}} \rightarrow L \geqslant \frac{\lambda^2}{4\Delta\lambda}$$

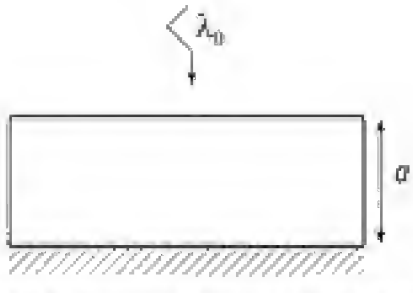
soit $L \geqslant 0{,}6$ mm.

• Une raie spectrale de largeur $\Delta\omega$ et centrée sur ω_0 pourra être résolue pour :

$$\Delta\omega \geqslant \frac{\pi c}{\delta_{max}}.$$

107 Couleurs interférentielles

Une lame à faces parallèles d'épaisseur $a = 60\ \mu m$ est posée sur un miroir plan. L'ensemble est éclairé, en incidence normale, par un faisceau parallèle de lumière monochromatique (longueur d'onde $\lambda_0 = 0{,}59\ \mu m$). L'indice n de la lame sera pris égal à 1. Le miroir plan sera assimilé à un métal parfait.



Le matériau constituant la lame est photosensible. On admet qu'après traitement tout se passe comme si chaque plan ventral de E^2 (où $\vec{E}$ est le champ résultant associé au montage décrit ci-dessus) était assimilable à un « miroir » de très faible pouvoir réflecteur.

1. a. Quelle est la distance d séparant deux plans ventraux ? Déterminer leur nombre N.

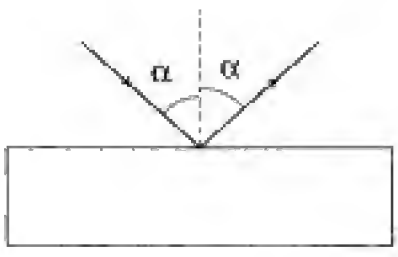
Copyrighted Material

b. On éclaire la lame ainsi traitée (il n'y a plus de miroir) par la lumière blanche. L'incidence est normale et on observe par réflexion perpendiculairement à la lame.

Montrer que le faisceau réfléchi est sélectivement coloré.

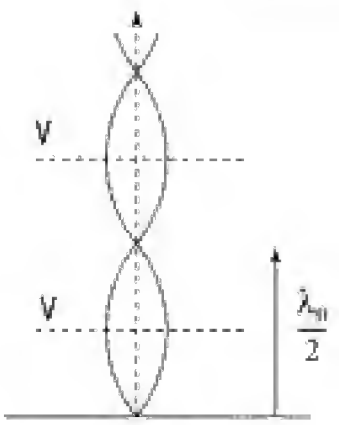
c. On cherche à évaluer la « qualité » de cette couleur. À cet effet, on calculera le pouvoir réflecteur en énergie R de la lame en fonction de R_0 (valeur de R pour λ_0), de N et du rapport $\frac{\lambda_0}{\lambda}$: on considérera que l'amplitude du faisceau traversant la lame n'est « pas » affectée par les réflexions sur les « miroirs ». En déduire l'incertitude sur la longueur d'onde détectée.

2. On répète l'expérience précédente (**1. b.**) avec une incidence α pour la lumière blanche. On observe dans la direction associée à la lumière « réfléchie » (*cf.* figure), que se passe-t-il ?



Solution

1. a. La superposition des ondes incidente et réfléchie donne naissance à une onde stationnaire dont deux ventres consécutifs (respectivement deux nœuds) de $|\vec{E}|$ sont distants de $\frac{\lambda_0}{2}$.



Les ventres de E^2 sont donc situés en :

$$Z = \frac{\lambda_0}{4} + p\frac{\lambda_0}{2} \quad (1)$$

Leur nombre N dans l'épaisseur a du matériau est :

$$N = 1 + E\left\{\frac{a - \frac{\lambda_0}{4}}{\frac{\lambda_0}{2}}\right\}$$

Soit $a = 60\ \mu m$ et $\lambda_0 = 0{,}59\ \mu m$: $N \cong 203$.

Commentaire

Prenons, pour une longueur d'onde donnée λ_0, l'onde incidente sous la forme d'une OPPH $\underline{\vec{E}_i} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{i(\omega t + kz)}$ ($\underline{\vec{E}_0}$ perpendiculaire à $\vec{u}_z$ et $k = \frac{\omega}{c}$).

Le miroir plan (ici métal parfait) génère l'onde réfléchie :

$\underline{\vec{E}_r} = -\underline{\vec{E}_0}\, e^{i(\omega t - kz)}$ (on a $\underline{\vec{E}_i}(t, 0^+) + \underline{\vec{E}_r}(t, 0^+) = \vec{0}$: continuité de $\vec{E}_{tg}$ et champ nul dans le métal parfait).

Copyrighted material

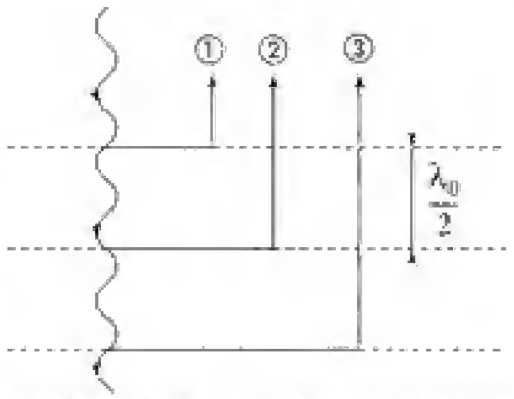
La superposition de ces deux ondes donne :

$$\vec{E}_t(t, z) = \underline{\vec{E}_0} \cdot (e^{jkz} - e^{-jkz}) e^{j\omega t} = 2\underline{\vec{E}_0} j \sin kz \, e^{j\omega t}$$

E^2 varie donc avec z comme $\sin^2(kz)$. Les ventres (amplitude maximale de E^2) correspondent donc à $\sin^2(kz) = 1$, c'est-à-dire à $kz = \frac{\pi}{2} + p\pi$.

Or $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, d'où $z = \frac{\lambda_0}{4} + p\frac{\lambda_0}{2}$ (relation (1)).

b. La lame traitée est alors éclairée en incidence normale par de la lumière blanche. Elle est équivalente à un ensemble de N plans réflecteurs distants de $\frac{\lambda_0}{2}$ et de très faibles pouvoirs réflecteurs. On va donc supposer que l'onde traverse le matériau pour ainsi dire sans modification, chaque plan n'en renvoyant qu'une « infime » partie.



Isolons alors « une » longueur d'onde λ du faisceau incident, les faisceaux réfléchis correspondants 1, 2, 3… peuvent interférer entre eux.

La différence de marche entre deux faisceaux consécutifs (1 et 2 par exemple) est :

$$\delta = 2 \cdot \frac{\lambda_0}{2} = \lambda_0.$$

Il y aura donc des **interférences constructives** pour la longueur d'onde λ si $\delta = p\lambda$ où p est entier.

($\delta = p\lambda$ entraine une différence de phase $\Delta\phi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 2\pi p$: les faisceaux 1 et 2 sont en phase).

Soit pour :

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{p}}$$

Or pour $\lambda_0 = 0{,}59\ \mu m$ seule la valeur $p = 1$ donne une onde dans le visible (pour $p = 2$ on a $\lambda = \frac{0{,}59}{2} = 0{,}295\ \mu m$, ce qui se situe dans l'ultraviolet).

Ainsi dans cette approximation on obtient un maximum de lumière réfléchie pour $\lambda = \lambda_0 = 0{,}59\ \mu m$, c'est-à-dire pour une lumière jaune.

c. Pour évaluer la « qualité » de cette couleur calculons l'intensité associée à une longueur d'onde donnée. Elle est proportionnelle au pouvoir réflecteur R de la lame que l'on peut évaluer en sommant les amplitudes complexes des ondes réfléchies **1, 2, 3**…

En notant a_1 l'amplitude complexe associée à l'onde 1, il vient (on admet que le faisceau traversant la lame est très peu atténué du fait des réflexions sur les « plans ventraux »…) :

$$\underline{a_2} = \underline{a_1}\exp\left(-j2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad \underline{a_m} = \underline{a_1}\exp\left[-j\,2\pi(m-1)\frac{\delta}{\lambda}\right]$$

Copyrighted material

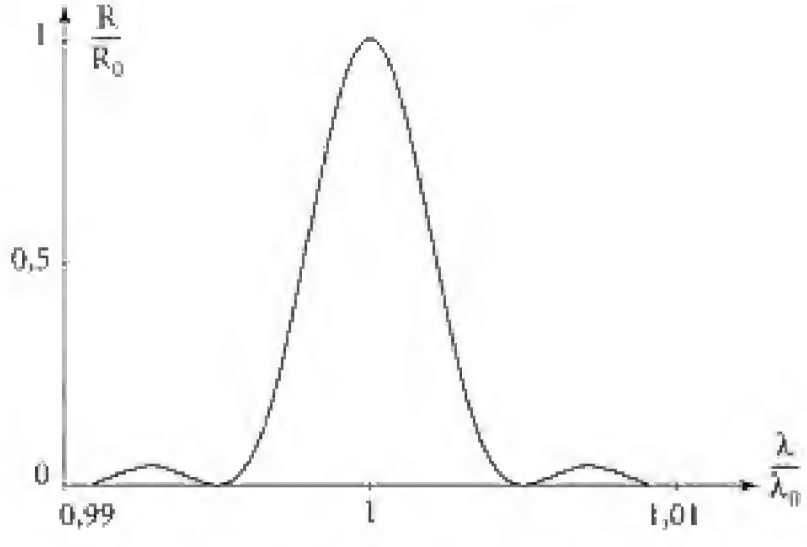
soit $\underline{A} = \sum_{m=1}^{N} \underline{a_m} = \underline{a_1} \sum_{m=1}^{N} \exp\left[-j\,2\pi(m-1)\frac{\delta}{\lambda}\right] = \underline{a_1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[-j\,2\pi n\frac{\delta}{\lambda}\right]$

d'où $\underline{A} = \underline{a_1}\dfrac{1-\exp\left(-j\,2\pi N\frac{\delta}{\lambda}\right)}{1-\exp\left(-j\,2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)} = \underline{a_1}\dfrac{\exp\left(-j\,\pi N\frac{\delta}{\lambda}\right)}{\exp\left(-j\,\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)}\left[\dfrac{\sin\left(\pi N\frac{\delta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)}\right]$.

Le pouvoir réflecteur $\mathcal{R}$ est alors proportionnel à $|A|^2$:

Posons : $R = R_0 \cdot \left[\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}N\delta\right)}{N\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right)}\right]^2$ avec $\delta = \lambda_0$ et $R_0 = R(\lambda_0)$.

On a représenté ci-dessous le graphe de $\dfrac{R(x)}{R_0}$ où $x = \dfrac{\lambda}{\lambda_0}$.



Le crochet est maximal et vaut 1 pour $\lambda = \lambda_0$. Pour $\lambda = \lambda_0 + \dfrac{\Delta\lambda}{2}$ il prend une valeur nulle, avec :

$$N\pi\frac{\lambda_0}{\lambda} = N\pi - \pi.$$

Soit : $N\dfrac{\lambda_0}{\lambda} = N-1 \rightarrow \dfrac{\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{N}{N-1} = 1 + \dfrac{1}{N-1}$.

On obtient :

$$\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0} = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{2\lambda_0}{N}}$$

La longueur d'onde λ_0 est donc « sélectionnée » avec une incertitude de l'ordre de $\pm\dfrac{\lambda_0}{N}$, c'est-à-dire à mieux de 3 nm près.

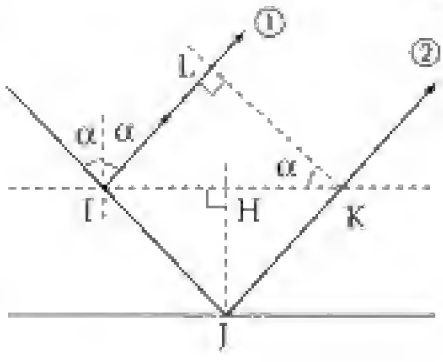
Copyrighted material

Commentaire

On retrouve la grande sélectivité due aux interférences à ondes multiples (*cf.* réseaux, interféromètre de Fabry-Pérot…)

2. Pour une incidence α et une longueur d'onde λ la différence de marche devient :

$$\delta = IJ + JK - IL.$$



Or $$IJ = JK = \frac{\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)}{\cos\alpha}$$

et $IL = IK\sin\alpha = 2IH\sin\alpha = 2\cdot\frac{\lambda_0}{2}\tan\alpha\sin\alpha.$

D'où $IL = \lambda_0\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ et $\delta = \frac{\lambda_0}{\cos\alpha} - \lambda_0\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$

Soit $$\delta = \frac{\lambda_0}{\cos\alpha}(1-\sin^2\alpha) \rightarrow \delta = \lambda_0\cos\alpha.$$

Commentaire

On retrouve bien entendu l'expression de la différence de marche associée à l'interféromètre de Michelson dans la configuration lames à faces parallèles :

$\delta = 2e\cos i$ avec ici $e = \frac{\lambda_0}{2}$ et $i = \alpha \rightarrow \delta = 2\frac{\lambda_0}{2}\cos\alpha = \lambda_0\cos\alpha.$

La longueur d'onde associée à un maximum (interférences constructives) correspond alors à :

$$\delta = p\lambda \rightarrow \lambda_0\cos\alpha = p\lambda.$$

Soit pour $p = 1$ $$\boxed{\lambda = \lambda_0\cos\alpha} \quad (\lambda \leqslant \lambda_0)$$

On isole ainsi une « couleur » différente que l'on peut ainsi choisir en modifiant l'angle d'incidence α. Si l'on désire par exemple une couleur verte à 0,52 Å il faut faire :

$$\cos\alpha = \frac{0{,}52}{0{,}59} \rightarrow \alpha \equiv 28°.$$

Copyrighted material

Copyrighted material

Hidden page

201 Apodisation

1. Le pouvoir de transmission en amplitude d'une plaque photographique $t(x, y)$ vaut :

$t(x, y) = 1 - \frac{|x|}{a}$ pour $-a \leqslant x \leqslant a$ et $-\frac{L}{2} \leqslant y \leqslant \frac{L}{2}$, $t(x, y) = 0$ ailleurs.

On supposera que L est très grand devant la longueur d'onde λ.

On l'éclaire, sous incidence normale, par une onde plane monochromatique. On observe la figure de diffraction à l'infini (c'est-à-dire sur un écran confondu avec le plan focal image d'une lentille convergente).

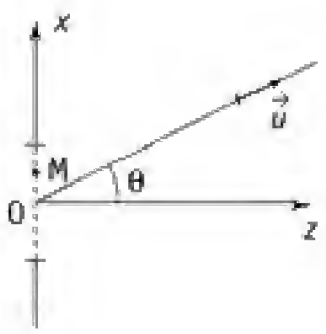
a. Calculer l'intensité de la figure de diffraction dans des directions du plan xOz faisant un angle faible θ ($\theta \ll 1$) avec la direction de l'onde incidente.

On exprimera l'intensité I en fonction de θ, a et de λ.

On donne : $$\int_{-1}^{1} (1 - |\eta|) e^{j\omega\eta} d\eta = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2 .$$

b. Comparer au résultat correspondant à une simple fente de largeur a et de même longueur L. Commenter.

2. Une pupille diffractante plane parallèle à Oy, de largeur a (entre $x = -\frac{a}{2}$ et $x = +\frac{a}{2}$) a une longueur L très grande devant la longueur d'onde λ. On s'intéressera donc à la diffraction à l'infini dans les directions $\vec{u}(\theta)$ du plan de figure Oxz. On se limitera aux petites valeurs de θ ($\sin\theta \approx \theta$).



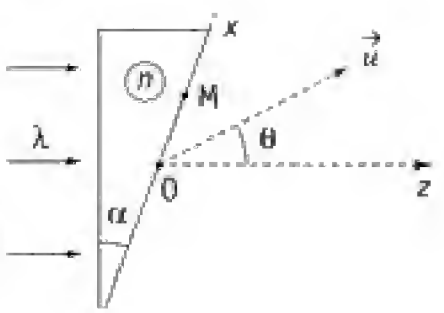
a. L'amplitude complexe de l'onde incidente (monochromatique de longueur d'onde λ) arrivant au point M de la pupille est donnée par :

$$\Psi(M) = \underline{a_0} \exp(-jk\alpha' x), \text{ où } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Calculer l'intensité $I(\theta)$. On posera $I_0 = I[\theta = \alpha']$.

b. La même fente de largeur moitié a est placée derrière un prisme de *petit* angle au sommet α et d'indice n. Ce prisme est éclairé en incidence normale par un faisceau de rayons parallèles de longueur d'onde dans le vide λ.

Étudier la lumière diffractée dans la direction θ du plan de figure. Commenter les résultats obtenus.



1. Ce qu'il faut savoir

- Principe d'Huygens-Fresnel.

Copyrighted material

- Diffraction à l'infini par une pupille plane.
- Facteur de transparence.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On décompose la pupille en fentes de largeur dx et on cherche l'amplitude diffractée dans une direction $\vec{u}$ du plan xOz (les ondes interférant à l'infini étant associées à des rayons parallèles).

2. La traversée du prisme par l'onde incidente entraîne un déphasage dépendant de l'épaisseur au point M et donc de l'abscisse x.

3. Solution

1. a.

POINT MÉTHODE

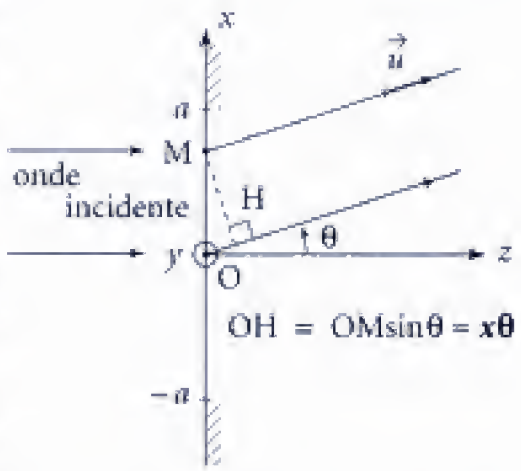
Le motif diffractant étant très grand (par rapport à la longueur d'onde λ) dans la direction Oy, il n'y aura pratiquement d'intensité diffractée (à l'infini, c'est-à-dire dans le plan focal de la lentille) que dans des directions $\vec{u}$ perpendiculaires à $\vec{u}_y$.

Plaçons-nous dans un plan perpendiculaire à Oy (figure ci-contre) pour calculer le déphasage entre les rayons issus de M (repéré par x) et le rayon issu de O. (Ces deux rayons sont parallèles, ils interfèrent bien à l'infini).

La différence de marche est OH, le déphasage vaut $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\text{OH} = k\text{OH} = k\theta x$.

Au niveau de l'écran, sur lequel se forme la figure de diffraction à l'infini, l'amplitude reçue, en provenance de la bande de largeur dx située à l'abscisse x, vaut $dx\left(1-\frac{|x|}{a}\right)e^{j\varphi}$,

(à une constante multiplicative près, la même pour tous les rayons de direction θ).



■ D'une autre manière, le *principe de Huygens-Fresnel* permet d'écrire (diffraction à l'infini ou dans le plan focal d'une lentille), en notant Ψ l'amplitude diffractée dans la direction $\vec{u}$: $\Psi(\vec{u}) = A\Psi_0\iint t(x,y)e^{jk\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}}dxdy$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Ψ_0 amplitude complexe de l'onde incidente (indépendante de M ici : incidence normale).

Or $\vec{u} = \cos\theta\vec{u}_z + \sin\theta\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$.

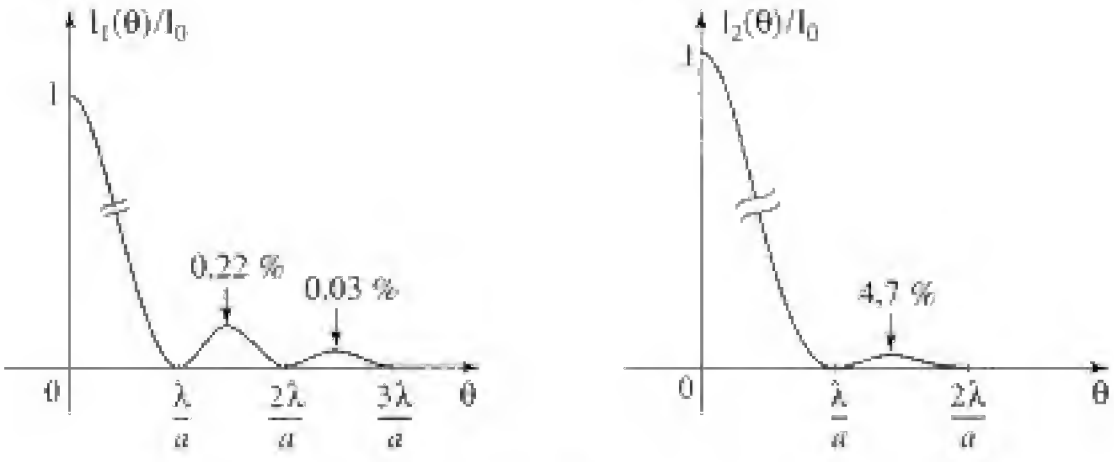
D'où (*cf.* point méthode) : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM} = x\sin\theta \approx x\theta$ (petits angles).

Copyrighted material

Hidden page

Ce qui justifie le résultat $I_1(0) = I_2(0) = I_0$.

■ Traçons les deux courbes $\theta \to \dfrac{I_1(\theta)}{I_0}$ et $\theta \to \dfrac{I_2(\theta)}{I_0}$:



L'intensité s'annule pour les mêmes valeurs de θ.

Dans les deux cas, la tache centrale a une largeur (aux pieds) double de celle des taches latérales. Mais pour la plaque photographique l'intensité décroît plus vite que pour une simple fente ;

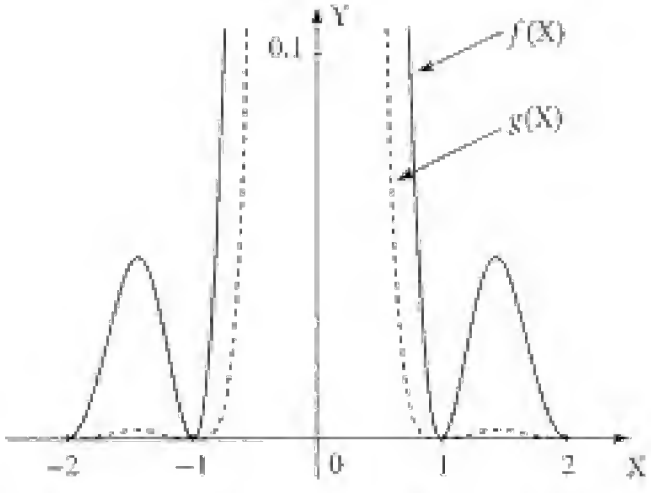
L'intensité du premier maxima secondaire vaut environ :

- $\dfrac{4{,}7}{100} I_0$ pour la simple fente de largeur a.
- $\dfrac{0{,}22}{100} I_0$ pour la plaque photographique de largeur $2a$.

Les pics latéraux sont donc fortement atténués (phénomène d'apodisation).

Commentaire

■ Donnons, sur un même graphe, les courbes $f(x) = \dfrac{I_1(x)}{I_0}$ et $g(x) = \dfrac{I_2(x)}{I_0}$ où $X = \dfrac{a\theta}{\lambda}$ (en mettant en évidence les pics secondaires) :



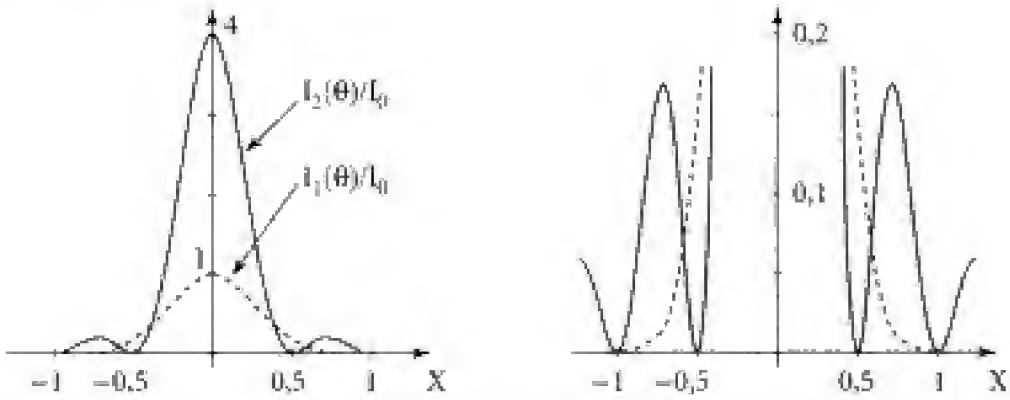
Avec $f(X) = sinc^2(\pi X)$ et $g(X) = sinc^4(\pi X)$

Copyrighted material

■ Dans le cas de la comparaison avec une fente simple de même largeur $2a$, on aurait obtenu :

$$I_1(\theta) = I_0 \sin c^2\left(\frac{\pi a\theta}{\lambda}\right) \text{ et } I_2(\theta) = 4I_0 \sin c^2\left(\frac{\pi 2a\theta}{\lambda}\right)$$

soient les courbes :



– L'intensité centrale ($\theta = 0$) est évidemment quatre fois plus intense pour la fente simple.

– Les pics secondaires restent « fortement » atténués dans le cas d'un facteur de transparence $t(x) = 1 - \frac{|x|}{a}$.

– Mais la largeur du pic central est deux fois plus grande pour une transparence en $t(x) = 1 - \frac{|x|}{a}$.

■ Le phénomène d'apodisation peut permettre d'observer deux « points » lumineux suffisamment proches et d'intensités « très » différentes sans que l'image du point le moins brillant soit occultée par le premier pic secondaire associé à l'image du point le plus brillant.

2. a. L'amplitude complexe de l'onde diffractée à l'infini, dans la direction du plan $\vec{u}(\theta)$ est donnée par (*principe d'Huygens-Fresnel*) :

$$\mathcal{A}(\theta) = K\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi(P)\exp(jk\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM})L\,dx \text{ où } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$\mathcal{A}(\theta) = Ka_0L\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\{jk(\sin\theta - \alpha')x\}dx.$$

Soit :

$$\text{D'où : } \mathcal{A}(\theta) = K'L\frac{\exp\left[jk(\sin\theta-\alpha')\frac{a}{2}\right] - \exp\left[-jk(\sin\theta-\alpha')\frac{a}{2}\right]}{jk(\sin\theta-\alpha')}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\mathcal{A}(\theta) = K'aL\frac{\sin\left[\pi(\theta-\alpha')\frac{a}{\lambda}\right]}{\left(\pi(\theta-\alpha')\frac{a}{\lambda}\right)} \quad (\sin\theta \sim \theta).$$

Copyrighted material

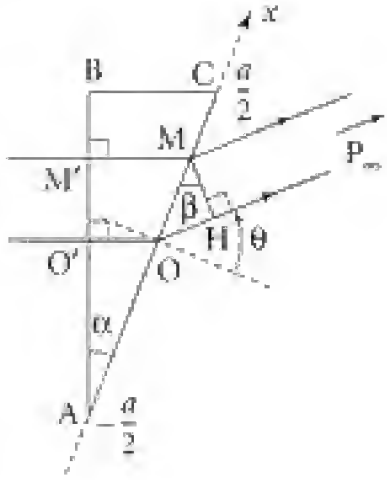
Et, en notant I_0 l'intensité maximale, on obtient, en passant au carré du module de l'amplitude :

$$I_0(\theta) = I_0\left[\frac{\sin\left[\pi(\theta-\alpha')\frac{a}{\lambda}\right]}{\pi(\theta-\alpha')\frac{a}{\lambda}}\right]^2 \quad (3)$$

On obtient une intensité maximale pour $\theta = \alpha'$.

b. Le principe d'Huygens-Fresnel peut encore s'écrire :

$$\Psi(\vec{u}) = K_1\Psi_0 e^{-jk[SOP]}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-jk[[SMP]-[SOP]]}\,dx \quad (4)$$



[ ] représente le chemin optique selon le trajet considéré.

Or $[SMP]-[SOP] = nM'M - (nO'O + OH)$

avec

$$\left.\begin{aligned} M'M = \alpha AM &= \alpha\left(\frac{a}{2}+x\right)\\ O'O &\approx \alpha\frac{a}{2}\end{aligned}\right\} \; n(M'M - O'O) \approx n\alpha x \; ;$$

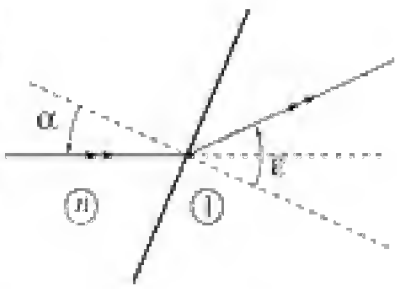
et $\quad OH = OM\sin\beta \sim x\beta$

$\qquad OH = x\theta \quad (\beta = \theta)$

d'où $\Psi(\vec{u}) = K\Psi_0' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\{-jk[n\alpha-\theta]x\}\,dx \quad (\Psi_0' = \Psi_0 e^{-jk[SOP]})$.

Cette intégrale est identique à celle obtenue au **2. a)** en posant $\alpha' = n\alpha$. On obtient donc un maximum de diffraction dans la direction $\theta = n\alpha$. Remarquons alors que cette direction correspond bien sûr à celle donnée par l'optique géométrique dans le cadre des angles (α et θ) petits. En effet, la loi de Descartes s'écrit :

$$n\sin\alpha = \sin\varepsilon \rightarrow \varepsilon \sim n\alpha.$$



Commentaire

Désignons par $\Psi_i(M)$ l'amplitude complexe de l'onde incidente en M en l'absence du prisme :

$\Psi_i(M) = \Psi_0\exp[-jkMM'] \; ; \quad \Psi_i(O) = \Psi_0\exp[-jkO'O]$

d'où $\Psi_i(M) = \Psi_i(O)e^{-jk(MM'-OO')}$.

On peut alors réécrire (4) selon :

$\Psi(\vec{u}) = K_1 e^{-jk[SOP]}\int \Psi_0 e^{-jk(nMM'-nOO'-OH)}\,dx$

$\Psi(\vec{u}) = K_1 e^{-jk[SOP]}\int e^{-jk(n-1)(MM'-OO')}\Psi_0 e^{-jk(MM'-OO')}e^{jkOH}\,dx.$

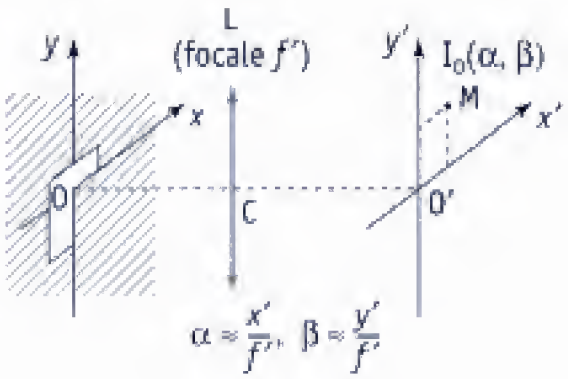
Or $OH = \vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}$ et $MM' - OO' = \vec{u}_0\cdot\overrightarrow{OM}$

Copyrighted material

Hidden page

2. L'intensité de la figure de diffraction d'un petit trou T_0 de forme quelconque, placé au voisinage de l'origine O du plan Oxy est, dans le plan $O'x'y'$ plan focal image de la lentille L, $I_0(\alpha, \beta)$.

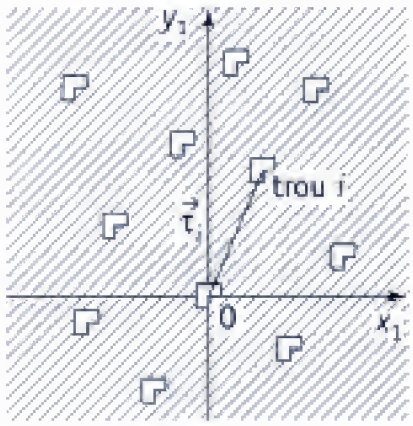
L'ouverture T_0 dans le plan Oxy, est éclairée par un faisceau monochromatique cohérent parallèle à l'axe OO' (montage habituel des expériences de diffraction).



On remplace le plan Oxy par le plan Ox_1y_1 percé d'un très grand nombre (N) de trous, identiques au premier, répartis au hasard.

On passe du trou initial T_0 au trou T_i par une translation :

$$\vec{\tau}_i = (a_i, b_i, 0).$$



a. Quelle est la figure de diffraction du trou i isolé (les autres étant occultés) ?

b. Quelle est la figure de diffraction de l'ensemble des trous du plan Ox_1y_1 ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Diffraction à l'infini.
- Principe d'Huygens-Fresnel.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Définir l'amplitude complexe $a(x, y)$ dans le plan xOy. Les opérations géométriques effectuées modifient la fonction $a(x, y)$. Il suffit alors d'examiner les transformations induites sur l'amplitude complexe diffractée $\underline{A}$, et donc sur l'intensité I (proportionnelle à $|\underline{A}|^2$).

2. Pour le **a.**, on établira un lien entre les amplitudes lumineuses, dans le plan xOy, associées aux trous T_0 et T_i. On montrera que la translation du trou T_0 ne modifie l'amplitude diffractée, dans une direction donnée $\vec{u}$, que par un terme de phase $(e^{jk\vec{u}\cdot\overrightarrow{OO_i}})$.

Pour le **b.**, il suffit de sommer les expressions précédentes des amplitudes diffractées par chaque trou, puis de tenir compte des déphasages à répartition aléatoire entre les différentes paires de trous (une somme telle que $\Sigma\Sigma\cos(k\vec{u}\cdot\overrightarrow{O_iO_j})$ pourra être alors considérée comme « nulle » pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$).

Copyrighted material

3. Solution

1. a. Soit $a(x, y)$ *l'amplitude* lumineuse dans le plan Oxy ($a(x, y) = a_0$ là où la lumière passe, $a(x, y) = 0$ là où la lumière ne passe pas).

La figure de diffraction dans le plan $F'x'y'$ a pour amplitude (*principe d'Huygens-Fresnel*) :

$$\underline{\mathcal{A}}(u, v) \# A\int_{\mathbb{R}^2} a(x, y)e^{jk(ux+vy)}dx\,dy.$$

Commentaire

L'exponentielle s'écrit en fait $\exp(jk\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\omega}')$, où M est un point de la pupille diffractante et $\vec{\omega}'$ le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{O'P}$. D'où :

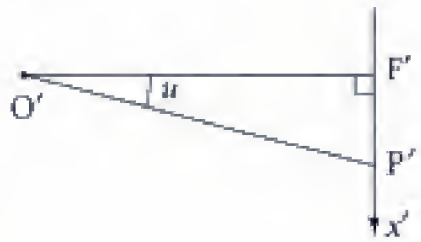
$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\omega}' = x\omega'_x + y\omega'_y$$

avec $$\omega'_x = \frac{\overrightarrow{O'P}}{O'P}\vec{u}_x = \frac{(\overrightarrow{O'F'}+\overrightarrow{F'P})}{O'P}\vec{u}_x = \frac{\overrightarrow{F'P}\cdot\vec{u}_x}{O'P}.$$

Soit P′ désignant la projection de P sur $F'x'$:

$$\omega'_x = \frac{\overline{F'P'}}{O'P} = \frac{\overline{F'P'}}{O'F'}\cdot\frac{O'F'}{O'P}$$

$$= \frac{O'F'}{O'P}\tan u.$$



L'angle u étant pris petit on a, au premier ordre en u :

$$\omega'_x \# u \quad (\tan u = u \quad \text{et} \quad \frac{O'F'}{O'P} = 1).$$

Après une homothétie de rapport η, la nouvelle amplitude $a'(x, y)$, dans le plan Oxy s'écrit :

$$a'(x, y) = a\left(\frac{x}{\eta}, \frac{y}{\eta}\right) \quad \begin{cases} a'(M_2) = a(M_1) \quad \text{avec} \quad (\overrightarrow{OM_2} = \eta\overrightarrow{OM_1}) \\ M_2(x, y) \to M_1\left(\dfrac{x}{\eta}, \dfrac{y}{\eta}\right) \end{cases}$$

Et la figure de diffraction devient :

$$\underline{\mathcal{A}}'(u, v) \# A\iint_{\mathbb{R}^2} a\left(\frac{x}{\eta}, \frac{y}{\eta}\right)e^{jk(ux+vy)}dx\,dy.$$

Posons : $X = \dfrac{x}{\eta}$ et $Y = \dfrac{y}{\eta}$, soit encore $dx\,dy = \eta^2 dX\,dY$.

D'où :

$$\underline{\mathcal{A}}'(u, v) = A\iint_{\mathbb{R}^2} a(X, Y)e^{jk[(\eta u)X+(\eta v)Y]}\eta^2\,dX\,dY.$$

Soit :

$$\boxed{\underline{A}'(u, v) = \eta^2\underline{A}(\eta u, \eta v)} \quad (1)$$

Au coefficient η^2 près (correspondant au fait que la surface lumineuse a augmenté dans le rapport η^2), nous voyons que la nouvelle figure de diffraction est l'homothéti-

Copyrighted material

que de la première dans un rapport $\frac{1}{\eta}$. (C'est bien ce qu'on observe : plus le motif diffractant est grand, plus la figure de diffraction est petite).

1. b. Soient $a_1(x, y)$ et $\underline{A}_1(u, v)$ les amplitudes dans les plans Oxy et $F'x'y'$ associées au motif 1.

Soient $c(x, y)$ et $\underline{C}_1(u, v)$ les amplitudes dans les plans Oxy et $F'x'y'$ du « cercle » (C) seul sans le cache central.

L'amplitude dans Oxy du motif 2 peut s'écrire :

$$a_2(x, y) = c(x, y) - a_1(x, y).$$

Ici les fonctions $c(x, y)$ et $a_1(x, y)$ peuvent être considérées comme prenant les valeurs 0 ou 1 (0 lorsque la lumière est arrêtée, 1 dans le cas contraire). Ainsi pour le motif 2, on aura :

$a_2(x, y) = 1 - 1 = 0$ sur le cache « central »

$a_2(x, y) = 0 - 0 = 0$ à l'extérieur du cercle (C)

$a_2(x, y) = 1 - 0 = 1$ ailleurs

L'amplitude dans $F'x'y'$ du motif 2 est donc :

$$\underline{A}_2(u, v) = \underline{C}(u, v) - \underline{A}_1(u, v).$$

Remarquons, en utilisant le résultat de la question précédente, que $\underline{C}_1(u, v)$ tend vers zéro beaucoup plus vite que $\underline{A}_1(u, v)$ quand on s'éloigne de F'. En effet, le cercle (C) étant beaucoup plus grand que le motif, la figure de diffraction qui lui correspond ($\underline{C}(u, v)$) est bien plus petite que celle ($\underline{A}_1(u, v)$) du motif.

En résumé, si on s'éloigne suffisamment de F' ($OF' \approx qqs \frac{\lambda f'}{R}$, R rayon du cercle C) :

$|\underline{C}(u, v)| \ll |\underline{A}_1(u, v)|$ et $\underline{A}_2(u, v) \approx -\underline{A}_1(u, v)$, et pour l'intensité $I \propto AA^*$, on a :

$\boxed{I_1(u, v) \approx I_2(u, v)}$ les intensités sont les mêmes.

Par contre tout près de F', $|\underline{C}(u, v)| \gg |\underline{A}_1(u, v)|$: le coefficient « η^2 » l'emporte et :

$\boxed{\underline{A}_2(u, v) \approx \underline{C}(u, v)}$ c'est la figure de diffraction de (C).

Dans la zone intermédiaire $|\underline{A}_1(u, v)|$ est du même ordre de grandeur que $|\underline{C}(u, v)|$ et l'on ne peut rien dire de précis tant qu'on ne connait pas le détail du motif central.

Ces résultats sont connus sous le nom de **Théorème des écrans complémentaires**.

2. a. ■ Pour le trou Γ_0 placé au voisinage de l'origine O, le principe d'Huygens-Fresnel s'écrit :

$$\Psi_0(P) = K \exp(-jk[SOP]) \iint_{S_{\Gamma_0}} e^{-jk([SMP]-[SOP])} dx\,dy$$

Reproduction du matériel

Hidden page

Hidden page

■ Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ il vient :

$$F(\alpha, \beta) = \underset{(\text{termes } n = m)}{N} + 2 \sum_{n<m} \sum \cos[k(a_m - a_n)\alpha + k(b_m - b_n)\beta].$$

On voit que l'argument du cosinus prend des valeurs au hasard (de la même façon que les trous sont répartis au hasard). La somme des cosinus vaudra donc pour $|\alpha|$ et/ou $|\beta|$ pas trop petits environ 0 (aux fluctuations statistiques près) et $F(\alpha, \beta) = N$.

Commentaire

■ Il est bien évident que $F(\alpha, \beta)$ est une fonction continue, le passage de N^2 à N s'effectue au voisinage de l'origine sur un domaine qui dépend du nombre de trous et de la loi de probabilité de la répartition des trous).

En définitive, à « côté » d'une tache centrale N^2 fois plus intense que la tache centrale d'un trou isolé, l'intensité de la figure de diffraction est N fois celle du motif initial.

■ Si les trous sont répartis périodiquement selon l'axe Oy, c'est-à-dire si l'on a :

$$(a_p, b_p) = p(0, b)$$

le terme interférentiel $F(\alpha, \beta)$ s'écrit :

$$F(\alpha, \beta) = \left| \sum_p e^{jk\beta b p} \right|^2$$

$$= \left| \sum_0^{N-1} e^{jk\beta b m} \right|^2$$

D'où : $F(\alpha, \beta) = \left| \dfrac{1 - e^{jk\beta bN}}{1 - e^{jk\beta b}} \right|^2 = N^2 \left| \dfrac{\sin\left(\dfrac{Nb\beta}{\lambda}\pi\right)}{N \sin\left(\dfrac{\pi b \beta}{\lambda}\right)} \right|^2$.

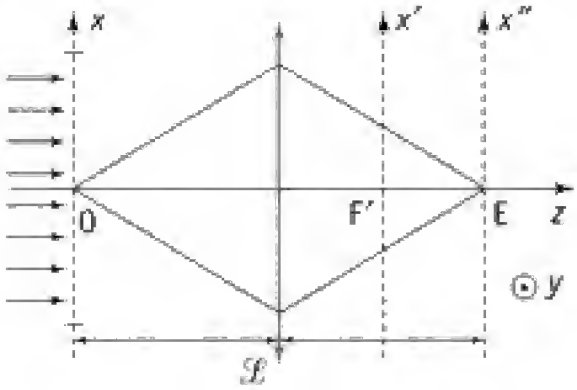
Il s'agit de la formule classique d'un réseau à une dimension.

■ On pourrait également constituer un réseau plan à deux dimensions avec des trous « centrés » en (qa, pb) où q et p appartiennent à $\mathbb{Z}$...

203 Filtrage spatial

Un support pour pupilles diffractantes est disposé dans le plan Oxy.

Il possède une largeur L selon Ox et une longueur suffisamment grande. Il est éclairé en incidence normale par une OPPH d'amplitude a_0 et de longueur d'onde λ_0.



Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

On obtient donc des pics « principaux » de diffraction centrés en $\alpha = 0$; $\alpha = \pm\dfrac{\lambda_0}{d}$, …, $\alpha = \pm n\dfrac{\lambda_0}{d}$, …

Soit dans le plan focal, et tant que les angles restent faibles :

$x = 0$; $x = \pm\dfrac{\lambda_0}{d}f'$; … ; $x = \pm n\dfrac{\lambda_0}{d}f'$ (« ordres » : 0 ; ± 1 ; … ; ± n ; …).

Ces pics sont distants de $\dfrac{\lambda_0}{d}f'$, alors que leur largeur (au pied) est égale à $\dfrac{2\lambda_0}{L}f'$.

Ils sont bien séparés dès que L est suffisamment grand devant le pas d du motif, ce que nous supposons réalisé par la suite.

2. a. La fente centrée en F′, et de largeur $\dfrac{2\lambda_0 f'}{L}$, ne laisse passer que l'« ordre » 0. Tout se passe comme si la pupille diffractante était réduite à une fente de largeur L (seul le terme en F_0 importe dans $f_d(x)$). L'image obtenue sera donc celle de la fente (plans $Ex''y''$ et Oxy conjugués), et en vraie grandeur (puisque $\delta = -1$).

Commentaire

La position pour laquelle $\gamma = -1$ correspond à un couple objet-image symétriques par rapport à la lentille, l'objet et l'image étant distants de $2f'$ de cette lentille (position dite de Silbermann).

2. b. On ne laisse passer cette fois-ci que les « ordres» ± 1, ce qui revient à considérer une amplitude diffractante de transparence $t(x) = F_1\cos\left(2\pi\dfrac{x_1}{d}\right)$ (pour $|x| < \dfrac{L}{2}$; réseau sinusoïdal…).

L'intensité en un point de l'écran d'abscisse x'' sera proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde en $x = -x''$ (grandissement égal à − 1) c'est-à-dire à :

$$a_0 F_1 \cdot \cos\left[2\pi\frac{(-x'')}{d}\right].$$

On observe alors une intensité $I(x'')$ telle que :

$$I(x'') = Ca_0^2F_1^2\cos^2\left[2\pi\frac{(-x'')}{d}\right].$$

Soit encore : $$I(x'') = \frac{1}{2}Ca_0^2F_1^2\cdot\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{2}{d}x''\right)\right].$$

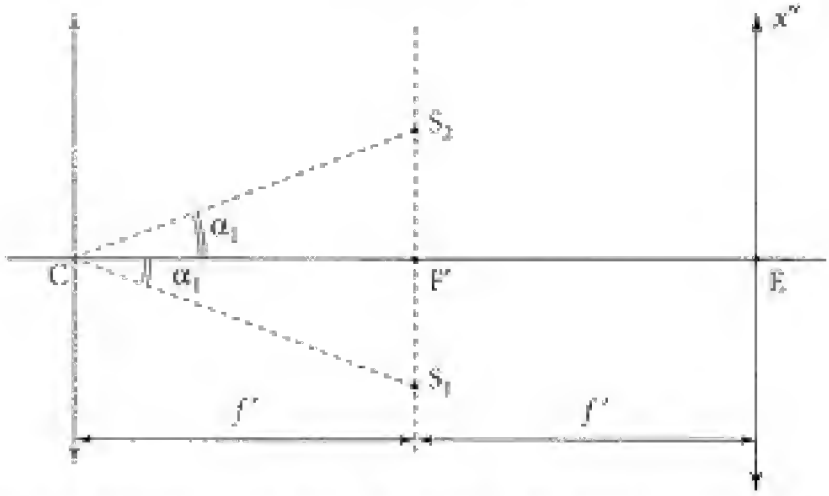
Il apparaît donc dans le plan d'observation $Ex''y''$ un motif de période spatiale $\dfrac{d}{2}$. Or dans le plan $F'x'y'$ étaient présentes les fréquences spatiales 0 ; … ; $\pm\dfrac{n}{d}$; … Le cache placé dans ce plan a donc filtré les fréquences $\pm\dfrac{1}{d}$. Le motif obtenu dans $Ex''y''$ est de fréquence spatiale $\dfrac{2}{d}$ (élévation au carré pour obtenir l'intensité), c'est-à-dire de fréquence double par rapport à la pupille diffractante, et donc de période moitié.

Copyrighted material

Commentaire

Le filtre revient à ne considérer que deux sources secondaires S_1 et S_2 cohérentes entre elles et telles que :

$$(CF', CS_2) = (CS_1, CF') = \frac{\lambda_0}{d}$$



Ces deux sources donnent, à elles seules, une figure d'interférence sur l'axe $Ex''y''$ associée à la répartition d'intensité :

$$I(x'') = I_0(1 + \cos\Delta\phi) \text{ où } \Delta\phi = \frac{2\pi S_1S_2x''}{\lambda_0 f'}$$

Or : $$S_1S_2 \# 2\alpha_1 f' = 2\frac{f'\lambda_0}{d} \rightarrow \Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{2}{d}x''$$

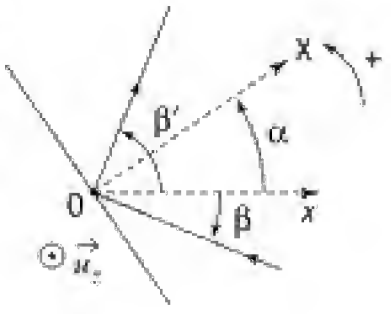
$$I(x'') = I_0\left(1 + \cos\left(2\pi \cdot \frac{2}{d}x''\right)\right)$$

(motif en intensité de période spatiale $\frac{d}{2}$).

204 Monochromateur

Un réseau plan comporte des « traits » parallèles à Oz, et le pas est $a = 2$ µm. Ce réseau est utilisé par réflexion, et il peut tourner autour de l'axe Oz (rotation repérée par l'angle α).

Il est éclairé par un faisceau de lumière parallèle blanche faisant l'angle β ($\beta < 0$) avec la direction Ox (direction normale au plan du réseau pour $\alpha = 0$). On règle l'angle β de telle manière que, pour $\alpha = 0$, on sélectionne la longueur d'onde $\lambda_0 = 600$ nm dans le spectre d'ordre « 2 » et dans la direction $\beta' = 0$.

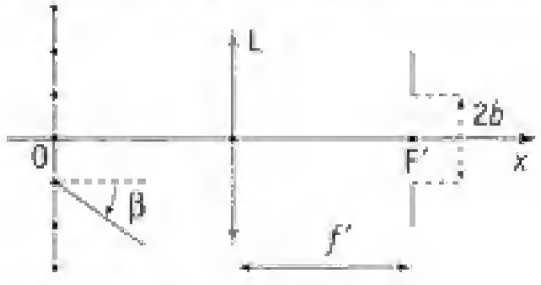


1. a. Calculer la valeur de l'angle β.

Copyrighted material

b. Entre quelles valeurs limites doit-on faire varier α pour pouvoir sélectionner, dans la direction $\beta' = 0$, tout le spectre s'étendant de $\lambda_{min} = 400$ mm à $\lambda_{max} = 800$ mm.

2. On utilise alors le dispositif de réception représenté sur la figure ci-dessous. On a $\alpha = 0$ et l'angle d'incidence β est réglé dans les conditions du 1. a.



On prend $f' = 10$ cm et $b = 1$ mm.
En déduire que la fente, centrée sur F', ne laisse passer qu'une étroite bande spectrale $\Delta\lambda$ centrée sur λ_0. Calculer $\Delta\lambda$.

Solution

1. a. Considérons les faisceaux diffractés par deux motifs consécutifs dans une direction fixée, dans le plan de figure, par l'angle β'. Il revient au même d'associer à chaque motif un trait (T_1 et T_2), la distance entre deux traits consécutifs représentant le pas du réseau ($T_1T_2 = a$).
Il y aura des interférences constructives si les rayons provenant de la source (ici rejetée à l'infini), arrivant en T_1 et T_2 et repartant dans la direction β', présentent un déphasage multiple de 2π (ils sont en phase ; il en sera de même des rayons tapant le réseau en T_3, T_4... du fait de la périodicité).

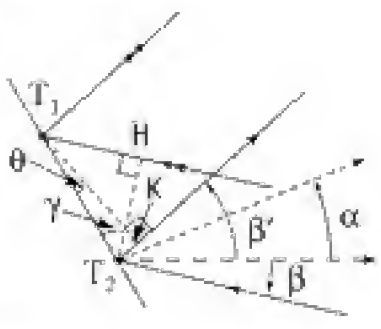
$$\Delta\phi = p2\pi \text{ ; or } \Delta\phi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} \rightarrow \delta = p\lambda \quad (\delta \equiv \text{différence de marche}).$$

Pour deux traits consécutifs T_1 et T_2, la différence de marche est donnée par (2 – 1) :

$\delta = T_2K - T_1H$ avec : $T_2K = T_2T_1\sin\theta = a\sin(\beta' - \alpha)$ (on a $T_2T_1 = a$).

$T_1H = T_2T_1\sin\gamma = a\sin(\alpha - \beta)$ ($\beta < 0$).

D'où : $\delta = a[\sin(\beta' - \alpha) + \sin(\beta - \alpha)]$.



Les directions $\beta'(\lambda)$ définissant des maximums d'intensité, pour une longueur d'onde donnée, et pour une observation à l'infini correspondent à (interférences constructives) : $\delta = p\lambda$ (p entier relatif).

Soit : $$\boxed{\sin(\beta' - \alpha) + \sin(\beta - \alpha) = p\frac{\lambda}{a}} \quad (1)$$

On veut :

$$\beta' = 0 \text{ pour } \begin{vmatrix} \lambda = \lambda_0 = 600 \text{ nm} \\ \alpha = 0,\ \beta < 0 \\ \text{ordre « deux », soit } p = \pm 2 \end{vmatrix}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Copyrighted material

Partie

5

Thermodynamique

Copyrighted material

chapitre

1

Énergie et entropie

101 Compressions d'un gaz

Partie A

On fait subir à un kilogramme de gaz, contenu dans un cylindre muni d'un piston, une transformation isotherme réversible qui le fait passer de l'état $P_1 = 0{,}68$ atm, $T_1 = 422$ K à l'état $P_2 = 4{,}56$ atm. Préciser les échanges d'énergie nécessaires à la réalisation de cette transformation. Commenter les résultats obtenus.

	$P_1 = 0{,}68$ atm ; $T_1 = 422$ K	$P_2 = 4{,}56$ atm ; $T_1 = 422$ K
h	2 777	2 743
s	7,785	6,846
v	2,809	0,4035

h : enthalpie massique en $kJ \cdot kg^{-1}$; s : entropie massique $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$; v : volume massique en $m^3 \cdot kg^{-1}$; 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa.

Partie B

Une masse de 1 kg de vapeur d'eau est contenue dans un cylindre muni d'un piston. L'état initial est fixé par : $P_0 = 2{,}04$ atm et $T_0 = 422$ K.

Après compression, on fait passer la vapeur d'eau à l'état :

$$P_f = 4{,}08 \text{ atm} \quad \text{et} \quad T_f = 533{,}6 \text{ K}.$$

1. On suppose le cylindre et le piston adiabatiques. Déterminer le travail qu'il a fallu fournir pour réaliser la transformation. Est-elle réversible ?

2. Envisager une suite de deux transformations réversibles, simples, subies par la vapeur qui conduiraient au même état final. Déterminer, dans chaque cas, les échanges d'énergie avec le milieu extérieur et comparer au cas précédent. On donne :

P(atm)	$v(m^3 \cdot kg^{-1})$	$h(kJ \cdot kg^{-1})$	$s(kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$	T(K)
2,04	1,0426	2 766	7,2853	422
4,08	0,5870	2 984	7,4013	533,2

1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier et second principes de la thermodynamique.
- Utilisation des tables de valeurs.
- Réversibilité – irréversibilité.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. On reliera les travaux et énergies thermiques échangés aux variations des fonctions d'état. Dans le cadre de la réversibilité, le second principe se traduit par une égalité. On pourra vérifier que le gaz étudié ne peut pas être assimilé à un gaz parfait.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

On a donc les mêmes Δu et Δs.

Soit : $\Delta u = W'_{rev} + Q'$ (1^{er} principe) ;

$$\Delta s = \frac{Q'}{T_f} \quad (2^e \text{ principe dans le cadre de la réversibilité}).$$

Nous obtenons alors pour (A) :

$$\boxed{Q_{rev} = Q' = T_f \Delta s \quad \text{et} \quad W_{rev} = W'_{rev} = \Delta u - T_f \Delta s}$$

De même, pour (B), nous aurions :

$$\boxed{Q_{rev} = Q'' = T_0 \Delta s \quad \text{et} \quad W_{rev} = W''_{rev} = \Delta u - T_0 \Delta s}$$

A.N. : $Q' = 61{,}9 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $W'_{rev} = 129 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;

$Q'' = 49{,}0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $W''_{rev} = 142 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Commentaires

• On a bien sûr $Q' + W'_{rev} = Q'' + W''_{rev} = \Delta u$ (aux erreurs d'arrondis près…).

• Dans les deux cas, on a $W_{rev} < W_{irr}$; et d'autre part, si l'on désigne par T' la température de la source thermique avec laquelle le système est mis en contact lors de la double transformation (T' est égale à T_f pour (A) et T_0 pour (B)), nous avons : $W_{rev} = \Delta u - T' \Delta s$.

Or $\Delta u = W_{irr}$ et $\Delta s = \sigma$ (associée à la transformation irréversible initiale), d'où :

$$\boxed{W_{irr} = W_{rev} + T'\sigma} \quad (W_{irr} > W_{rev}).$$

• Si l'on envisageait maintenant une transformation adiabatique réversible du gaz à partir de l'état (P_0, T_0) jusqu'à un état de même pression P_f que précédemment, on aurait :

En effet, la transformation adiabatique réversible serait isentropique.

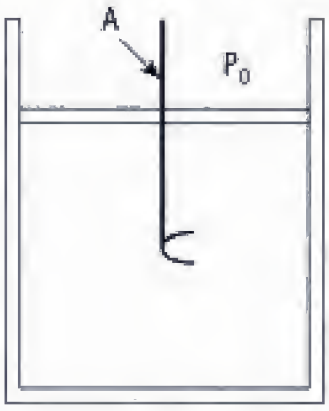
La température finale T'_f serait alors différente avec :

$$s(T'_f, P_f) = s_0 = s(T_0, P_0) < s(T_f, P_f).$$

D'où $s(T'_f, P_f) < s(T_f, P_f)$ ce qui nous indique que la température finale T'_f serait inférieure à celle T_f effectivement obtenue.

Copyrighted material

102 Transformation quasi statique irréversible



1. Un cylindre à parois adiabatiques est fermé par un piston idéal, également adiabatique. Il contient un gaz que l'on pourra assimiler à un gaz parfait (masse molaire M, coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ = constante, $(C_p)_{molaire} - (C_v)_{molaire} = R$, $R = 8{,}31\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$).
La pression extérieure est invariable et vaut $P_0 = 10^5$ Pa. La température initiale du gaz est $T_0 = 293$ K. On fait subir au gaz une transformation quasi statique, **isobare**, jusqu'à un état final de température $T_f = 353$ K.
Déterminer les échanges avec l'extérieur dans le cas où la transformation est réalisée à l'aide d'un agitateur A dont le mouvement est entretenu par un moteur. Commentaires. Pour les applications numériques, on prendra $\gamma = 1{,}4$ et $M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg et on fera les calculs pour 1 kg de fluide.

2. Reprendre la question précédente dans le cas d'une transformation isobare réversible entre les mêmes états.

1. Ce qu'il faut savoir

- Réversibilité – irréversibilité.
- Premier et second principes de la thermodynamique.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La première transformation, bien qu'adiabatique quasi statique, n'est pas pour autant isentropique, elle est donc irréversible.

2. Le moteur n'agit plus sur l'agitateur A. Le volume occupé par le gaz évoluera à pression P_0 constante grâce à un apport (ici réversible) d'énergie thermique en provenance de sources thermiques extérieures au système. Ces sources (en nombre théoriquement infini) permettent de faire passer le gaz de la température initiale T_0 à la température finale T_f. Remarquons que dans les deux cas, les états initial et final sont les mêmes. Les variations d'énergie interne, d'enthalpie et d'entropie – caractéristiques de ces états – sont donc également les mêmes.

3. Solution

1.

POINT MÉTHODE

Remarquons tout d'abord que les états initial et final sont connus si on se donne comme variables thermodynamiques la pression P, la température T et le volume massique v. En effet, P et T étant fixées, il vient :

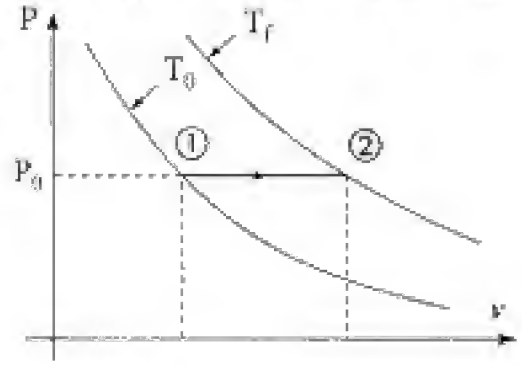
Copyrighted material

Hidden page

Commentaire

Il en résulte que la transformation isobare adiabatique quasi statique **n'est pas réversible** : l'ensemble (moteur plus agitateur) a « dégradé » de l'énergie électrique pour augmenter l'entropie du gaz.

2. Pour une transformation **isobare réversible**, le gaz reçoit l'énergie thermique Q_{rev} et le travail W_{rev}. À chaque instant, la pression du gaz est P_0 (piston de masse négligeable) et le travail fourni par les forces de pression est (pour l'unité de masse) :



$$W_p = -P_0\int_{v_0}^{v_f} dv ;$$

soit $W_p = -P_0(v_f - v_0) = -\dfrac{R}{M}(T_f - T_0)$

(travail massique).

On peut imaginer que l'on met successivement le système en contact avec des sources thermiques, de températures infiniment voisines s'échelonnant entre T_0 et T_f, et que le seul travail « reçu » par le gaz est effectivement W_p.

Ainsi $\Delta u = W_p + Q_{rev} = -\dfrac{R}{M}(T_f - T_0) + Q_{rev}$

soit $Q_{rev} = C_{v_m}(T_f - T_0) + \dfrac{R}{M}(T_f - T_0) = C_{p_m}(T_f - T_0)$.

On a bien évidemment : $Q_{rev} = \Delta h$.

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{rev} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}(T_f - T_0) \\ W_{rev} &= -\frac{R}{M}(T_f - T_0) \end{aligned}}$$

A.N. : $Q_{rev} = 60{,}2\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $W_{rev} = -17{,}2\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

La température finale T_f est supérieure à T_0, le gaz s'est donc dilaté et a fourni un travail positif à l'extérieur.

Commentaire

Dans cette transformation isobare réversible, une variation dT de la température du gaz s'accompagne d'une énergie thermique élémentaire reçue δQ, donnée par :

$$\delta Q = C_{p_m}\,dT = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}dT.$$

On a donc d'après le second principe : $ds = \dfrac{\delta Q}{T} + \underbrace{0}_{\text{réversibilité}}$.

D'où : $ds = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{R}{M}\dfrac{dT}{T}$, puis par intégration :

$$\Delta s = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) \Rightarrow \Delta s = 187\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

On retrouve bien le résultat établi plus haut.

Copyrighted material

103 Création d'entropie

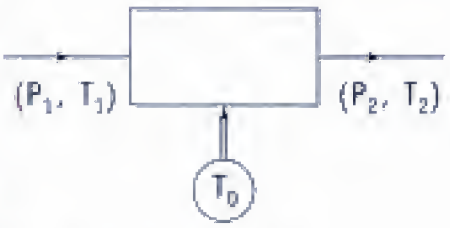
1. Un gaz parfait ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ = cste ; $(C_p - C_v)_{mol} = R$; masse molaire M ; R : constante des gaz parfaits) subit une détente du type Joule-Thomson de l'état (T_1, P_1) à l'état (T_2, P_2).

Le régime est stationnaire.

Redémontrer la relation liant les enthalpies massiques du gaz en amont $h(T_1, P_1)$ et en aval $h(T_2, P_2)$.

Montrer que la détente s'accompagne d'une création d'entropie massique σ_m que l'on exprimera en fonction des pressions P_1 et P_2, de M (masse molaire) et de la constante R des gaz parfaits.

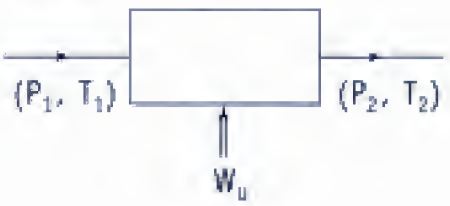
2. Le gaz s'écoule maintenant dans une conduite perméable à l'énergie thermique. Le milieu extérieur est équivalent à une source thermique de température T_0.



L'écoulement étant stationnaire, calculer la création d'entropie massique σ_m en fonction de γ, R, M, T_0 et des caractéristiques du gaz en entrée (T_1, P_1) et en sortie (T_2, P_2).

Commenter le résultat obtenu pour un écoulement isobare.

3. Le système n'échange pas d'énergie thermique avec l'extérieur mais « reçoit » une puissance mécanique massique P_m. Donner l'expression reliant cette puissance P_m à σ_m.



Commenter le résultat obtenu.

1. Ce qu'il faut savoir

- Bilans d'énergie et d'entropie : premier et second principes.
- Réversibilité et irréversibilité.
- Écoulements en régime stationnaire.
- Détente de Joule-Thomson.

2. Ce qu'il faut comprendre

On utilisera le premier principe appliqué aux écoulements stationnaires (ne pas tenir compte de variations d'énergies cinétiques et d'éventuelles énergies potentielles). Le second principe fixera alors la valeur de la création d'entropie σ_m.

Dans le cas où une puissance mécanique est fournie (resp. prélevée) à l'extérieur, on peut s'attendre à ce qu'elle soit plus importante (resp. plus faible) dans le cadre de la réversibilité.

Copyrighted material

Hidden page

$$\sigma_m = \frac{1}{D_m} \cdot \frac{\delta\sigma}{dt} \Rightarrow \sigma_m = s(T_2, P_2) - s(T_1, P_1).$$

Pour un gaz parfait $s(T, P) = s(T_0, P_0) + C_{v_m} \ln\left[\frac{P^{1-\gamma}T^{\gamma}}{P_0^{1-\gamma}T_0^{\gamma}}\right]$, où C_{v_m} représente la capacité thermique massique à volume constant :

$$C_{v_m} = (C_v)_{mol} \cdot \frac{1}{M} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{R}{M} \quad \left(\gamma = \frac{C_p}{C_v} \text{ et } (C_p - C_v)_{mol} = R\right).$$

Finalement :

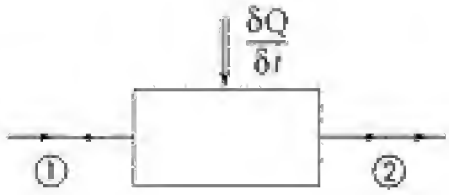
$$\sigma_m = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\ln\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\gamma}\right] \Rightarrow \boxed{\sigma_m = \frac{R}{M}\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)} \quad (3)$$

Le second principe nous impose $\sigma_m > 0$, c'est-à-dire $P_2 < P_1$, et la détente s'effectue bien dans le sens d'une diminution de la pression.

2. Reprenons le raisonnement précédent.

■ **Bilan d'énergie :** $\frac{DH}{Dt} = 0 + \frac{\delta Q}{\delta t}$ $(\delta W_u = 0)$

ce qui donne $D_m \cdot (h_2 - h_1) = \frac{\delta Q}{\delta t}$ (4)



■ **Bilan d'entropie :**

$$\frac{DS}{Dt} = \underbrace{\frac{\left(\frac{\delta Q}{dt}\right)}{T_0}}_{\text{terme d'échange, le système recevant une puissance ther-}} + \frac{\delta\sigma}{dt}$$

mique $\frac{\delta Q}{dt}$ d'une source à la température invariable T_0

d'où $D_m \cdot (s_2 - s_1) = \frac{1}{T_0}\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta\sigma}{dt}$

et $s(T_2, P_2) - s(T_1, P_1) = \frac{1}{T_0} \cdot \left(\frac{\delta Q}{D_m dt}\right) + \left(\frac{1}{D_m}\frac{\delta\sigma}{dt}\right)$

soit encore en notant que $\sigma_m = \frac{1}{D_m}\frac{\delta\sigma}{dt}$ et avec (4) :

$$s(T_2, P_2) - s(T_1, P_1) = \frac{1}{T_0} \cdot [h(T_2, P_2) - h(T_1, P_1)] + \sigma_m$$

et $T_0\sigma_m = [T_0 s(T_2, P_2) - h(T_2, P_2)] - [T_0 s(T_1, P_1) - h(T_1, P_1)]$.

Or pour un gaz parfait : $h(T_2, P_2) - h(T_1, P_1) = C_{p_m}(T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}(T_2 - T_1)$.

D'où : $\sigma_m = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\ln\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma}\right] - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\left(\frac{T_2 - T_1}{T_0}\right)$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{R}{M}\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\left[\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{1}{T_0}(T_2 - T_1)\right]} \quad (5)$$

Copyrighted material

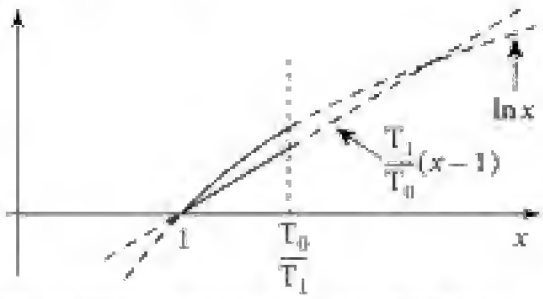
Cette étude recouvre le cas des **échangeurs de chaleur** pour lesquels la température « extérieure » est fixée (par exemple, système diphasé…). Pour des échangeurs isobares ($P_1 = P_2$), la création d'entropie massique se réduit à :

$$\sigma_m = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\left[\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{1}{T_0}(T_2 - T_1)\right].$$

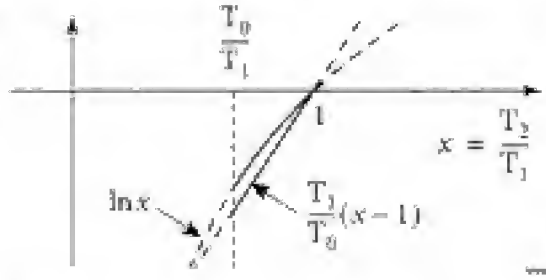
Commentaires

Pour un écoulement isobare, on a donc $\sigma_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\left[\ln x - \frac{T_1}{T_0}(x-1)\right]$ en posant $x = \frac{T_2}{T_1}$.

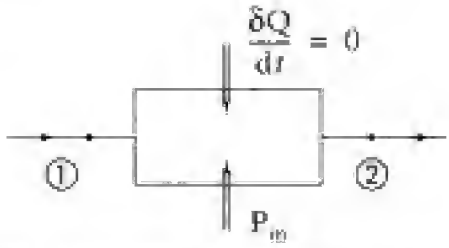
• Pour $T_0 > T_1$, on a représenté, sur la figure ci-contre, les courbes $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{T_1}{T_0}(x-1)$: on a bien $\sigma_m > 0$ pour $T_1 < T_2 < T_0$ ($\sigma_m(x = 1) = 0$ et $\frac{d\sigma_m}{dT_2} = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)M} \cdot \frac{T_0 - T_2}{T_2 T_0}$) et σ_m est maximal pour une température limite susceptible d'être atteinte par le gaz égale à T_0.



• Pour $T_0 < T_1$, σ_m est effectivement positif pour $T_0 < T_2 < T_1$ avec σ_m maximal pour une température limite se confondant avec T_0.



3. Cette fois-ci, le fluide reçoit du travail de l'extérieur, et le système est thermiquement isolé.



■ **Bilan d'énergie :**

$$\frac{DH}{Dt} = P_u + 0 = D_m \cdot [h(T_2, P_2) - h(T_1, P_1)]$$

P_u est la puissance mécanique « reçue » (elle est effectivement reçue pour $P_u > 0$).

Remarquons que la puissance mécanique massique P_m s'identifie au rapport $\frac{P_u}{D_m}$, d'où :

$$P_m = h(T_2, P_2) - h(T_1, P_1).$$

Et pour un gaz parfait de masse molaire M et de coefficient $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$:

$$\boxed{P_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}(T_2 - T_1)} \quad (1)$$

■ **Bilan d'entropie :**

$$\frac{DS}{Dt} = \underbrace{0}_{\text{absence d'échanges thermiques avec l'extérieur}} + \frac{\delta\sigma}{dt}.$$

Copyrighted material

D'où : $D_m \cdot [s(T_2, P_2) - s(T_1, P_1)] = \dfrac{\delta\sigma}{dt} \Rightarrow s(T_2, P_2) - s(T_1, P_1) = \sigma_m$.

Soit encore $$\frac{1}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\ln\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma}\right] = \sigma_m$$

et $$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \exp\left\{\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{M}{R}\sigma_m\right\} \quad (2)$$

La relation demandée entre la puissance massique P_m et la création d'entropie σ_m s'obtient en éliminant T_2 des relations (1) et (2) :

$$\boxed{P_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{RT_1}{M}\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \exp\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{M}{R}\sigma_m\right) - 1\right]} \quad (1)$$

Commentaires

• Ainsi pour un compresseur de taux de compression $\tau = \dfrac{P_2}{P_1}$ fixé, et pour un gaz donné de température initiale T_1 imposée, on peut remarquer que P_m (puissance qu'il faut alors fournir) est d'autant plus faible que σ_m est proche de zéro (par valeur positive), c'est-à-dire que la transformation s'apparente à une transformation réversible.

$$\boxed{P_m \geqslant (P_m)_{rev} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{RT_1}{M}\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]} \quad \text{où} \quad \frac{P_2}{P_1} > 1.$$

• Pour une turbine, P_m est négatif ($-P_m$ puissance **disponible à l'extérieur**). D'où :

$$\boxed{(P_m)_{ext} = -P_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{RT_1}{M}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \exp\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{M}{R}\sigma_m\right)\right]}$$

Cette puissance récupérable est d'autant plus grande, à τ et T_1 fixés, que l'exponentielle est faible, c'est-à-dire que σ_m est, là aussi, proche de zéro (transformation limite réversible : isentropique).

$$\boxed{(P_m)_{ext} \leqslant \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{RT_1}{M}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad \text{où} \quad \frac{P_2}{P_1} < 1.$$

• On peut aussi écrire $\dfrac{\gamma - 1}{\gamma} = \dfrac{R}{(C_p)_{mol}}$ et $\dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{R}{M} = C_{p_m}$.

D'où : $P_m = C_{p_m}T_1\left[\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R}{MC_{p_m}}} \cdot \exp\left(\dfrac{\sigma_m}{C_{p_m}}\right) - 1\right]$.

• Dans le cas du système « type turbine », le maximum de création d'entropie doit correspondre à une « efficacité nulle », c'est-à-dire à aucune production de travail ($P_m = 0$). Dès lors :

$$1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \exp\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{M}{R}(\sigma_m)_{max}\right]$$

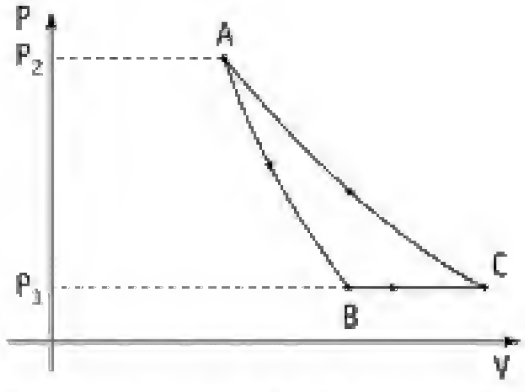
ce qui donne : $(\sigma_m)_{max} = \dfrac{R}{M}\ln\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)$.

On est évidemment ramené au cas étudié au **1.**

Copyrighted material

104 Cycle à trois transformations

Le cycle représenté ci-contre est constitué de trois transformations réversibles :
– une adiabatique,
– une isotherme,
– une isobare.
Le fluide décrivant ce cycle est un gaz parfait dont on supposera le coefficient $\gamma \left(\gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$ constant.



1. Montrer que ce cycle peut être associé à une machine thermique du type « pompe à chaleur ».

2. a. Pour ce type de fonctionnement, déterminer, en fonction des températures T_A et T_B, l'efficacité η de la machine. *A.N.* : calculer η pour $T_A = 450$ K et $T_B = 300$ K.

b. Comparer à une machine de Carnot travaillant avec des sources thermiques de températures T_A et T_B et fonctionnant en pompe à chaleur ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Cycle thermique.
- Pompe à chaleur : efficacité.
- Pentes de l'isotherme et de l'isentropique dans le diagramme P(V).
- Premier principe.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. • On distinguera l'isentropique de l'isotherme en comparant les pentes des deux courbes au point A. On vérifiera également que le cycle est « résistant » (il faut fournir du travail mécanique au fluide), et que de l'énergie thermique est transférée à la « source chaude » lors de la transformation isotherme C → A.

• Pendant la phase B → C, la température du gaz évolue continûment (de T_B à $T_C = T_A$) à pression constante P_1. Une telle transformation ne peut être réversible que si le gaz est successivement mis en contact avec un nombre très grand (théoriquement infini) de sources thermiques dont les températures s'échelonnent de T_B à T_A.

2. L'efficacité est définie par le rapport de la grandeur énergétique utile (ici $-Q_{CA}$, si Q_{CA} désigne l'énergie thermique « reçue » par le gaz de la part de la source chaude) à la grandeur énergétique non « gratuite » (ici le travail W fourni à la machine).

3. Solution

1. ■ Le cycle comprend trois transformations, l'isobare B → C, une isotherme et une isentropique (adiabatique réversible).

Une isotherme associée au gaz parfait admet pour équation : $PV = \text{cste}$ (1)

Copyrighted material

Hidden page

– Enfin sur l'isotherme C → A, nous avons :

$$\Delta U = nC_v(T_A - T_C) = 0 \quad \text{soit} \quad W_{CA} + Q_{CA} = 0.$$

D'où $Q_{CA} = -W_{CA} < 0$ (puisque $W_{CA} > 0$).

Le fluide fournit donc de l'énergie thermique à l'extérieur lors de la phase C → A.

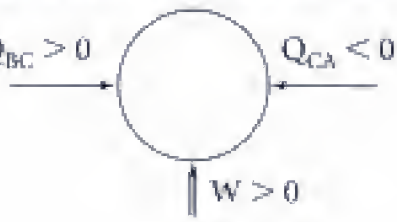
■ **Conclusion :** en définitive, on peut considérer que le cycle proposé est du type « **pompe à chaleur** », le fluide :

- recevant le travail W,
- fournissant l'énergie thermique $(-Q_{CA})$ à la source chaude de température T_A,
- prélevant l'énergie thermique Q_{BC} à « la source froide » constituée, en fait, d'un ensemble de sources thermiques dont les températures s'étalent continûment entre T_B et T_A.

2. a. Le coefficient d'efficacité d'une machine qui fonctionnerait selon ce cycle (et dans le cadre d'une fonction « pompe à chaleur ») est défini comme le rapport de l'énergie thermique cédée à la source chaude (soit $-Q_{CA}$) sur le travail fourni à la machine (W) :

$$\eta = \frac{-Q_{CA}}{W} \text{ or } W + Q_{BC} + Q_{CA} = 0 \text{ (1}^{er}\text{ principe)}$$

$$Q_{BC} = nC_p(T_A - T_B).$$



D'autre part, C → A étant une transformation isotherme réversible, il vient : $Q_{CA} = T_A \Delta S_{CA}$.

Or, pour un gaz parfait : $S = nC_p \ln\left[TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] + \text{cste}$.

D'où puisque $T_C = T_A$: $\Delta S = nC_p \ln\left(\frac{P_A}{P_C}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

Or $P_C = P_B$, d'où $\left(\frac{P_A}{P_C}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

Mais $\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ (isentropique A → B), d'où :

$$\left(\frac{P_A}{P_C}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{T_B}{T_A}\right) \Rightarrow \Delta S_{CA} = nC_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right). \quad \text{Soit} \quad \boxed{Q_{CA} = nC_p T_A \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)}$$

et une efficacité : $\eta = \dfrac{-Q_{CA}}{-Q_{CA} - Q_{BC}} = \dfrac{nC_p T_A \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right)}{nC_p T_A \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) - nC_p(T_A - T_B)}$.

D'où

$$\boxed{\eta = \frac{\ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right)}{\ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) - \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)}}$$

A.N. : $\eta = 5{,}62$.

2. b. Comparons « l'efficacité » d'une machine fonctionnant selon ce cycle à celle associée à une pompe à chaleur ditherme de Carnot.

Copyrighted material

Hidden page

105 « Turbopropulseur »

Une machine thermique est constituée d'un compresseur, d'une turbine et de deux échangeurs d'énergie thermique.

• Le fluide subit une détente isentropique dans la turbine, et le travail ainsi récupéré est utilisé d'une part pour faire fonctionner le compresseur, d'autre part comme travail disponible à l'extérieur.

Les températures du fluide en entrée et sortie de la turbine sont T_3 et T_4.

• Le compresseur fonctionne de façon isentropique, l'état du fluide passant de (P_1, T_1) à (P_2, T_2). On note $\tau = \frac{P_2}{P_1}$ le taux de compression.

• Les échangeurs d'énergie thermique sont isobares.

1. Représenter sur un schéma le fonctionnement de cette machine en y précisant les échanges énergétiques.

Tracer le cycle suivi par le fluide, en diagramme de Clapeyron (P, V), puis en diagramme (S, T), S désignant l'entropie d'une quantité donnée de fluide.

2. On suppose que le fluide reste à l'état gazeux durant tout le cycle et qu'il peut être assimilé à un gaz parfait.

Exprimer l'efficacité η de la machine en fonction de τ et de γ ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ = constante).

3. On fixe les températures T_1 et T_3 à l'entrée du compresseur et de la turbine.

Pour quelle valeur τ_m du taux de compression τ le travail produit par la machine est-il maximal ? Quelle est alors la valeur du coefficient d'efficacité η ? Commenter.

A.N. : on donne $T_1 = 293$ K ; $P_1 = 1$ atm ; $T_3 = 773$ K. Déterminer la valeur de τ_m, de la température T_2 correspondante et du coefficient η. On prend $\gamma = 1{,}4$.

1. Ce qu'il faut savoir

• Transformation isentropique d'un gaz parfait.

• Transformation isobare.

• Machines thermiques – Efficacité.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On vérifiera que le fluide traverse successivement le compresseur (travail nécessaire prélevé sur la turbine), un échangeur thermique où il s'échauffe, la turbine (qui fournit du travail à l'extérieur et au compresseur) et un deuxième échangeur thermique où il se refroidit.

2. Le système proposé constitue un moteur thermique. La grandeur utile est le travail W_u disponible à l'extérieur.

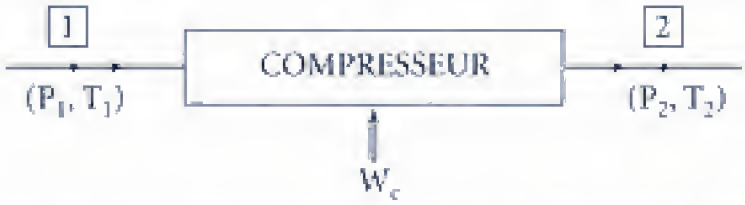
3. À T_1 et T_3 fixées, le travail utile W_u devient une fonction de T_2. Le travail maximal récupéré ne correspond pas à une valeur maximale du coefficient d'efficacité η.

Copyrighted material

3. Solution

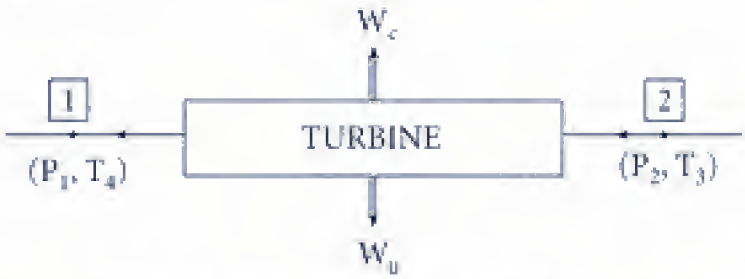
1. La machine comprend :

• Un compresseur isentropique qui fait passer le fluide de l'état (P_1, T_1) à l'état (P_2, T_2).

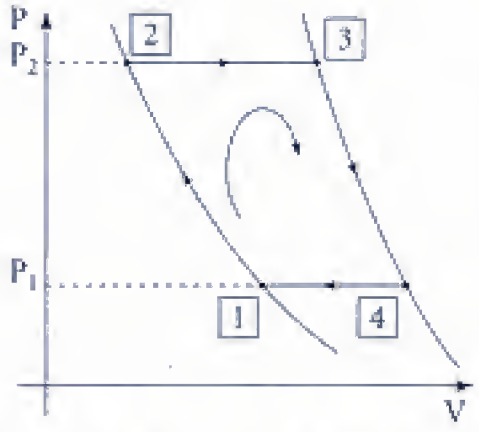


Le fonctionnement du compresseur requiert un travail W_c par unité de masse le traversant.

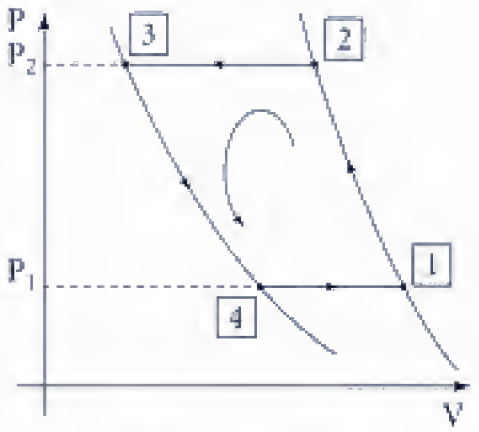
• Une turbine où le gaz subit une détente isentropique de l'état $(P_3 = P_2, T_3)$ à l'état $(P_4 = P_1, T_4)$. La turbine fournit le travail W_c au compresseur et un travail W_u utilisable à l'extérieur de la machine.



• Le compresseur et la turbine reliés par l'intermédiaire de deux échangeurs isobares d'énergie thermique. Dans le compresseur la température du gaz augmente alors qu'elle diminue dans la turbine. On a donc $T_2 > T_1$ et $T_3 > T_4$. Si l'on veut qu'au cours d'un cycle, il y ait effectivement production de travail ($W_u > 0$), il faut imposer $T_3 > T_2$ et donc $T_4 > T_1$, comme on peut le voir simplement sur le diagramme de Clapeyron (V, P) :



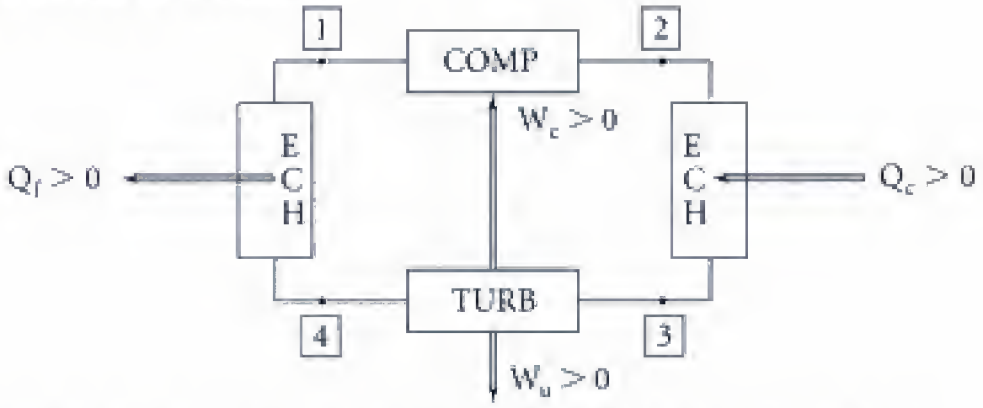
Ici $V_3 > V_2$ et $P_3 = P_2$ ce qui implique $T_3 > T_2$. De plus, le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre, et le travail total reçu est bien négatif (du travail est fourni à l'extérieur).



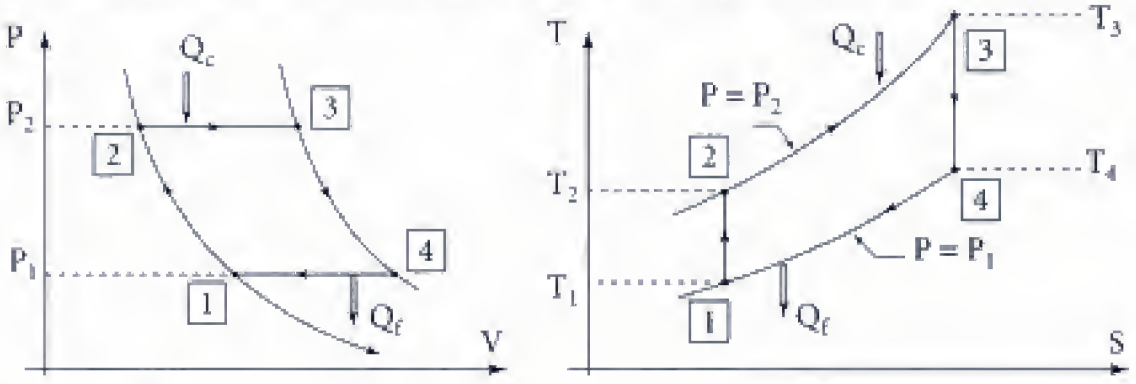
Ici $V_3 < V_2$ et $P_3 = P_2$ d'où $T_3 < T_2$. Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique. Il n'est plus moteur.

Copyrighted material

D'où le schéma de l'installation :



Donnons les représentations du cycle (dit cycle de Joule) suivi par le fluide :



Commentaire

Dans le cas d'un gaz parfait, les équations des isentropiques 3 → 4 et 1 → 2 sont du type $PV^\gamma = cste$ dans le diagramme P(V), alors que les équations des isobares 2 → 3 et 4 → 1 sont données par $S = C_p \ln T + cste$ dans le diagramme T(S) (et pour $C_p = cste \ldots$).

D'après le premier principe, pour une quantité donnée de fluide « recevant » globalement, au cours d'un cycle, le travail $-W_u$ et l'énergie thermique $Q_c - Q_f$:

$$\Delta U = 0 = -W_u + Q_c - Q_f, \quad \text{d'où} \quad W_u = Q_c - Q_f$$

et : $\eta = \dfrac{W_u}{Q_c}$ $\qquad$ $\eta = \dfrac{Q_c - Q_f}{Q_c} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \dfrac{Q_f}{Q_c}}$

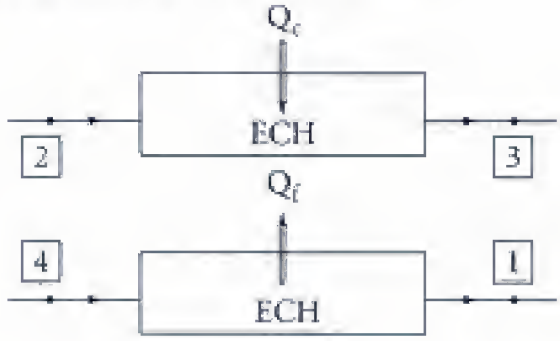
Raisonnons alors sur l'unité de masse du fluide.

Dans les échangeurs isobares, pour une masse unité débitée, nous avons :

$$Q_c = h_3 - h_2$$

et

$$-Q_f = h_1 - h_4$$

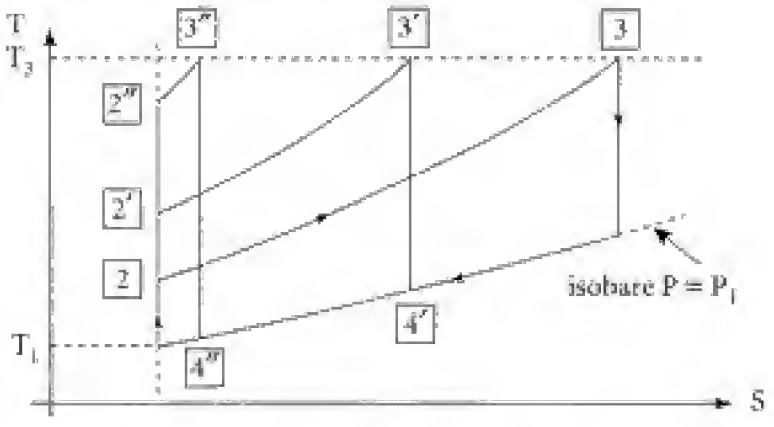


Copyrighted material

Hidden page

Commentaire

Le rendement du cycle peut s'exprimer sous la forme $\eta = 1 - \dfrac{T_1}{T_2}$ (*cf.* **2.**). Représentons différents cycles dans le diagramme (T, S) pour des températures T_1 et T_3 fixées, une pression P_1 donnée, et différentes valeurs de P_2 c'est-à-dire de T_2 :



L'efficacité est maximale pour T_2 la plus grande possible, soit $T_2 = T_3$ $\left(\eta_{max} = 1 - \dfrac{T_1}{T_3}\right)$. Dans une telle situation limite, le travail récupéré, qui est représenté par l'aire du cycle devient nul. Réciproquement, le travail maximal ne correspond pas à l'efficacité optimale.

Copyrighted material

Hidden page

201 « Isolation » d'une conduite

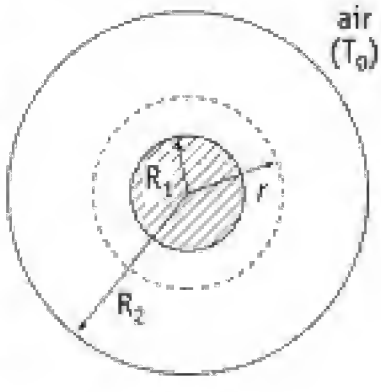
Partie A

On considère deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$).

Elles sont maintenues à des températures constantes T_1 et T_2. Le milieu solide les séparant est homogène, isotrope et présente une conductivité thermique K indépendante de la température. On suppose qu'il y a continuité de la température aux interfaces sphères-milieu solide. Déterminer la puissance thermique P_{th} transférée, en régime permanent, de la sphère intérieure vers la sphère extérieure.

Partie B

Un tube cylindrique de rayon R_1 (conduite d'eau chaude, fil électrique) est entouré d'un manchon (rayon intérieur R_1, rayon extérieur R_2, conductivité thermique λ) qui « l'isole » du milieu extérieur (ici l'air à la température constante T_0).



Les échanges thermiques entre la surface du tube et l'isolant sont caractérisés par un coefficient de transfert h : la puissance thermique échangée par unité de surface est donnée par l'expression $h(T_1 - T_1')$ où T_1 représente la température du tube en $r = R_1^-$ et T_1' celle de l'isolant au « contact » en R_1^+.

De même, les échanges thermiques isolant/air sont associés à un coefficient h'.

1. Déterminer la puissance thermique ϕ_{th} échangée, en régime permanent, entre le tube et l'air. On supposera que la température ne dépend que de r, distance à l'axe, et on exprimera ϕ_{th} en fonction de $T_1 - T_0$. Interpréter le résultat obtenu.

2. Étudier les variations de ϕ_{th} avec R_2, à R_1, h', λ, T_1 et T_0 donnés et pour h « infini » (contact parfait). Quelles remarques vous suggèrent ces résultats ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Transport d'énergie thermique par conduction : loi de Fourier.
- Notion de résistance thermique.
- Échange d'énergie thermique en surface.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. On exploitera la symétrie sphérique (les grandeurs ne dépendent que de r) et la stationnarité (le régime étant indépendant du temps, il ne peut pas y avoir accumulation ou déperdition d'énergie thermique au sein du matériau).

B. On passe d'une géométrie sphérique (A) à une géométrie cylindrique. Les principes restent les mêmes, les contacts entre les différents milieux étant ici non parfaits (il y a, aux interfaces, continuité du flux thermique mais pas des températures).

Copyrighted material

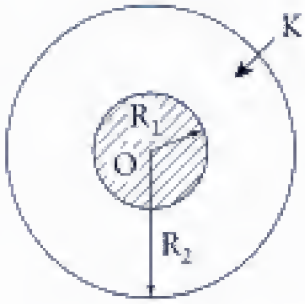
3. Solution

Partie A

Le régime stationnaire $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ et la symétrie sphérique impliquent :

$$T = T(r) \text{ avec } \begin{cases} T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2. \end{cases}$$

La stationnarité ne peut s'obtenir ici que si le flux thermique traversant une sphère de rayon r (avec $R_1 < r < R_2$) ne dépend pas de r.



Point méthode

Il est plus simple ici de passer par la propriété de conservation du flux thermique à travers un tube de courant (régime stationnaire) que de vouloir résoudre l'équation de la chaleur :

$$\Delta T = D_{th}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

avec une formulation hypothétique du Laplacien en coordonnées sphériques…

Si $\vec{j}_q$ désigne le vecteur densité volumique de courant d'énergie thermique, nous avons, dans un milieu isotrope homogène :

• $\vec{j}_q = -K\overrightarrow{\text{grad}}T$ (loi de Fourier)

le coefficient de conductivité thermique K peut dépendre *a priori* de la température T, on le supposera constant sur les intervalles de température considérés.

• L'énergie thermique qui traverse, pendant l'intervalle de temps dt, l'élément de surface $\delta\Sigma$, centré en M vaut :

$$\delta^2 Q = \vec{j}_q \cdot \vec{n}\,\delta\Sigma dt.$$

Il lui correspond un flux thermique :

$$\delta\phi_{th} = \frac{\delta^2 Q}{dt} = \vec{j}_q \cdot \vec{n}\,\delta\Sigma$$

Ici, étant donnée la symétrie sphérique, nous avons : $\vec{j}_q = -K\overrightarrow{\text{grad}}T = -K\frac{dT}{dr}\vec{u}$.

Soit un flux thermique à travers la sphère de centre O, de rayon r et de surface $S(r) = 4\pi r^2$:

$$\phi_{th}^{\text{sphère}} = -K\frac{dT}{dr}\cdot 4\pi r^2 = \text{cste} = P_{th}.$$

Cette constante s'identifie à la puissance thermique P_{th} émise par la sphère de rayon R_1 (pour $T_1 > T_2$) et reçue par la sphère de rayon R_2.

D'où : $-K\frac{dT}{dr}\cdot 4\pi r^2 = P_{th}$ et $\frac{dT}{dr} = -\frac{P_{th}}{4\pi K r^2}$.

Copyrighted material

Soit, en intégrant l'expression précédente entre $r = R_1$ et $r = R_2$:

$$\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{dT}{dr}\right)dr = -\frac{P_{th}}{4\pi K}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

d'où $T(R_2) - T(R_1) = \dfrac{P_{th}}{4\pi K}\left[\dfrac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$; $T_2 - T_1 = \dfrac{P_{th}}{4\pi K}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)$

soit encore : $$T_1 - T_2 = P_{th}\frac{1}{4\pi K}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \quad (1)$$

Soit un flux d'énergie thermique :

$$\boxed{P_{th} = 4\pi K\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2)} \quad (2)$$

POINT COURS

La relation (1) permet de définir une résistance thermique R_{th} telle que :

$$T_1 - T_2 = R_{th}\frac{\delta Q}{dt}$$

$$P_{th} = \frac{\delta Q}{dt}$$

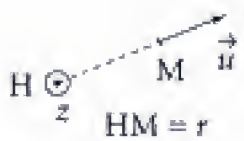
Ici, nous avons : $R_{th} = \dfrac{1}{4\pi K}\dfrac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$.

Cette expression est évidemment analogue à celle de la résistance électrique d'un milieu de conductivité électrique γ, placé entre deux électrodes sphériques concentriques de rayons R_1 et R_2 ($K \leftrightarrow \gamma$)...

Partie B

B. 1. Le système est à symétrie de révolution autour de l'axe Oz, on a donc en coordonnées cylindriques de même axe :

$$T = T(r) \quad \text{et} \quad \vec{j}_q = -K\frac{dT}{dr}\vec{u}.$$



Le flux d'énergie thermique ϕ_{th} traversant le cylindre de longueur l et de rayon r ($R_1 < r < R_2$) est donné par l'expression :

$$\phi_{th} = \int \vec{j}_q \cdot \vec{n}_{ext}\delta\Sigma = -\lambda\frac{dT}{dr}2\pi r l \quad (3)$$

Cette quantité ne doit pas dépendre de r puisqu'il ne peut y avoir, en régime permanent, ni dissipation ni accumulation d'énergie thermique dans le matériau. Il est alors possible d'intégrer la relation (3) pour obtenir la répartition de température dans l'isolant. Ainsi :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda l}\frac{1}{r} \quad \text{et} \quad T(r) = -\frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda l}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + \text{cste}.$$

D'après l'énoncé, on note $T_1' = T(R_1^+)$, d'où cste $= T_1'$ et :

$$\boxed{T(R_1 < r < R_2) = T_1' - \frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda l}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)} \quad (4)$$

Copyrighted material

Il reste à traduire les échanges thermiques aux deux interfaces.

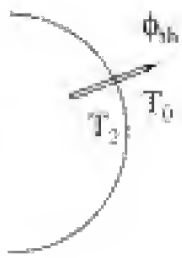
■ **Interface conduite-manchon** : le flux thermique pour un élément de longueur l doit être égal à ϕ_{th} défini précédemment (continuité du flux thermique). D'où : $\phi_{th} = h(T_1 - T_1')\Sigma_1$

Or $\Sigma_1 = 2\pi R_1 l$, d'où : $\boxed{\phi_{th} = h(T_1 - T_1')2\pi R_1 l}$ (5)

On a bien $\phi_{th} > 0$ pour $T_1 > T_1'$.

■ **Interface manchon-air** :

De la même façon, il vient : $\boxed{\phi_{th} = h'(T_2 - T_0)2\pi R_2 l}$ (6)



Les résultats (4), (5) et (6) permettent d'exprimer ϕ_{th} uniquement en fonction des températures T_1 (température de surface du tube) et T_0 (température de l'air).

$$T_1' - T_2 = \frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda l}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) ; \; T_1 - T_1' = \frac{\phi_{th}}{2\pi R_1 h l} ; \; T_2 - T_0 = \frac{\phi_{th}}{2\pi R_2 h' l}$$

■ Soit, en faisant la somme de ces trois égalités :

$$\boxed{T_1 - T_0 = \phi_{th}\left[\frac{1}{2\pi R_1 h l} + \frac{1}{2\pi\lambda l}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi R_2 h' l}\right]}$$

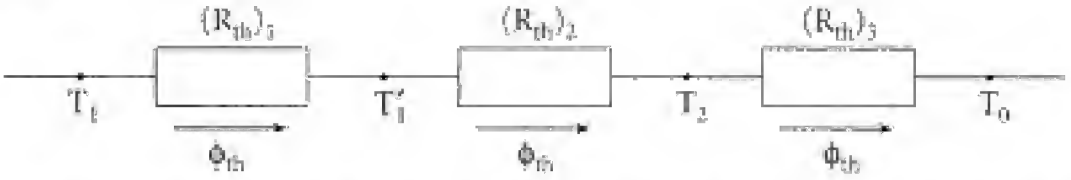
Ce résultat peut s'interpréter en terme de **résistances thermiques** dont la définition est donnée par :
$T - T' = R_{th}\phi_{th}$ (par analogie avec $V_A - V_B = Ri\ldots$).
On a donc ici : $T_1 - T_0 = \phi_{th}[(R_{th})_1 + (R_{th})_2 + (R_{th})_3]$

$(R_{th})_1$ est la résistance thermique de « surface » tube/manchon :

$$(R_{th})_1 = \frac{1}{h\Sigma_1} \text{ où } \Sigma_1 = 2\pi R_1 l \text{ (pour une longueur } l\text{).}$$

De même $(R_{th})_3 = \frac{1}{h'\Sigma_2}$ et $(R_{th})_2 = \frac{1}{2\pi\lambda l}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$; cette dernière expression est l'analogue de la résistance électrique associée à un milieu de conductivité électrique γ compris entre les deux électrodes cylindriques d'un condensateur de rayons R_1 et R_2 et de longueur l.

Ces résistances sont associées **en série**. On peut représenter le système par le schéma suivant :



B. 2. Pour étudier les variations de ϕ_{th} en fonction de R_2, à R_1, h, h', λ, T_1 et T_0 fixés (ainsi que pour une longueur l donnée du système), il suffit d'examiner les variations de la résistance thermique totale $R_{th} = R_{th_2} + R_{th_3}$ en fonction de R_2 ($R_{th_1} = 0$ pour h « infini »).

Copyrighted material

Or $$R_{th} = \frac{1}{2\pi l}\left[\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{h' R_2}\right].$$

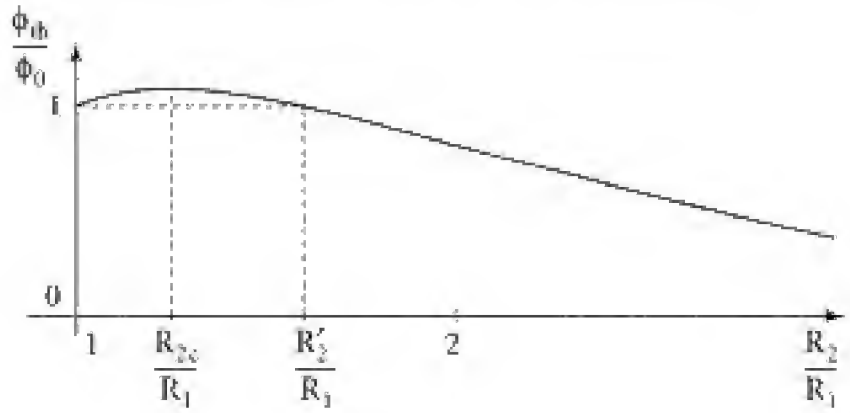
D'où $$\frac{dR_{th}}{dR_2} = \frac{1}{2\pi l}\left[\frac{1}{\lambda R_2} - \frac{1}{h' R_2^2}\right] = \frac{1}{2\pi l \lambda}\frac{1}{R_2^2}\left[R_2 - \frac{\lambda}{h'}\right].$$

La fonction $R_2 \to R_{th}$ présente donc un minimum pour $R_2 = R_{2c} = \frac{\lambda}{h'}$.

Deux cas peuvent se présenter :

■ 1er cas : $R_1 > \frac{\lambda}{h'}$: la résistance thermique est une fonction croissante de R_2 ($R_2 > R_1$) et ϕ_{th} une fonction décroissante. Dans ce cas, le manchon peut être utilisé pour isoler le tube de l'extérieur. Son efficacité est d'autant plus importante que son épaisseur est grande, mais le coût est d'autant plus élevé.

■ 2e cas : $R_1 < \frac{\lambda}{h'}$: cette fois-ci, la résistance thermique présente un minimum pour $R_2 = \frac{\lambda}{h'} > R_1$, associé à une valeur maximale du flux thermique.



On a tracé la courbe $\frac{\phi_{th}}{\phi_0} = f\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ en notant $\phi_0 = 2\pi l R_1 h'(T_1 - T_0)$:

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_{2c}}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \text{avec} \quad \frac{R_1}{R_{2c}} = 0{,}8.$$

Ce système présente un effet « inattendu » si on veut l'utiliser pour isoler, par exemple, une conduite d'eau chaude : le flux thermique est plus important avec l'isolant thermique ($\phi_{th} > \phi_0$) pour les valeurs de R_2 inférieures à une valeur R_2' telle que $\frac{\phi_{th}}{\phi_0}\left(\frac{R_2'}{R_1}\right) = 1$.

Par contre, si l'on désire transférer un maximum d'énergie thermique (cas d'un fil électrique parcouru par un courant important, dont on veut maintenir la température à une valeur raisonnable), on pourra exploiter cette configuration en choisissant $R_2 \sim R_{2c}$.

Copyrighted material

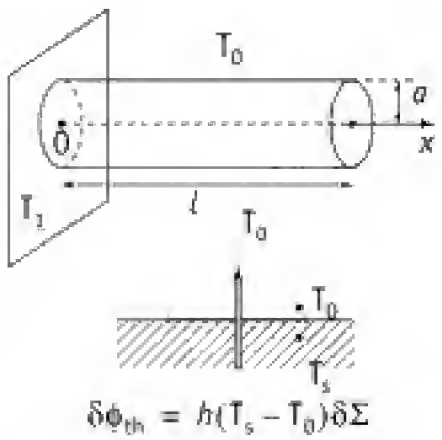
Commentaire

Ces résultats s'expliquent par des variations en sens contraire des résistances thermiques de conduction $(R_{th})_2$ et de convection $(R_{th})_3$. Ainsi $(R_{th})_2$ augmente en même temps que R_2 (l'épaisseur traversée étant plus importante), alors que $(R_{th})_3$ diminue quand R_2, c'est-à-dire la surface extérieure, croît.

202 Régulation thermique par ailette

Pour maintenir une plaque plane à température T_1 constante, on cherche à évacuer de l'énergie thermique par l'intermédiaire d'une barre cylindrique (longueur l, rayon a), constituée d'un matériau présentant une conductivité thermique K'.

Les échanges thermiques avec l'air ambiant (de température T_0) s'effectuent à travers l'interface solide-air et se caractérisent par une puissance thermique surfacique égale à $h(T_s - T_0)$ où T_s représente la température de surface au point considéré.



On fait les hypothèses suivantes :

hyp. 1 : la température est uniforme sur une section donnée du cylindre ;

hyp. 2 : on assimile la barre à un cylindre de longueur infinie ;

hyp. 3 : l'étude est faite en régime stationnaire ;

hyp. 4 : le contact thermique entre la plaque et la barre est supposé parfait.

On note $\lambda = \sqrt{\dfrac{K'a}{2h}}$.

1. Donner la dimension de la grandeur λ.

2. Justifier les hypothèses 1 et 2.

3. a. Déterminer la répartition de température $T(x)$ au sein de la barre.

b. Évaluer l'efficacité η du système. On supposera que les échanges thermiques pour l'interface plaque-air sont de même nature que ceux relatifs à l'interface barre-air (même coefficient h).

A.N. : calculer η pour $K' = 300\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$; $h = 15\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ et $a = 1\ mm$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Conduction thermique : loi de Fourier.
- Échanges thermiques en surface.
- Équations et estimation des ordres de grandeur.

Copyrighted material

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On pourra utiliser les relations physiques (flux thermiques) faisant intervenir les grandeurs K′ et h.

2. On posera $T(x, r = a) - T(x, r = 0) = \delta T$ puis on comparera δT à $T - T_0$ dans l'hypothèse retenue ici où $|\delta T| \ll |T - T_0|$.

Pour l'hypothèse 2, il suffit normalement de comparer la longueur l de la barre à la longueur caractéristique du problème physique (qu'il faudra identifier à λ).

3. a. Un simple bilan énergétique (premier principe) – relatif à un élément de barre de longueur dx – permet d'établir l'équation en $T(x)$. On l'intégrera dans le cadre d'une barre théoriquement infinie.

b. L'efficacité sera définie comme le rapport des flux thermiques « prélevés » à la plaque, avec ou sans barre, et pour une surface S donnée de cette plaque.

3. Solution

1. On a $\lambda^2 = \dfrac{K'a}{2h}$ soit en notant $[G]$ la dimension d'une grandeur G, avec $[G] = L$ pour une longueur, $[G] = M$ pour une masse, $[G] = T'$ pour un temps… : $[\lambda^2] = \dfrac{[K'][a]}{[h]}$.

Or $\phi_{th} = j_q \cdot S = -K'\dfrac{\partial T}{\partial x}S \Rightarrow [\phi_{th}] = [K']\dfrac{[T]}{L}L^2 = [K'][T]L$

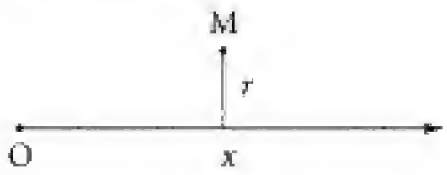
de même : $\phi_{th} = h(T_1 - T_2) \cdot \Sigma \Rightarrow [\phi_{th}] = [h][T] \cdot L^2$. Nous obtenons donc :

$$\left.\begin{aligned} [K'] \cdot [T] &= \frac{[\phi_{th}]}{L} \\ [h][T] &= \frac{[\phi_{th}]}{L^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{[K']}{[h]} = L \Rightarrow \frac{[K'] \cdot [a]}{[h]} = L \cdot L = L^2.$$

On a donc $[\lambda^2] = L^2$, d'où : $[\lambda] = L$. La grandeur λ est homogène à une longueur. Elle s'identifiera à la longueur caractéristique régissant le problème physique étudié.

2. ■ Hyp. 1 : la température est « uniforme » sur une section donnée

Repérons un point M, au sein de la barre, par ses coordonnées cylindriques (x, r). On pourra négliger les variations de température avec r devant celles avec x si l'on a :



$$\left|\frac{\partial T}{\partial r}\right| \ll \left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| \quad (1)$$

Or par symétrie, $\dfrac{\partial T}{\partial r}(r = 0) = 0$. D'autre part, la continuité du flux thermique à la surface de la barre s'écrit, pour une surface élémentaire $\delta\Sigma = 2\pi a dx$:

$$-K'\frac{\partial T}{\partial r}\Big)_{r=a} \delta\Sigma = h[T(r = a) - T_0] \cdot \delta\Sigma \quad (2)$$

Copyrighted material

Écrivons $T(r = a) = T(r = 0) + \delta T$ où l'on suppose $|\delta T| \ll T(r = 0)$.

(2) s'écrit alors au niveau des ordres de grandeur :

$$K' \frac{|\delta T|}{a} \sim h(T - T_0) \quad \text{où} \quad T \sim T(r = 0) \sim T(r = a).$$

L'approximation est d'autant mieux justifiée que $|\delta T|$ est petit devant $T - T_0$. Soit

$$\frac{|\delta T|}{T - T_0} = \frac{ha}{K'} \ll 1.$$

La condition cherchée s'écrit donc : $\boxed{\dfrac{ha}{K'} \ll 1}$ (3)

$$K' = 300\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} ; \quad h = 15\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}.$$

D'où $$a \ll \frac{300}{15} \Rightarrow a \ll 20\ m\ !$$

Ce qui justifie l'approximation faite (notons que cette étude n'a de sens que si la dimension transversale reste suffisamment petite devant la longueur l de la barre : *cf.* suite).

Commentaire

Notons λ la longueur caractéristique associée aux variations de la température en fonction de x, alors :

$$\left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| \sim \frac{T - T_0}{\lambda}.$$

L'inégalité (1) devient avec (2) : $\dfrac{(T - T_0)}{\lambda} \gg \dfrac{h}{K'}(T - T_0) \Rightarrow \lambda \ll \dfrac{K'}{h}$ (4)

Le bilan énergétique se traduira par l'équation différentielle : $K' \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pi a^2 = h(T - T_0) 2\pi a$.

D'où l'on tire : $K' \dfrac{(T - T_0)}{\lambda^2} a^2 \sim h(T - T_0)a$. Soit $\dfrac{K'a}{\lambda^2} \sim h$, et l'inégalité (4) devient :

$$\sqrt{\frac{K'a}{h}} \ll \frac{K'}{h} \quad \text{d'où} \quad \boxed{a \ll \frac{K'}{h}} \text{ (en accord avec (3))}$$

■ **Hyp. 2 : on assimile la barre à un cylindre de longueur infinie**

La barre peut être assimilée à une barre infinie lorsque sa longueur est grande devant la longueur caractéristique λ introduite plus haut (*cf.* commentaire) et dont l'ordre de grandeur est donné par $\lambda \sim \sqrt{\dfrac{K'a}{h}}$.

Soit $l \gg \sqrt{\dfrac{K'a}{h}}$ (5)

Commentaires

• Remarquons qu'alors $\dfrac{l}{a} \gg \sqrt{\dfrac{K'}{ha}}$, soit avec (3), $\dfrac{l}{a} \gg 1$ comme il se doit.

Copyrighted material

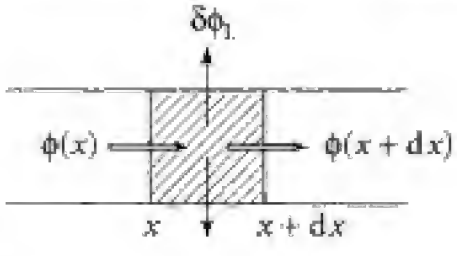
• Le résultat (5) est physiquement cohérent puisque l doit être d'autant plus grand que la conductivité thermique de la barre est importante et que les « fuites thermiques » sont faibles. La variation avec a est également prévisible puisque les flux thermiques sont proportionnels à a^2 (*cf.* section de la barre) pour la conduction thermique et à a (*cf.* périmètre du cylindre) pour le transport latéral.

• De plus, (5) peut s'écrire : $hl^2 \gg K'a \Rightarrow h(T_1 - T_0)la \gg \frac{K'a^2}{l}(T_1 - T_0)$ (pour $T_1 > T_0$)

ou encore $$h(T_1 - T_0)\Sigma_L \gg \frac{K'S}{l}(T_1 - T_0).$$

Le premier terme de cette inégalité représente la puissance thermique totale échangée entre la barre et l'extérieur à travers la surface latérale (du moins tant que l est suffisamment grand devant λ). Le deuxième terme est associé à la puissance thermique véhiculée le long de la barre si l'on néglige les fuites latérales ($h = 0$), et pour des températures aux extrémités T_1 et T_0.

3. a. Faisons le bilan énergétique pour l'élément de longueur dx. Son énergie interne δU reste invariable (régime stationnaire et système indéformable), d'où :



$$\frac{d\delta U}{dt} = 0 = \delta P_{th} = \phi(x) - \phi(x + dx) + \delta\phi_L$$

avec $\begin{cases} \phi(x) = j_q(x)S \; ; \; \phi(x + dx) = j_q(x + dx)S \\ \text{et } \delta\phi_L = h(T(x) - T_0)\delta\Sigma_L. \end{cases}$

Soit $$\delta P_{th} = j_q(x)S - j_q(x + dx)S - h(T(x) - T_0)\delta\Sigma_L$$

et $$\delta P_{th} = -S\frac{dj_q}{dx}dx - h(T(x) - T_0)\delta\Sigma_L.$$

Pour une barre cylindrique de section circulaire de rayon a, nous avons :

$$S = \pi a^2 \; ; \quad \delta\Sigma_L = 2\pi a dx$$

d'où $$\delta P_{th} = \left\{-\pi a^2\frac{dj_q}{dx} - h(T(x) - T_0)2\pi a\right\}dx.$$

Et avec la loi de Fourier $j_q(x) = -K'\frac{dT}{dx}$:

$$\delta P_{th} = \left\{\pi a^2 K'\frac{d^2T}{dx^2} - h(T(x) - T_0)2\pi a\right\}dx = 0.$$

Ce qui donne finalement : $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{K'a}(T(x) - T_0) = 0}$

Il apparaît une longueur caractéristique $\lambda = \sqrt{\frac{K'a}{2h}}$, l'équation précédente s'écrivant :

$$\frac{d^2(T - T_0)}{dx^2} - \frac{T - T_0}{\lambda^2} = 0$$

dont la solution générale est : $T(x) - T_0 = A\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + B\exp\left(+\frac{x}{\lambda}\right)$ (6)

Copyrighted material

Hidden page

On définira alors un coefficient d'efficacité η selon :

$$\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{\frac{K'S}{\lambda}(T_1 - T_0)}{h(T_1 - T_0)S} = \frac{K'}{\lambda h} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{K'}{\lambda h}}$$

On peut remarquer que ce coefficient prend des valeurs importantes dès que les approximations sont réalisées (*cf.* (4)). Ainsi pour les valeurs de l'énoncé, avec $a = 1$ mm :

$$\eta = \frac{K'}{h}\sqrt{\frac{2h}{K'a}}; \quad \eta = \sqrt{\frac{2K'}{ha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{15 \cdot 10^{-3}}} = 200.$$

Commentaire

On peut vérifier que l'on a également (dans le cadre de la modélisation) :

$$\phi' = \int_0^\infty h(T(x) - T_0)\delta\Sigma \quad \text{où} \quad \delta\Sigma = 2\pi a\,dx.$$

Soit encore : $\phi' = h(T_1 - T_0)2\pi a\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx$ où $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx = \lambda.$

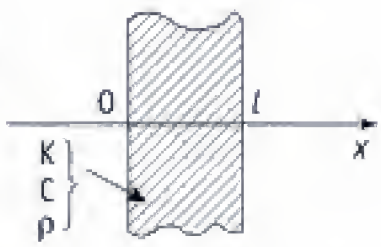
$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc : } \phi' = h\lambda 2\pi a(T_1 - T_0) \\ \text{or : } \lambda = \sqrt{\frac{K'a}{2h}} \Rightarrow h = \frac{1}{2}\frac{K'a}{\lambda^2} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \phi' = \frac{K'\pi a^2}{\lambda}(T_1 - T_0).$$

On retrouve bien le résultat précédent ($S = \pi a^2$).

203 Phénomènes instationnaires

Partie A

Un matériau, compris entre les plans $x = 0$ et $x = l$, possède une conductivité thermique K, une capacité calorifique massique c et une masse volumique ρ (grandeurs considérées comme invariables).



À $t = 0$, la température du milieu est donnée par la relation : $T(x, t = 0) = T_0 + \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

On le plonge à cet instant dans un thermostat de température T_0. La température $T(x, t)$ ne dépend que de x à t fixé. Déterminer la répartition de température $T(x, t)$.

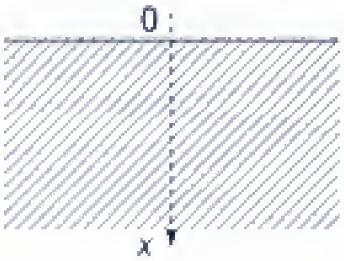
On posera $\tau = \frac{\rho c l^2}{K\pi^2}$.

Partie B

On assimile la Terre, localement, à un demi-espace infini situé du coté des x positifs.

Copyrighted material

(Masse volumique μ ; capacité thermique massique c ; conductibilité thermique K.)



On suppose qu'à la surface du sol (plan $x = 0$), la température varie selon la loi :

$$\theta(0, t) = \theta_0 - \theta_1 \cos\omega t;$$

(température Celsius) θ_0 et θ_1 constantes positives.

1. Déterminer la répartition de température $\theta(x, t)$ en régime permanent. Qu'observe-t-on ?

On note : $\delta = \sqrt{\dfrac{2D}{\omega}}$ où $D = \dfrac{K}{\mu c}$.

2. Applications :

a. Influence des variations annuelles de température : on considère que la température minimale vaut $\theta_m = -10$ °C (~ 1er janvier) et la température maximale $\theta_M = 30$ °C (~ 1er juillet).

• À quelle date la température est-elle minimale à une profondeur de 2 m ?

Calculer cette valeur minimale.

• Tracer la courbe donnant $\theta(x, t_0)$ pour une date t_0 correspondant au 1er mars.

b. Influence des variations journalières (variations de $\theta_m = 2{,}5$ °C la nuit à $\theta_M = 17{,}5$ °C dans la journée). Évaluer la profondeur d_m à partir de laquelle la variation journalière de température est inférieure à 1 °C.

$\mu = 3 \cdot 10^3$ kg · m^{-3} ; $c = 515$ J · kg^{-1} · K^{-1} ; K = 1 J · m^{-1} · s^{-1} · K^{-1}.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de diffusion de l'énergie thermique : solution instationnaire.
- Problèmes avec conditions aux limites : méthode de séparation des variables.
- Réponse en régime permanent sinusoïdal.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. On cherchera une solution à l'équation de la chaleur compatible avec les conditions aux limites et avec la condition initiale. On doit s'attendre à ce que $T(x, t) - T_0$ tende vers zéro pour t suffisamment grand, soit plus précisément pour $t \gg \tau$ où $\tau \sim \dfrac{\rho c l^2}{K}$ (grandeur homogène à un temps que l'on peut former à partir des grandeurs caractéristiques du problème ρ, c, K et l).

B. En l'absence de variations de la température au niveau du sol, on aurait $\theta(x, t) = \theta_0$. On posera donc $\theta(x, t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(x, t)$, et on cherchera pour $\tilde{\theta}(x, t)$, une solution de régime établi sinusoïdale dans le temps (pulsation ω).

Il sera plus commode d'adopter la notation complexe.

Copyrighted material

3. Solution

Partie A

La répartition $T(x, 0)$ ne peut se maintenir dans le matériau, bien que l'on ait $T(0, 0) = T(l, 0) = T_0$. En effet, à l'instant $t = 0$, le vecteur densité de courant volumique d'énergie thermique est donné par : $\vec{j}_q(x, 0) = -K\dfrac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x = -K\theta_0\dfrac{\pi}{l}\cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)\vec{u}_x$.

Il en résulte un flux thermique, dépendant de x, qui ne peut pas être associé à un régime stationnaire (au sens indépendant du temps). La répartition des températures va donc évoluer dans le temps. Le seul état permanent pouvant se maintenir indéfiniment correspond, bien évidemment, à une température uniforme T_0. Posons donc $T(x, t) - T_0 = f(x, t)$ et donnons les équations vérifiées par la fonction $f(x, t)$. Nous devons avoir :

$$\begin{cases} f(x, 0) = \theta_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right) & (1) \\ f(0, t) = 0 \text{ pour tout } t \quad (T = T_0) & (2) \\ f(l, t) = 0 \text{ pour tout } t \quad (T = T_0) & (3) \end{cases}$$

(1) : conditions initiales ; (2) et (3) : conditions aux limites

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\rho c}{K}\dfrac{\partial f}{\partial t}$ (équation de diffusion de la chaleur) (4)

Cherchons alors une solution de la forme $f(x, t) = g(t)h(x)$.

POINT MÉTHODE

Une telle solution (méthode dite de séparation des variables) présente l'avantage de pouvoir assurer certaines conditions aux limites quel que soit t.
Ainsi on doit réaliser ici, à tout instant, $T = T_0$ pour $x = 0$ et $x = l$, soit :

$$\left.\begin{array}{l} f(0, t) = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \quad \forall t \\ f(l, t) = 0 \Rightarrow h(l) = 0 \quad \forall t \end{array}\right\} \quad (5)$$

Et avec la condition initiale $f(x, 0) = \theta_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$, on est amené à envisager la solution : $f(x, t) = g(t)\theta_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$. Cette solution a l'avantage d'être compatible avec (1), (2) et (3) si l'on pose $g(0) = 1$. Il reste à vérifier (4), ce qui se traduit par :

$$-\theta_0 g(t) \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{\rho c}{K}\theta_0 \frac{dg}{dt}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Équation qui doit être vérifiée pour tout x appartenant à l'intervalle $(0, l)$, d'où :

$$\frac{dg}{dt} + \frac{K}{\rho c} \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot g(t) = 0 \quad \text{et} \quad g(t) = \exp\left[-\frac{K\pi^2}{\rho c l^2}t\right], \quad (g(0) = 1).$$

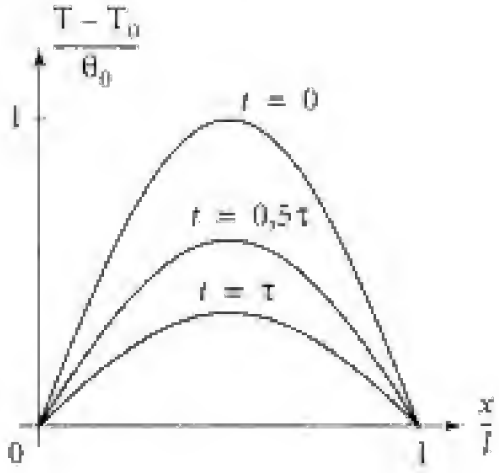
D'où la solution : $\boxed{T(x, t) = T_0 + \theta_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \dfrac{\rho c}{K\pi^2}l^2}$

Copyrighted material

Commentaire

Le coefficient $D = \frac{K}{\rho c}$ est appelé **diffusivité thermique**. Pour un milieu de nature physique donnée (ρ, c, K et donc D fixés), $\tau \sim \frac{1}{D} l^2$, relation caractéristique des phénomènes de diffusion liant une échelle de temps, ici τ, à une échelle de longueur, ici l, sur laquelle s'effectue la diffusion.

On donne ci-dessous les courbes $\frac{x}{l} \to \frac{T - T_0}{\theta_0}$:



Partie B

B. 1. L'évolution de la température est obtenue à partir de l'équation de la chaleur (*cf.* **A**) avec $T(x, t) = \theta(x, t) + 273{,}15$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (6) \text{ avec } D = \frac{K}{\mu c} \text{ (coefficient de diffusivité).}$$

En régime permanent (pour lequel les variations de températures dans le temps sont sinusoïdales, leur période étant imposée par celle des variations régnant au niveau du sol), nous poserons : $\theta(x, t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(x, t)$

avec : $\tilde{\theta}(x, t) = \Re[\underline{\tilde{\theta}}(x, t)]$ où $\underline{\tilde{\theta}}(x, t) = \underline{\Theta}(x)\exp(j\omega t)$.

Reportant cette solution dans (6), il vient : $j\omega\underline{\Theta}(x) = D\frac{\partial^2 \underline{\Theta}}{\partial x^2}$ soit : $\frac{\partial^2 \underline{\Theta}}{\partial x^2} = j\frac{\omega}{D}\underline{\Theta}$.

Or $j\frac{\omega}{D} = \left[(1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right]^2$ et $\frac{\partial^2 \underline{\Theta}}{\partial x^2} - \left[(1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right]^2 \underline{\Theta} = 0$.

Soit une amplitude complexe : $\underline{\Theta}(x) = \underline{\alpha}\exp\left((1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right) + \underline{\beta}\exp\left(-(1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right)$.

La quantité $\sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \delta$ est homogène à une longueur. De plus, $|\underline{\theta}(x)|$ doit rester borné (physiquement, les variations de température au niveau du sol ne doivent plus avoir d'effet pour x augmentant indéfiniment : $\lim_{x \to +\infty} [\theta(x, t) - \theta_0] = 0$). D'où :

$$\underline{\Theta}(x) = \underline{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right).$$

Copyrighted material

La température à la profondeur x est alors :

$$\theta(x, t) = \theta_0 + \mathcal{R}e\left\{\underline{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)\right\}$$

soit : $\theta(x, t) = \theta_0 + \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cdot\left[a\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + b\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]$

et $\theta(0, t) = \theta_0 + a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

Ce qui permet d'identifier les constantes a et b : $a = -\theta_1$ et $b = 0$. Finalement :

$$\boxed{\theta(x, t) = \theta_0 - \theta_1\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

Commentaire

Cette solution de régime permanent présente les propriétés suivantes :

• Un amortissement exponentiel (terme $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$) dont la longueur caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ est proportionnelle à la racine carrée de la période (les variations de température au niveau du sol se font d'autant moins ressentir – en un point de profondeur donnée – qu'elles sont rapides).

• Une « propagation » $\left(\text{terme } \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$ associée à un déphasage entre la variation sinusoïdale de la température en un point de profondeur x et le sol. Il lui correspond un effet de retard $\left(\Delta t = \frac{x}{\delta\omega} = \frac{x}{\sqrt{2D\omega}}\right)$ plus faible pour les phénomènes à variations plus rapides dans le temps. Ainsi, pour un « sol » gelé en profondeur, le dégel commencera en surface (nécessité de barrières de dégel…).

• La distance caractéristique δ peut s'obtenir directement à partir de l'équation de la diffusion à l'aide d'une analyse aux ordres de grandeur :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

En notant « ~ » pour de « l'ordre de grandeur de » et en posant $T' = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right| \sim \left|\frac{\theta}{T'}\right| \sim \omega|\theta| \\ \left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right| \sim \left|\frac{\theta}{\delta^2}\right|\end{array}\right\} \omega|\theta| \sim \frac{|\theta|}{\delta^2}D \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{D}{\omega}} \quad \text{comme il se doit.}$$

B. 2. a. **Influence saisonnière des variations de température au niveau du sol :**

$$\theta(0, t) = \theta_0 - \theta_1\cos\omega t.$$

Les températures minimales et maximales sont données par :

$$\theta_m = \theta_0 - \theta_1 \quad (t = 0) \quad \text{et} \quad \theta_M = \theta_0 + \theta_1 \quad \left(t = \frac{T'}{2}\right).$$

D'où : $$\theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_M) \quad \text{et} \quad \theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_M - \theta_m).$$

Copyrighted material

Soit une répartition de température :

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_M) - \frac{1}{2}(\theta_M - \theta_m)\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

• $\frac{1}{2}(\theta_m + \theta_M) = \theta_0$ est la température moyenne $\langle\theta\rangle$ du « sol ».

Nous avons : $\langle\theta\rangle = \frac{1}{2}(-10 + 30) = 10\ °C$.

• Les variations de température par rapport à cette valeur moyenne sont fournies par :

$$\theta(x, t) - \langle\theta\rangle = -20\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

La température est minimale – pour une profondeur d – à l'instant t_1 tel que :

$$\omega t_1 - \frac{d}{\delta} = 0 \quad \text{soit} \quad t_1 = \frac{d}{\omega\delta};$$

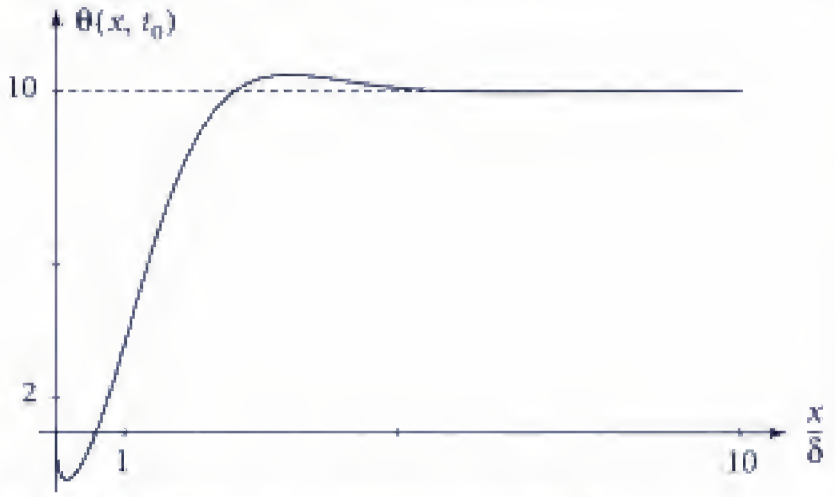
avec : $\theta_m(d, t_1) = 10 - 20\exp\left(-\frac{d}{\delta}\right) = 10 - 20\exp(-\omega t_1)$.

A.N. : $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2K}{\mu c\omega}} = \left(\frac{2 \cdot 1 \cdot 365 \cdot 86\,400}{3 \cdot 10^3 \cdot 515 \cdot 2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 2{,}55\ \text{m}$

$t_1 = \frac{365 \times 2}{2{,}55 \times 2\pi} = \mathbf{45{,}6\ jours}$

et $\theta_m(d, t_1) = 10\left(1 - 2 \cdot \exp\left(-\frac{2}{2{,}55}\right)\right) = 0{,}88\ °C.$

• Pour le premier mars : $t_0 \approx \frac{1}{6}T'$; d'où : $\theta(x, t_0) = 10\left[1 - 2\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{\delta}\right)\right]$.



$\frac{x}{\delta}$	$\theta(x, t_0)$
0	0
0,25	−0,88
0,50	−0,36
0,75	+0,97
1	+2,65
2	+8,4
5	+10,1
10	+10

B. 2. b. Influence des variations journalières :

On a : $\langle\theta\rangle = \frac{1}{2}(2{,}5 + 17{,}5) = 10\ °C$ et $\frac{\theta_M - \theta_m}{\theta_M + \theta_m} = \frac{15}{20} = 0{,}75$;

$$\omega = \frac{2\pi}{T'(1\ \text{jour})} \quad \text{et} \quad \delta = \left(\frac{2 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 3\,600}{3 \cdot 10^3 \cdot 515 \cdot 2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \boldsymbol{\delta = 0{,}133\ \text{m}}.$$

Copyrighted material

Hidden page

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La température est continue en $x = 0$ (contact parfait) et vaut T_0. Il y a également continuité du flux thermique et conservation de l'énergie interne du système.

2. Les solutions proposées doivent vérifier l'équation de la chaleur ainsi que les conditions aux limites (en $x = 0$, et pour $x \to \pm\infty$; barres suffisamment longues).

3. Solution

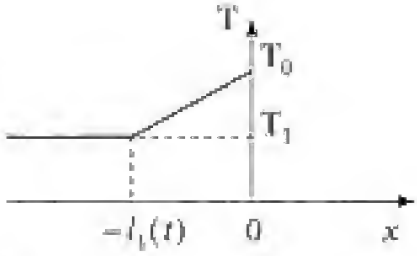
1. L'hypothèse de l'énoncé impose une température continue, notée T_0, à la jonction, ainsi que la continuité du flux thermique, ce qui s'écrit : $Sj_q(0^-, t) = Sj_q(0^+, t)$

or $j_q(x < 0, t) = -K_1\dfrac{\partial T}{\partial x}(x, t)$ et $j_q(x > 0, t) = -K_2\dfrac{\partial T}{\partial x}(x, t)$

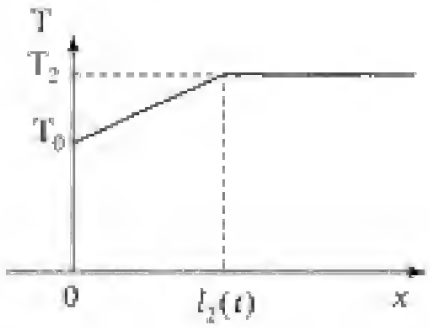
d'où : $K_1\dfrac{\partial T}{\partial x}(0^-, t) = K_2\dfrac{\partial T}{\partial x}(0^+, t)$ (1)

Dans le modèle proposé, la température croît de façon linéaire de T_1 à T_0 sur une longueur $l_1(t)$, d'où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0^-, t) = \frac{T_0 - T_1}{l_1(t)}.$$



De la même manière : $\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)(0^+, t) = \dfrac{T_2 - T_0}{l_2(t)}$.



L'égalité (1) devient alors :

$$\boxed{\frac{K_1}{l_1(t)}[T_0 - T_1] = \frac{K_2}{l_2(t)}[T_2 - T_0]} \quad (2)$$

On a donc $T_1 < T_0 < T_2$ $\left(T_0 = \dfrac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2}\right.$ où $\left.m_i = \dfrac{K_i}{l_i(t)} > 0\right)$.

■ D'autre part, le réchauffement de l'une des barres s'effectue au détriment de l'autre, ce qui doit se traduire par l'invariance de l'énergie interne du système (barres de volumes invariables…). Une tranche de longueur dx voit son énergie interne varier – entre les instants 0 et $t > 0$ – de la quantité :

$$\delta U(t) - \delta U(0) = (\rho_i S dx)C_i[T(x, t) - T_i].$$

La variation d'énergie interne de la barre ① s'obtient donc en intégrant l'expression précédente – à t fixé – de $x = -l_1(t)$ à $x = 0$, la température s'identifiant à T_1 pour $x < -l_1(t)$, d'où :

$$\Delta U_1 = \rho_1 C_1 S\int_{-l_1(t)}^{0}(T(x, t) - T_1)dx.$$

Copyrighted material

De même, pour la barre (2) : $\Delta U_2 = \rho_2 C_2 S \int_0^{l_2(t)} [T(x,t) - T_2]dx$.

Or : $\begin{cases} \text{pour } -l_1(t) \leqslant x \leqslant 0, \quad \text{on a } T(x,t) = T_0 - (T_1 - T_0)\dfrac{x}{l_1(t)} \\ \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant l_2(t), \quad \text{on a } T(x,t) = T_0 + (T_2 - T_0)\dfrac{x}{l_2(t)}. \end{cases}$

D'où : $\Delta U_1 = C_1\rho_1 S(T_0 - T_1)\int_{-l_1(t)}^{0}\left(1 + \dfrac{x}{l_1}\right)dx = \dfrac{1}{2}C_1\rho_1 S(T_0 - T_1)l_1$.

De la même manière, pour la deuxième barre : $\Delta U_2 = \dfrac{1}{2}C_2\rho_2 S(T_0 - T_2)l_2$.

La conservation de l'énergie s'écrit alors ($\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$) :

$$\boxed{C_1\rho_1 l_1(T_0 - T_1) + C_2\rho_2 l_2(T_0 - T_2) = 0} \quad (3)$$

■ Il reste à éliminer les grandeurs $l_1(t)$ et $l_2(t)$ entre les équations (2) et (3), ce qui donne :

$$C_1\rho_1 K_1[T_0 - T_1]^2 = C_2\rho_2 K_2[T_0 - T_2]^2.$$

Et, en se rappelant que $T_1 < T_0 < T_2$: $\sqrt{C_1\rho_1 K_1}[T_0 - T_1] = \sqrt{C_2\rho_2 K_2}[T_2 - T_0]$.

D'où finalement :

$$T_0 = \frac{\sqrt{C_2\rho_2 K_2}T_2 + \sqrt{C_1\rho_1 K_1}T_1}{\sqrt{C_2\rho_2 K_2} + \sqrt{C_1\rho_1 K_1}} \Rightarrow \boxed{T_0(t) = \frac{a_2 T_2 + a_1 T_1}{a_2 + a_1}} \ (4) \text{ où } a_i = \sqrt{\rho_i C_i K_i}.$$

2. On pourrait vérifier que la fonction $x \to \text{erf}\left[\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right]$ est bien solution de l'équation de la diffusion $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ où $D = \dfrac{K}{\rho C}$ (*cf.* fin de l'exercice).

POINT MÉTHODE

Cette solution a l'avantage de coupler le temps (t) et l'espace (x). La température prend une valeur donnée pour des points tels que $x(t) = \text{cste}\sqrt{Dt}$: elle contient donc l'idée même de diffusion reliant les distances sur lesquelles l'énergie thermique diffuse aux temps écoulés.

Ainsi on a : $\text{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \sim 0{,}5$ pour $x \sim 0{,}5\sqrt{4Dt} \sim \sqrt{Dt}$.

Cherchons alors des solutions au problème posé sous la forme :

$$T(x,t) = \alpha_2 + \beta_2 \text{erf}(u_2) \text{ pour } x > 0, \text{ avec } u_2 = \frac{x}{\sqrt{4D_2 t}};$$

$$T(x,t) = \alpha_1 + \beta_1 \text{erf}(u_1) \text{ pour } x < 0, \text{ avec } u_1 = \frac{x}{\sqrt{4D_1 t}}.$$

On a donc $\alpha_1 = \alpha_2 = T_0$ (quand $x \to 0$, u_1 et $u_2 \to 0$, et $\text{erf}(u_1)$ et $\text{erf}(u_2) \to 0$).

Copyrighted material

Les conditions aux limites imposent (barres suffisamment longues, c'est-à-dire qu'à t fixé, on doit avoir $L_i \gg \sqrt{D_i t}$ … ainsi pour $D = 4 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot s^{-1}$ (métal) :

$\sqrt{Dt} \sim 2$ cm pour $t = 1$ s $\sqrt{Dt} \sim 20$ cm pour $t = 100$ s… et la modélisation considérant des barres « infinies » ne reste valable qu'aux temps « courts »…) :

$$\lim_{x \to +\infty} T(x, t) = T_2 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 = T_2 \Rightarrow \boxed{\beta_2 = T_2 - T_0}$$

$$\lim_{x \to -\infty} T(x, t) = T_1 \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = T_1 \Rightarrow \boxed{\beta_1 = T_0 - T_1}$$

(en effet $\text{erf}(-u) = -\text{erf}(u)$).

Il reste à traduire la continuité du flux thermique en $x = 0$:

$$-K_1 S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0^-, t) = -K_2 S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0^+, t).$$

Or $\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\text{erf}(u)]\right\}_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \cdot 1 \quad \left(\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) = 1 \text{ en } x = 0 \text{ et } t \neq 0\right).$

On a donc en simplifiant :

$$\frac{K_1}{\sqrt{D_1}} \beta_1 = \frac{K_2}{\sqrt{D_2}} \beta_2.$$

En reportant dans la dernière relation les expressions de β_1 et β_2 établies plus haut :

$$\frac{K_1}{\sqrt{D_1}}(T_0 - T_1) = \frac{K_2}{\sqrt{D_2}}(T_2 - T_0).$$

Soit, avec $D_1 = \frac{K_1}{\rho_1 C_1}$ et $D_2 = \frac{K_2}{\rho_2 C_2}$: $\sqrt{C_1 \rho_1 K_1}[T_0 - T_1] = \sqrt{C_2 \rho_2 K_2}[T_2 - T_0]$.

La température de jonction T_0, déduite du modèle (question **1.**), est bien identique à celle déterminée à partir de la recherche de répartition de la température au sein de la barre (question **2.**).

Commentaires

• L'expression (4) nous montre que la température « au contact » est comprise entre T_1 et T_2. Elle est d'autant plus proche de T_2 (respectivement de T_1) que a_2 et grand (resp. petit) devant a_1. Ainsi, si l'on suppose que l'impression « de chaud ou de froid » est directement liée à cette température T_0, on peut comprendre pourquoi le contact main-métal semble plus froid que le contact main-bois (le métal et le bois étant à la même température ambiante T_1 (~ 20 °C) inférieure à celle du corps (~ 37 °C). Quelques valeurs numériques :

$$a(\text{fer pur}) = 1{,}7 \cdot 10^4\ J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \ ; \quad a(\text{sapin}) = 3{,}5 \cdot 10^{+2}\ J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \ ;$$

$$a(\text{eau}) = 1{,}3 \cdot 10^3\ J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-\frac{1}{2}}.$$

• Vérifions que la fonction $u \to \text{erf}(u)$ où $u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ est bien solution de l'équation de la chaleur $\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (5)

Copyrighted material

On a $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \exp(-y^2)\mathrm{d}y$ et $\frac{\mathrm{d}[\operatorname{erf}(u)]}{\mathrm{d}u} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-u^2) = g(u)$

d'où $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}[\operatorname{erf}(u)]}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = g(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}}}\cdot\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right)$ (6)

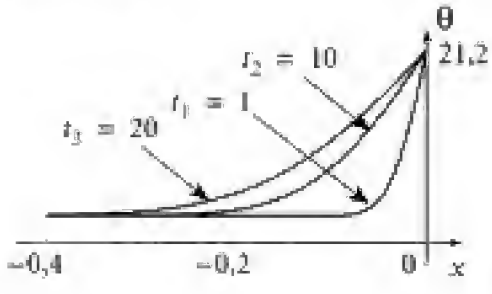
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}[\operatorname{erf}(u)]}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} = g(u)\cdot\frac{1}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\mathrm{D}t}} = \frac{1}{4\mathrm{D}t}\frac{2}{\sqrt{\pi}}(-2u)\exp(-u^2)$

soit $\mathrm{D}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\mathrm{D}}{2\mathrm{D}t}\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}g(u) = -\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}}}\cdot\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}g(u)$ (7)

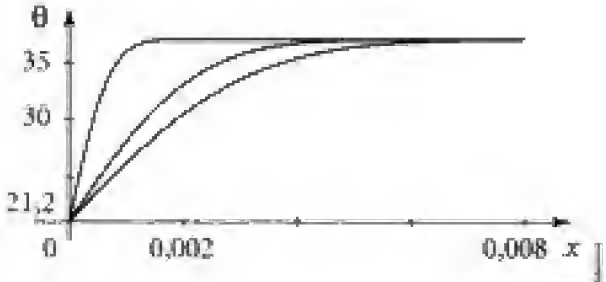
(6) et (7) redonnent bien (5).

• On a tracé ci-dessous les courbes donnant la répartition des températures à des instants différents ($\mathrm{T} = \theta(x, t) + 273{,}15$) :

pour $x < 0$:



pour $x > 0$:



205 Bouffée de chaleur

Un milieu homogène isotrope conducteur de l'énergie thermique possède les caractéristiques suivantes : masse volumique μ ; capacité thermique massique c ; coefficient de conductibilité thermique K.

On notera $\mathrm{D} = \frac{K}{\mu c}$.

On admet que la fonction $\alpha(x, t) = \frac{a}{\sqrt{4\pi\mathrm{D}t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}\right)$ est solution de l'équation de la chaleur. On donne : $\int_0^{\infty}\exp(-y^2)\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le milieu considéré a la forme d'une barre cylindrique, calorifugée, de longueur infinie, et de température initiale uniforme T_0. À l'instant $t = 0$, on apporte une quantité d'énergie thermique Q_0 en $x = 0$.

1. Déterminer la répartition de température $\mathrm{T}(x, t)$ à l'instant t en fonction de x, t, D et de la grandeur $\frac{Q_0}{\mu c S}$ (S = section de la barre).

Copyrighted material

2. Étudier la fonction $T(x, t)$. On tracera les graphes donnant $T(x, t) - T_0 = \theta(x, t)$ à $t = t_0$ fixé, puis $\theta(x, t)$ à $x = x_0$ fixé. Quelles remarques ces résultats vous suggèrent-ils ?

3. Application numérique : $D = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ m$^2 \cdot$ s^{-1} (métal) ; $D = 5 \cdot 10^{-7}$ m$^2 \cdot$ s^{-1} (bois).

Dans les deux cas, donner la date pour laquelle la température passe par un maximum en $x_0 = 10$ cm puis $x_0 = 1$ m.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de la chaleur – phénomène de diffusion thermique.
- Premier principe.

2. Ce qu'il faut comprendre

2. La barre étant calorifugée, son énergie interne se conserve après apport, à $t = 0$, de l'énergie thermique Q_0 en « $x = 0$ ».

On vérifiera que la fonction $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$ étudiée au **1.** satisfait à toutes les conditions caractérisant le problème étudié : ce sera donc la solution physique recherchée.

3. Solution

1. En l'absence de « sources » de chaleur, l'évolution de la température est donnée par l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\mu c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{pour } T = T(x, t).$$

Soit, en posant $T(x, t) = T_0 + \theta(x, t)$, où T_0 peut être associée à une température d'équilibre… :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{K}{\mu c}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \text{où} \quad D = \frac{K}{\mu c} \quad (1)$$

À « l'instant initial », on a fourni un supplément d'énergie interne en « $x = 0$ » sous la forme d'une quantité Q_0 d'énergie thermique. Celle-ci va diffuser dans la barre calorifugée, la température passant localement de T_0 à $T_0 + \theta(x, t)$.

On va écrire que l'énergie interne totale de la barre est invariable pour $t > 0$:

$$U(t > 0) = U_0 + \Delta U \quad \text{où} \quad \Delta U = Q_0 \Rightarrow U(t > 0) - U_0 = \Delta U.$$

Pour une tranche d'épaisseur dx :

$$d[U(t > 0) - U_0] = c(\mu S dx)[T(x, t) - T_0] = c\mu S dx\, \theta(x, t)$$

soit pour toute la barre : $\Delta U = Q_0 = c\mu S \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x, t)dx$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Localement (à x_0 fixé), la température commence par croître, passe par un maximum $T_M = T_0 + \theta_M(x_0)$ à l'instant $t(x_0) = \dfrac{x_0^2}{2D}$, puis décroît continûment pour t supérieur à $t(x_0)$. La relation $t(x_0) = \dfrac{x_0^2}{2D}$ peut s'interpréter de la façon suivante : lors de la diffusion, « l'onde de chaleur » parcourt une distance proportionnelle à la racine carrée du temps écoulé.

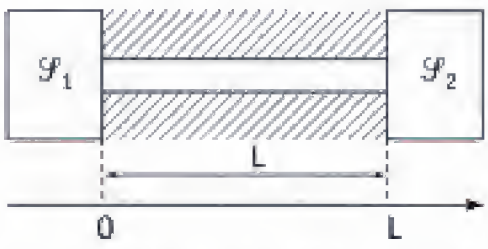
3. • Pour un métal, $D = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot s^{-1}$:

$$t(10\ cm) = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-4}} = 11\ s\ ; \quad t(1\ m) = \frac{1}{2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-4}} = 1{,}1 \cdot 10^3\ s \sim 18{,}5\ min.$$

• Pour le bois, $D = 5 \cdot 10^{-7}\ m^2 \cdot s^{-1}$:

$$t(10\ cm) = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 10^4\ s \sim 2{,}8\ h\ ; \quad t(1\ cm) = 10^6\ s \sim 12\ jours.$$

206 Transfert d'énergie thermique entre deux corps



Deux solides $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, de capacités calorifiques C_1 et C_2 et de conductibilités thermiques « infinies », sont reliés par une tige de section S, de longueur L, de conductivité thermique K et de capacité calorifique négligeable (on la prendra nulle).
Le système est calorifugé et, à $t = 0$, les températures de $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont respectivement $T_1 = T_{1_0}$ et $T_2 = T_{2_0}$ (avec $T_{1_0} < T_{2_0}$).
On supposera qu'il n'y a pas de saut de température aux contacts solides/tige.
Les températures des solides seront prises uniformes à chaque instant ($T_1(t)$ et $T_2(t)$).

1. Évaluer la quantité $R_{th} = \dfrac{T_1(t) - T_2(t)}{\phi}$ où ϕ représente le flux d'énergie thermique traversant la tige. Déterminer les lois $T_1(t)$ et $T_2(t)$ définissant l'évolution des températures des deux solides.

On pourra poser : $T_f = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} T_{1_0} + \dfrac{C_2}{C_1 + C_2} T_{2_0}$ et $\Delta T = T_{1_0} - T_{2_0}$.

Représenter les graphes associés à $T_1(t)$ et $T_2(t)$ pour $T_{1_0} = 283$ K, $T_{2_0} = 373$ K et $C_1 = C_2$.
On fera apparaître un temps caractéristique $\tau = R_{th} \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

2. Comment évolue l'entropie du système ?

3. En fait, la capacité thermique (par unité de masse) c_b de la tige n'est pas nulle. À quelle condition la modélisation adoptée au **1.** reste-t-elle encore valable ? On introduira la masse volumique ρ_b de la tige.

Copyrighted material

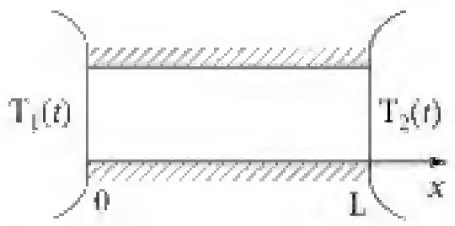
Solution

1. ■ La capacité thermique de la tige étant négligée (idéalement nulle), cela revient à considérer qu'à chaque instant t_0, la barre présente une répartition de température s'identifiant à celle que l'on obtiendrait – en régime permanent – avec des températures aux extrémités invariables $T_1(t_0)$ et $T_2(t_0)$.

Une autre façon de traduire cette hypothèse est d'écrire, qu'à un instant donné t, le flux Φ d'énergie thermique traversant une section d'abscisse x de la tige est indépendant de x. Soit $\vec{j}_q = j_q(x, t)\,\vec{u}_x$ le vecteur densité volumique de courant d'énergie thermique :

$$j_q(x, t) \cdot S = j_q(x + dx, t)S = \Phi(t)$$

(avec $\vec{j}_q = -K\overrightarrow{\text{grad}}T = -K\dfrac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x$: loi de Fourier).



D'où :

$$-K\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\Phi(t)}{S} \quad \text{et} \quad T(x, t) = -\frac{1}{KS}\Phi(t)x + T_1(t).$$

D'autre part : $T(L, t) = T_2(t)$, d'où :

$$T_2(t) = -\frac{1}{KS}\Phi(t)L + T_1(t) \quad \text{soit} \quad \Phi(t) = \frac{KS}{L}(T_1(t) - T_2(t)). \quad (1)$$

Dès lors :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{\Phi(t)} = \frac{1}{K}\frac{L}{S}} \quad \textbf{(résistance thermique)} \quad (2)$$

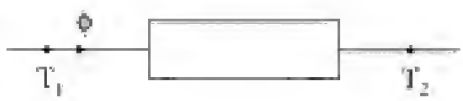
Commentaire

• Notons les analogies avec l'électrocinétique. Considérons, à cet effet, une résistance R parcourue par un courant i.

On a : $V_1 - V_2 = Ri$ avec $R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{L}{S}$ (γ représente le coefficient de conductivité électrique du conducteur).

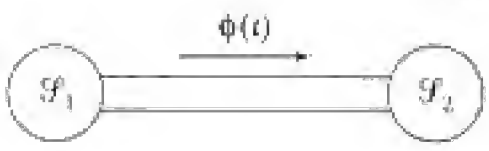
• Pour le système thermique proposé, on a également :

$$T_1 - T_2 = R_{th}\Phi \text{ où } R_{th} = \frac{1}{K}\frac{L}{S}.$$



• On peut également rapprocher la loi de Fourier $\vec{j}_q = -K\overrightarrow{\text{grad}}T$ de la loi d'Ohm de l'électrocinétique $\vec{j} = -\gamma\overrightarrow{\text{grad}}V$ (notion de résistance thermique).

■ Les températures des corps $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont uniformes (conductibilités thermiques infinies) et vont évoluer selon les équations de bilan (1er principe) :



Copyrighted material

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU_1}{dt} &= -\phi(t) \Rightarrow C_1\frac{dT_1}{dt} = -\phi(t)\\ \frac{dU_2}{dt} &= +\phi(t) \Rightarrow C_2\frac{dT_2}{dt} = +\phi(t)\end{aligned}\right\} C_1\frac{dT_1}{dt} + C_2\frac{dT_2}{dt} = 0$$

$$\boxed{C_1T_1 + C_2T_2 = C_1T_{1_0} + C_2T_{2_0}} \quad (3)$$

et d'après (1) :
$$\begin{cases} C_1\dfrac{dT_1}{dt} = -\dfrac{1}{R_{th}}\cdot(T_1 - T_2)\\ C_2\dfrac{dT_2}{dt} = +\dfrac{1}{R_{th}}\cdot(T_1 - T_2). \end{cases}$$

Ces deux dernières équations donnent encore :

$$\frac{d}{dt}(T_1 - T_2) = -\frac{1}{R_{th}}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)(T_1 - T_2)$$

et après intégration : (4) $\boxed{T_1(t) - T_2(t) = (T_{1_0} - T_{2_0})\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$ où $\tau = \dfrac{R_{th}C_1C_2}{C_1 + C_2}$.

Des équations (3) et (4), nous tirons :

$$\begin{cases} T_1 = T_f + \dfrac{C_2}{C_2 + C_1}(T_{1_0} - T_{2_0})\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\\ T_2 = T_f - \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}(T_{1_0} - T_{2_0})\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right). \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= T_f + \frac{C_2}{C_2 + C_1}\Delta T\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\\ T_2 &= T_f - \frac{C_1}{C_2 + C_1}\Delta T\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\end{aligned}} \quad (5)$$

L'état final correspond bien évidemment à une température uniforme égale à :

$$(C_1 + C_2)T_f = C_1T_{1_0} + C_2T_{2_0}$$

c'est-à-dire
$$T_f = \frac{C_1}{C_1 + C_2}T_{1_0} + \frac{C_2}{C_1 + C_2}T_{2_0}.$$

Commentaire

Ce résultat peut être déduit de l'application du 1er principe à l'ensemble du système. $\Delta U = 0$ (le système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \text{tige}\}$ est isolé thermiquement de l'extérieur et ne reçoit aucun travail). Or $U = U(\mathcal{S}_1) + U(\mathcal{S}_2) + U(\text{tige})$; $\Delta U(\text{tige}) = 0$ (capacité calorifique nulle).
D'où : $\Delta U = \Delta U(\mathcal{S}_1) + \Delta U(\mathcal{S}_2) = C_1(T_{1_f} - T_{1_0}) + C_2(T_{2_f} - T_{2_0}) = 0$.

Copyrighted material

Hidden page

Commentaires

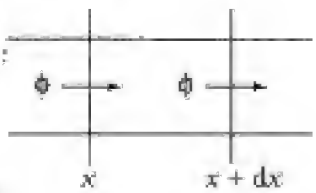
• On peut aussi écrire : $\dfrac{dS_T}{dt} = \dfrac{dS_1}{dt} + \dfrac{dS_2}{dt} + 0 = C_1\dfrac{1}{T_1}\dfrac{dT_1}{dt} + C_2\dfrac{1}{T_2}\dfrac{dT_2}{dt}$.

D'où $\Delta S_T = C_1 \ln\left(\dfrac{T_{1_f}}{T_{1_0}}\right) + C_2 \ln\left(\dfrac{T_{2_f}}{T_{2_0}}\right)$. Or $T_{1_f} = T_{2_f} = T_f$, d'où :

$$\Delta S_T = C_1 \ln\left(\frac{T_f}{T_{1_0}}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_{2_0}}\right) = \ln\left[\frac{T_f^{C_1+C_2}}{T_{1_0}^{C_1} T_{2_0}^{C_2}}\right].$$

On a donc : $T_f \approx T_{1_0}^{\frac{C_1}{C_1+C_2}} \cdot T_{2_0}^{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$. (Pour $C_1 = C_2$, on aurait $T_f \approx \sqrt{T_{1_0} T_{2_0}}$.)

• Déterminons la création d'entropie par unité de volume de la tige.



D'après la formule (6), on peut écrire pour la tranche d'épaisseur dx :

$$\frac{\delta^2\sigma_b}{dt} = \phi \cdot \left(\frac{1}{T(x+dx)} - \frac{1}{T(x)}\right) = \phi \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right) \cdot dx$$

d'où $\dfrac{\delta^2\sigma_b}{dt\,S\,dx} = \dfrac{\phi}{S} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{T}\right)$ or $j_q = \dfrac{\phi}{S} \Rightarrow \dfrac{\delta^2\sigma_b}{dt\,\delta v} = j_q \cdot \dfrac{1}{dx}\left(\dfrac{1}{T}\right)$

($v \equiv$ volume)

soit en revenant à l'écriture vectorielle : $\boxed{\dfrac{\delta^2\sigma_b}{dt\,\delta v} = \vec{j}_q \cdot \vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{T}\right)}$ (7)

On peut démontrer que ce résultat reste valable en régime instationnaire ($\vec{j}_q(x, t)\ldots$).

De plus, on a bien : $\vec{j}_q \cdot \vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{T}\right) = (-K\vec{\nabla}T) \cdot \left(-\dfrac{\vec{\nabla}T}{T^2}\right) = \dfrac{K}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2$ grandeur définie positive.

3. • D'après (4), la différence des températures des deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est divisée par deux au bout d'un temps Δt tel que :

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \rightarrow \Delta t = \tau \cdot \ln 2.$$

τ apparait bien, dans le cadre de notre modélisation, comme un **temps caractéristique** associé à l'évolution des températures.

• Or en toute rigueur, la température $T(x, t)$ au sein de la tige doit vérifier « l'équation de la chaleur » :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (8) \text{ avec } D = \frac{K}{\rho_b c_b}$$

($c_b \equiv$ capacité thermique par unité de masse de la tige).

On peut faire apparaître une durée caractéristique τ_D de diffusion pour la barre de longueur L. Soit, en remplaçant l'équation (4) par des ordres de grandeur :

$$\frac{D}{L^2} \approx \frac{1}{\tau_D} \rightarrow \tau_D \approx \frac{L^2}{D} \quad \text{et} \quad \tau_D \approx \frac{L^2 c_b \rho_b}{K}.$$

• L'approximation faite dans l'exercice est cohérente tant que le temps caractéristique τ (régissant les variations de $T_1(t)$ et $T_2(t)$) reste grand devant τ_D : cela revient à dire,

Copyrighted material

qu'à « chaque instant », la température $T(x, t)$ au sein de la barre est celle que l'on obtiendrait à « l'équilibre » avec des températures des corps $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ « gelées » aux valeurs $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

Nous avons obtenu : $\tau_D = \dfrac{L^2 c_b \rho_b}{K}$ et $\tau = \dfrac{C_2 C_1}{C_2 + C_1} \dfrac{L}{KS}$.

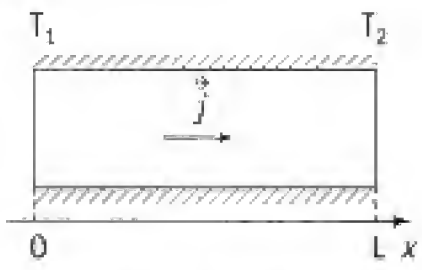
Il faut donc que $\tau_D \ll \tau$, ce qui s'écrit :

$$\frac{L^2 c_b \rho_b}{K} \ll \frac{C_2 C_1}{C_2 + C_1} \frac{L}{KS} \quad \text{soit} \quad L c_b \rho_b S \ll \frac{C_2 C_1}{C_2 + C_1}.$$

La quantité $c_b \rho_b L S$ représente la capacité thermique totale de la tige. L'inégalité est bien réalisée lorsque les capacités thermiques des deux corps $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont très grandes devant celle de la barre. La conductivité thermique K intervient à deux niveaux : elle assure les transports d'énergie thermique au sein de la tige et elle « contrôle » les échanges d'énergie thermique entre les corps $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ et la barre. Ceci explique que les constantes de temps τ_D et τ dépendent de la même façon de K (τ_D et τ proportionnels à $\dfrac{1}{K}$) et que la conductivité thermique ne joue aucun rôle, dans l'approximation envisagée…

207 Barre parcourue par un courant

Une barre métallique de section S et de conductivité électrique σ est parcourue par un courant électrique i de densité volumique uniforme ($\vec{j} = j_0 \vec{u}_x$ avec $i = j_0 S$).



Les extrémités de cette barre sont maintenues à des températures T_1 et T_2. On suppose nulles les pertes thermiques par la surface latérale (barre calorifugée) et on note K le coefficient de conductivité thermique.

On suppose que la température est uniforme dans toute section, et on se place en régime stationnaire, soit $T = T(x)$.

On rappelle de plus qu'un élément de barre de longueur l et de section S possède une résistance électrique :

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}.$$

1. Déterminer la loi de distribution de la température $T(x)$ dans la barre. Commenter.

2. À quelle condition, portant sur T_1 et T_2, la répartition de température $T(x)$ présente-t-elle un maximum supérieur à $\max\{T_1, T_2\}$?

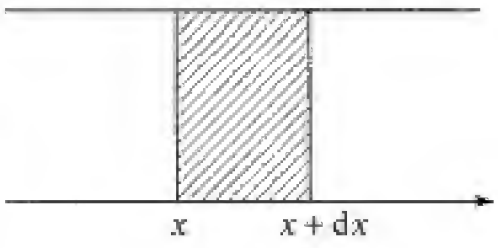
Copyrighted material

Solution

1. Considérons une tranche de matériau d'épaisseur dx.

Appliquons-lui le premier principe sous la forme (taux de variation dans le temps) :

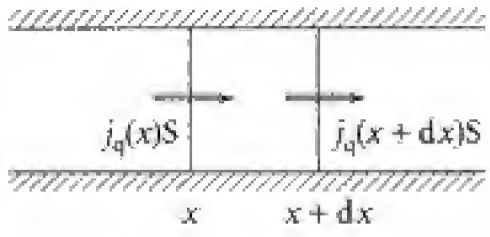
$$\frac{\mathrm{d}[\delta U]}{\mathrm{d}t} = \delta P_{el} + \delta P_{th}$$



δU désigne l'énergie interne élémentaire du système, δP_{el} et δP_{th} représentent les puissances électrique et thermique reçues. Le matériau est supposé indéformable.

■ La puissance thermique δP_{th} résulte du flux thermique à travers les sections d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Nous avons en effet :

$$\delta P_{th} = j_q(x)S - j_q(x + \mathrm{d}x)S.$$

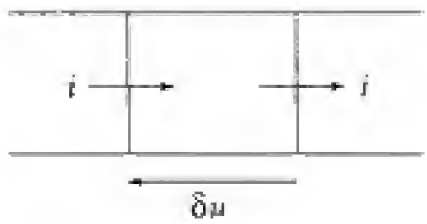


Soit, avec la **loi de Fourier**, ici en régime stationnaire : $j_q(x) = -K\dfrac{\partial T}{\partial x} = -K\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$

$$\delta P_{th} = -KS\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x) - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x + \mathrm{d}x)\right] = KS\,\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\right).$$

■ Quant à la puissance électrique, elle s'exprime par la relation : $\delta P_{el} = i\delta u$

(i est le courant total traversant la barre et δu la différence de potentiel entre les sections x et $x + \mathrm{d}x$).



Or $\delta u = i\delta R$ où δR est la résistance électrique du tronçon considéré, soit :

$$\delta R = \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}x}{S} \quad \text{et} \quad \delta P_{el} = \frac{1}{\sigma S} i^2\,\mathrm{d}x \quad (\text{avec } i = j_0 S).$$

■ L'équation du bilan énergétique s'écrit donc : $\dfrac{\mathrm{d}[\delta U]}{\mathrm{d}t} = K\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}S\,\mathrm{d}x + \dfrac{i^2}{\sigma S}\mathrm{d}x.$

Or $\dfrac{\mathrm{d}[\delta U]}{\mathrm{d}t} = 0$ (régime stationnaire ; la température est localement fixée en régime permanent, et le volume est supposé invariable).

D'où l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}KS + \dfrac{j_0^2 S}{\sigma} = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{j_0^2}{K\sigma} = 0}$

Intégrons cette équation, nous obtenons :

$$T(x) = -\frac{j_0^2}{2K\sigma}x^2 + \alpha x + \beta.$$

Avec les conditions aux limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$, d'où :

$$\beta = T_1 \quad \text{et} \quad -\frac{j_0^2}{2K\sigma}L^2 + \alpha L + T_1 = T_2.$$

Copyrighted material

Hidden page

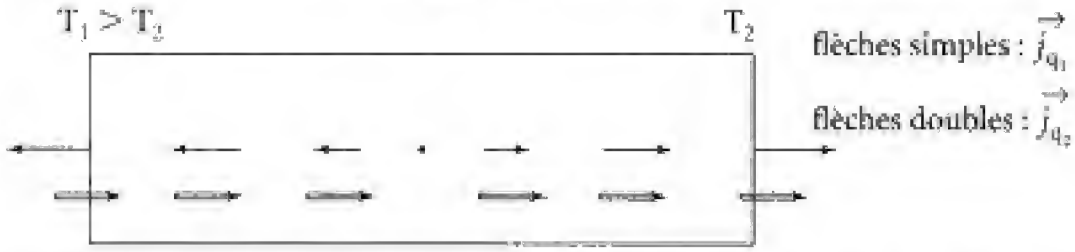
Le vecteur $\vec{j}_q$ vaut ici :

$$(\vec{j}_q)_2 = -K\frac{dT}{dx}\vec{u}_x = -K\frac{(T_2 - T_1)}{L}\vec{u}_x$$

et $(\Phi_{th})_2 = -KS\dfrac{(T_2 - T_1)}{L}$.

• **Au total**, on a bien : $\begin{cases} T - T_1 = \dfrac{j_0^2}{2K\sigma}x(L-x) + (T_2 - T_1)\dfrac{x}{L} \\ \vec{j}_q = \vec{j}_{q_1} + \vec{j}_{q_2} \end{cases}$

2. Supposons $T_1 > T_2$. On cherche à discuter l'existence d'un extremum de température pour $0 \leqslant x < L$, défini par $\dfrac{dT}{dx} = 0$, soit encore par $\vec{j}_q = \vec{0}$.



Le schéma ci-dessus représente les vecteurs flux d'énergie thermique dus d'une part au courant i circulant dans la barre et d'autre part à la différence des températures imposées aux extrémités de la barre. On constate alors, dans le cas de figure où $T_1 > T_2$, qu'un tel extremum ne peut avoir lieu que pour $0 < x < \dfrac{L}{2}$ et à condition qu'il existe une valeur x_m de x pour laquelle $(j_{q_2}) = (-j_{q_1})$. Ce qui s'écrit ici :

$$\frac{K}{L}(T_1 - T_2) = \frac{j_0^2}{\sigma}\left(\frac{L}{2} - x_m\right) \text{ soit encore : } x_m = \frac{L}{2} - \frac{\sigma K}{j_0^2 L}(T_1 - T_2) \quad (2)$$

L'existence de x_m implique $T_1 - T_2 < \dfrac{L^2 j_0^2}{2\sigma K}$ (pour $T_1 > T_2$).

On peut reproduire le même raisonnement pour $T_2 > T_1$ (il suffit de prendre l'origine à l'autre extrémité de la barre et de changer le sens de l'axe des x). Il faut donc :

$$\boxed{|T_1 - T_2| < \frac{L^2 j_0^2}{2\sigma K}}$$

Remarquons qu'il s'agit bien d'un maximum. Reprenant le schéma précédent, on a dans ce cas $(T_1 > T_2)$:

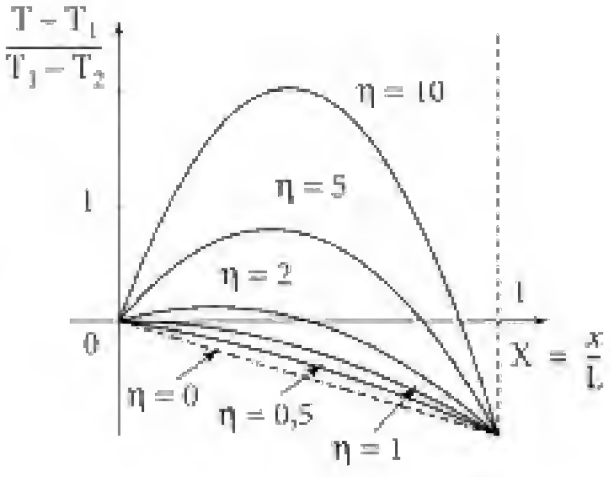
$$\begin{cases} j_q(x) = -K\dfrac{dT}{dx} = j_{q_1} + j_{q_2} > 0 \text{ pour } x > x_m \text{ et } \dfrac{dT}{dx} < 0 \\ j_q(x) = -K\dfrac{dT}{dx} = j_{q_1} + j_{q_2} < 0 \text{ pour } x < x_m \text{ et } \dfrac{dT}{dx} > 0. \end{cases}$$

Copyrighted material

On a tracé ci-contre les courbes donnant $\frac{T - T_1}{T_1 - T_2} = f(X, \eta)$ où $X = \frac{x}{L}$ et $\eta = \frac{\int_0^z L^2}{2K\sigma(T_1 - T_2)}$, pour $T_1 > T_2$, $0 \leqslant X \leqslant 1$ et η prenant successivement les valeurs :

0 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10.

Avec $\frac{T - T_1}{T_1 - T_2} = -X + \eta X(1 - X)$.

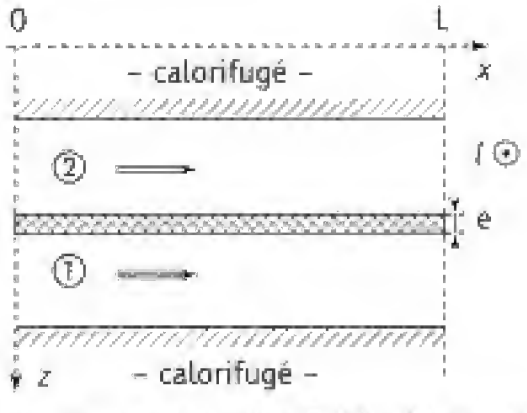


Commentaire

On observe bien l'existence d'un maximum de température pour $\eta > 1$ dont la position tend vers $x = \frac{L}{2}$ pour $\eta \gg 1$ et $T_1 > T_2$ (on a en effet d'après (2) : $x_m = \frac{L}{2} \cdot \left\{1 - \frac{1}{\eta}\right\}$).

208 Échangeur d'énergie thermique

Un échangeur de chaleur est modélisé par deux conduites parallélépipédiques de longueur L et de largeur l.



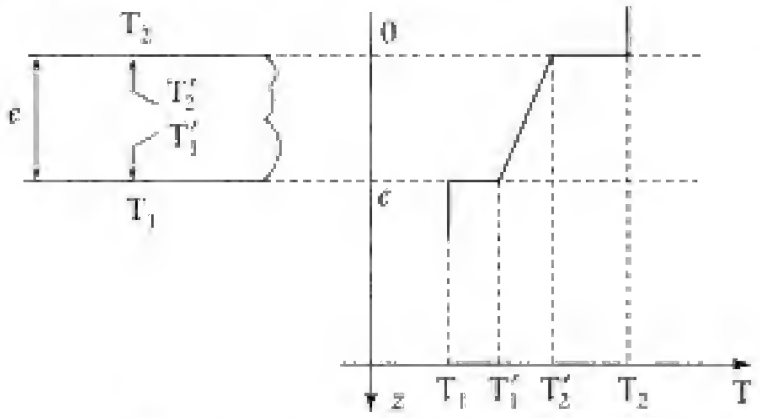
La conduite supérieure est parcourue par un « fluide chaud » dont la température $T_2(x)$ est supposée ne dépendre que de l'abscisse x le long de la conduite. On note D_{m_2} et c_{p_2} les débit et capacité thermique (à pression constante) massiques de ce fluide : ces grandeurs sont des constantes du problème.

De même, circule dans la conduite inférieure, et dans le même sens, un « fluide froid » dont les caractéristiques sont données par $T_1(x)$, D_{m_1} et c_{p_1}.

Copyrighted material

Hidden page

De plus, les échanges thermiques en surface impliquent des sauts de température, ce que l'on peut représenter sur le schéma ci-dessous :



Dans la plaque circule donc, selon z, un flux thermique (associé à la tranche de longueur dx) : $\delta\phi = -K\delta\Sigma\dfrac{\partial T}{\partial z}$ où $\delta\Sigma = l\,dx$.

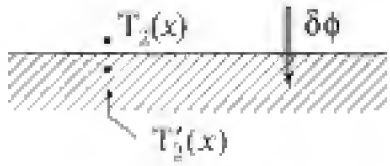
Or $\dfrac{\partial T}{\partial z} = \dfrac{T(x, e) - T(x, 0)}{e} = \dfrac{T_1'(x) - T_2'(x)}{e}$

$T_1'(x)$ et $T_2'(x)$ désignent les températures régnant sur les faces de la plaque, respectivement en contact avec le fluide froid et le fluide chaud.

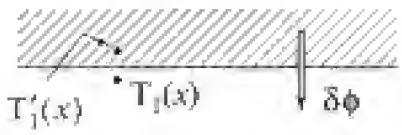
D'où $\delta\phi = +\dfrac{Kl}{e}dx[T_2'(x) - T_1'(x)]$.

D'autre part, on doit écrire la continuité du flux thermique aux interfaces fluide chaud-plaque et plaque-fluide froid, soit :

$\delta\phi = h_2 l\,dx(T_2(x) - T_2'(x))$



et $\delta\phi = h_1 l\,dx(T_1'(x) - T_1(x))$



On a donc :

$$\left.\begin{aligned} T_2'(x) - T_1'(x) &= \frac{e}{Kl\,dx}\delta\phi \\ T_2(x) - T_2'(x) &= \frac{1}{h_2 l\,dx}\delta\phi \\ T_1'(x) - T_1(x) &= \frac{1}{h_1 l\,dx}\delta\phi \end{aligned}\right\} T_2(x) - T_1(x) = \left(\frac{e}{K} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1}\right)\frac{\delta\phi}{l\,dx}.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\delta\phi = \frac{l\,dx}{\dfrac{e}{K} + \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2}}[T_2(x) - T_1(x)]} \quad (1)$$

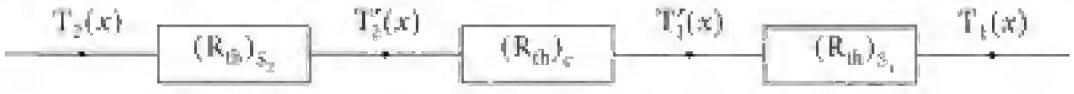
Copyrighted material

et avec la définition de $h_{éq}$ donnée dans l'énoncé, (1) devient :

$$\delta\phi = h_{éq} l\,dx \cdot [T_2(x) - T_1(x)] \quad (2)$$

Commentaire

Comme il a déjà été mentionné dans les exercices précédents, on peut interpréter ce résultat en terme d'association en série, pour l'élément dx, de résistances thermiques :



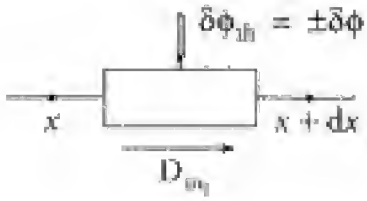
avec $(R_{th})_{S_2} = \dfrac{1}{h_2 l\,dx}$; $(R_{th})_{S_1} = \dfrac{1}{h_1 l\,dx}$; $(R_{th})_c = \dfrac{1}{K}\dfrac{e}{l\,dx}$.

2. a. Appliquons le premier principe au **système fermé** constitué, à l'instant t, par la tranche de fluide chaud (respectivement de fluide froid) située entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Il n'y a pas de variations d'énergie cinétique à prendre en compte et le système considéré reçoit la puissance thermique $-\delta\phi$ (respectivement $+\delta\phi$ pour le fluide froid). Aucun travail n'est échangé autre qu'un éventuel travail des forces de pression comptabilisé dans l'enthalpie.

Nous obtenons dans le cadre de la stationnarité :

$$D_{m_2} \cdot (h_2(x + dx) - h_2(x)) = -\delta\phi$$

et $$D_{m_1} \cdot (h_1(x + dx) - h_1(x)) = +\delta\phi$$



D_{m_2} ≡ débit massique de fluide chaud,

D_{m_1} ≡ débit massique de fluide froid.

Or $dh = c_p\,dT$ (*cf.* énoncé), d'où :

$h_2(x + dx) - h_2(x) = c_{p_2}\dfrac{dT_2}{dx}dx$ et $h_1(x + dx) - h_1(x) = c_{p_1}\dfrac{dT_1}{dx}dx$. Soit :

$$\left\| \begin{array}{l} D_{m_2} c_{p_2} \dfrac{dT_2}{dx} = -h_{éq} l\,[T_2(x) - T_1(x)] \\ D_1 c_{p_1} \dfrac{dT_1}{dx} = +h_{éq} l\,[T_2(x) - T_1(x)] \end{array} \right\| \quad (3)$$

■ Pour résoudre ce système, faisons apparaître la quantité $\dfrac{d}{dx}(T_2 - T_1)$:

$$\frac{d}{dx}(T_2 - T_1) = -h_{éq} l\left[\frac{1}{D_{m_2} c_{p_2}} + \frac{1}{D_{m_1} c_{p_1}}\right](T_2 - T_1) = -\frac{1}{\lambda}(T_2 - T_1).$$

On a posé $\dfrac{1}{\lambda} = h_{éq} l\left[\dfrac{1}{D_{m_2} c_{p_2}} + \dfrac{1}{D_{m_1} c_{p_1}}\right]$. Une simple intégration fournit, avec les conditions imposées en $x = 0$ ($T_1(0) = T_{1_0}$ et $T_2(0) = T_{2_0}$) :

$$\boxed{T_2(x) - T_1(x) = (T_{2_0} - T_{1_0}) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

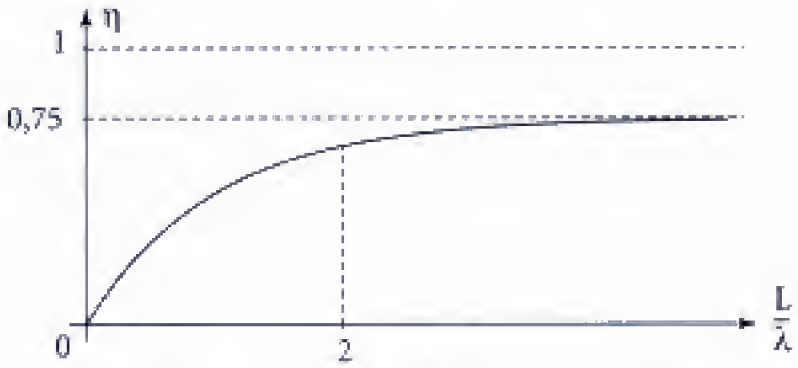
■ On peut comparer ce flux au flux théorique maximal qui correspond, pour $D_{m_1}c_{P_1} < D_{m_2}c_{P_2}$, à $(T_1)_f = T_{2_0}$:

$$\phi_{max} = D_{m_1}c_{P_1}(T_{2_0} - T_{1_0}).$$

On définit alors un coefficient d'efficacité par :

$$\eta = \frac{\phi_{th}}{\phi_{max}} = \frac{D_{m_2}c_{P_2}}{D_{m_1}c_{P_1} + D_{m_2}c_{P_2}}\left(1 - \exp\left(-\frac{L}{\lambda}\right)\right).$$

Nous donnons ci-dessous la courbe $\frac{L}{\lambda} \mapsto \eta\left(\frac{L}{\lambda}\right)$ pour $\frac{D_{m_2}c_{P_2}}{D_{m_1}c_{P_1}} = 3$.



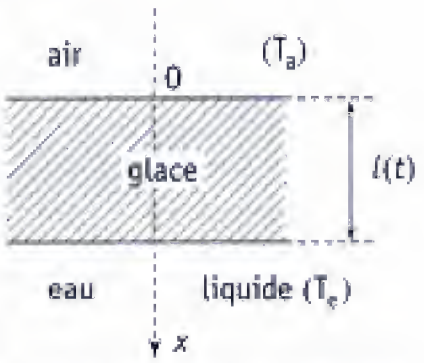
Remarquons que l'efficacité est d'autant meilleure que L est grande ce qui n'est guère surprenant.

209 Formation d'une couche de glace

L'eau liquide d'un lac est à la température de congélation $T_e = 273$ K.

L'air au-dessus du lac est à la température constante $T_a = 263$ K.

Libre de glace à l'instant initial $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t est notée $l(t)$.

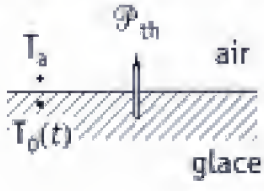


La glace possède une masse volumique μ, une conductibilité thermique K, une chaleur latente de fusion L (rapportée à l'unité de masse), et une capacité calorifique que l'on négligera.

D'autre part, la puissance thermique échangée à l'interface glace-air est donnée – pour une surface S de glace – par :

$$\mathcal{P}_{th} = \alpha(T_0(t) - T_a)S$$

où $T_0(t)$ représente la température de la glace en $x = 0$.



Copyrighted material

1. Déterminer l'épaisseur de glace $l(t)$ formée à l'instant t, ainsi que la température $T_0(t)$.

On notera : $l_0 = \dfrac{K}{\alpha}$ et $\tau = \dfrac{KL\mu}{2\alpha^2(T_e - T_a)}$.

2. Tracer les graphes donnant $l(t)$ et $T_0(t)$ en fonction de t. On exprimera l en cm, et t en heures.

On donnera également le taux d'accroissement $\dfrac{dl}{dt}$ de l'épaisseur $l(t)$ de la couche de glace. Que vaut ce taux à $t = 0^+$?

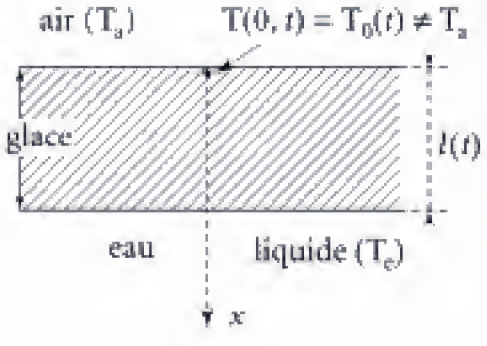
On prendra :

$\mu = 9 \cdot 10^2$ kg · m^{-3} ; $K = 5 \cdot 10^{-4}$ kcal · m^{-1} · s^{-1} · K^{-1} ;

$L = 80$ kcal · kg^{-1} ; $\alpha = 10^{-2}$ kcal · m^{-2} · s^{-1} · K^{-1}.

Solution

1. La capacité calorifique de la glace étant négligée, on peut considérer qu'à chaque instant, la distribution de température y est une fonction affine de x.



$$\left(K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c\mu\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right). \text{ Soit :}$$

$$T(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0, t) = T_0(t) \\ T(l(t), t) = T_e. \end{cases}$$

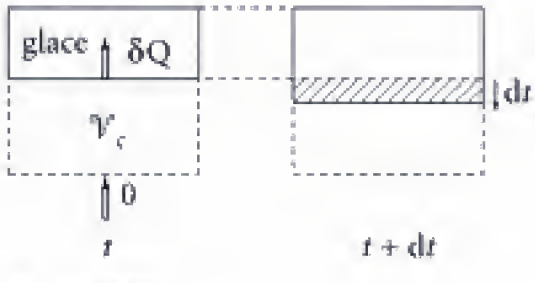
D'où :

$$\boxed{T(x, t) = T_0(t) + (T_e - T_0(t))\frac{x}{l(t)}} \quad (1)$$

L'accroissement, pendant dt, de l'épaisseur de la glace d'une quantité $dl(t)$ correspond à une masse de glace formée – **par unité de surface** – égale à :

$$\delta m = \mu\, dl \cdot 1.$$

Considérons alors le système fermé associé au volume de contrôle $\mathcal{V}_c$ (on considérera que $v_{gl} \approx v_{liq}$: volumes massiques). Appliquons-lui le premier principe :



$$dU - dH = -\delta Q$$

or $\delta H = \delta m \cdot (h_{gl} - h_{liq}) = -\delta m L$

(L : chaleur latente de fusion rapportée à l'unité de masse).

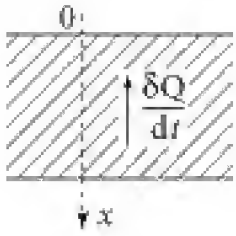
D'où : $\dfrac{\delta Q}{dt} = L\dfrac{\delta m}{dt} = L\mu\dfrac{dl}{dt}$ (2)

Copyrighted material

Ce « dégagement » d'énergie thermique est évacué à travers la glace vers l'interface glace/air (où elle se « dissipe » dans l'atmosphère).

À l'intérieur de la glace, le flux d'énergie thermique (par unité de surface traversée) s'identifie à j_q, d'où :

$$-\frac{\delta Q}{dt} = j_q = -K\frac{\partial T}{\partial x} = K\frac{T_0(t) - T_e}{l(t)} \quad (3) \text{ d'après } (1)$$



d'où avec (2) :

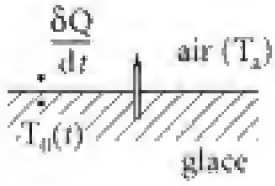
$$L\mu\frac{dl}{dt} = -\frac{K}{l(t)} \cdot (T_0(t) - T_e)$$

soit encore :

$$\boxed{l(t) \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{K}{L\mu} \cdot (T_e - T_0(t))} \quad (4)$$

Enfin la continuité du flux thermique à travers l'interface glace-air se traduit par la relation (pour l'unité de surface) :

$$\frac{\delta Q}{dt} = \alpha(T_0(t) - T_a)$$



et avec (3) :

$$\alpha(T_0(t) - T_a) = \frac{K}{l(t)} \cdot [T_e - T_0(t)].$$

Cette expression nous donne la température à la surface de la glace en fonction de l'épaisseur de la couche de glace $l(t)$:

$$T_0(t)\left[1 + \frac{\alpha l(t)}{K}\right] = T_e + \frac{\alpha l(t)}{K}T_a$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{T_0(t) = \frac{T_e + \dfrac{\alpha l(t)}{K}T_a}{1 + \dfrac{\alpha l(t)}{K}}} \quad (5)$$

Éliminons $T_0(t)$.

Or d'après (5) : $$T_e - T_0(t) = \frac{\dfrac{\alpha l(t)}{K}}{1 + \dfrac{\alpha l(t)}{K}}(T_e - T_a)$$

et avec (4) : $$\left(1 + \frac{\alpha l}{K}\right) \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{K}{L\mu} \cdot \frac{\alpha}{K}(T_e - T_a).$$

Intégrons cette dernière relation avec la condition initiale $l(0) = 0$. Il vient :

$$l + \frac{1}{2}\frac{\alpha l^2}{K} = \frac{\alpha}{L\mu}(T_e - T_a)t.$$

soit encore : $$l^2 + \frac{2K}{\alpha}l = \frac{2K}{L\mu}(T_e - T_a)t$$

Copyrighted material

et $$\left(l + \frac{K}{\alpha}\right)^2 = \frac{K^2}{\alpha^2} + \frac{2K}{L\mu}(T_e - T_a)t.$$

L'épaisseur de glace formée à l'instant t est donnée par :

$$\boxed{l(t) = \frac{K}{\alpha}\left\{\sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{KL\mu}(T_e - T_a)t} - 1\right\}}$$

Avec les notations de l'énoncé, nous obtenons : $l(t) = l_0\left\{\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}$

et avec (5) : $T_0(t) = T_a + \dfrac{T_e - T_a}{1 - \dfrac{l(t)}{l_0}} \Rightarrow \boxed{T_0(t) = T_a + \dfrac{T_e - T_a}{1 - \dfrac{l(t)}{l_0}}}$

2. L'application numérique donne :

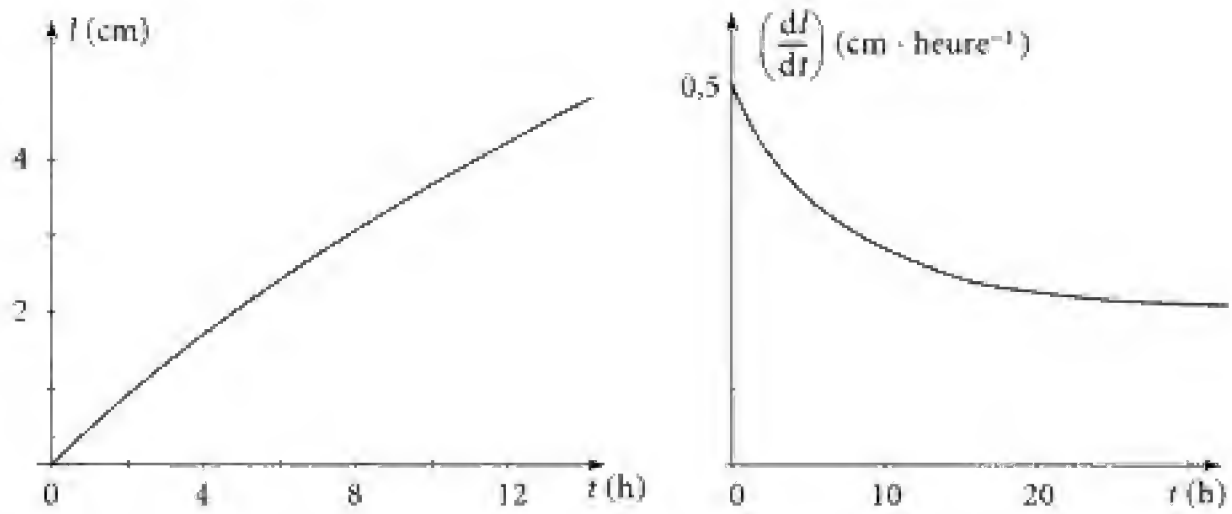
$$l_0 = \frac{K}{\alpha} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}} = 5 \cdot 10^{-2} = 5 \text{ cm.}$$

$$\tau = \frac{KL\mu}{2\alpha^2(T_e - T_a)} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 9 \cdot 10^{+2}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10} = 1{,}8 \cdot 10^{+4} \text{ s (5 heures).}$$

Soit :

$$\left.\begin{aligned} l(t)_{cm} &= 5\left\{\left(1 + \frac{t}{5}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right\} \\ T_0(K) &= 263 + \frac{10}{\sqrt{1 + \frac{t}{5}}} \end{aligned}\right\} \; t \text{ en heures.}$$

D'où les courbes :



Copyrighted material

Le taux d'accroissement de l'épaisseur de la glace par unité de temps est donné par :

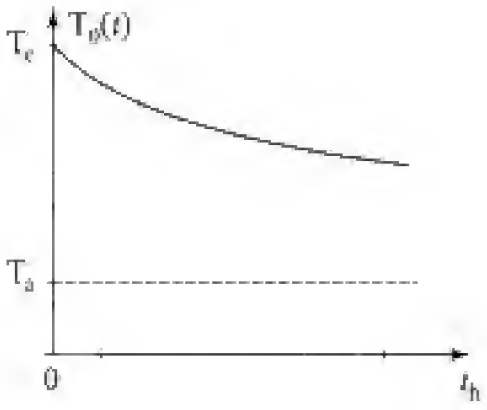
$$\frac{dl}{dt} = \frac{\frac{i_0}{\tau}}{2\sqrt{1 + \frac{t}{\tau}}}, \text{ soit } 0{,}5 \text{ cm/heure à } t = 0$$

et pour la température de la glace $T_0(t)$ à l'interface glace-air :

Nous avons :

$T_0(t = 0) = T_e$ et $T_0(t \to +\infty) = T_a$.

T_0 est une fonction monotone décroissante de T_i à T_a, pour t variant de zéro à « l'infini ».



Copyright matériel

Copyrighted material

Hidden page

301 Bilan de particules

Dans un milieu théoriquement infini diffusent des particules (par exemple des neutrons) : le coefficient de diffusion est noté D. Ces particules sont créées dans une boule de centre O et de rayon R_0 à raison de q_0 particules par unité de temps et de volume.

On suppose, dans tout l'exercice, que le système conserve la symétrie sphérique, et on note $n(r, t)$ le nombre de particules par unité de volume au point M distant de r du point O. Le vecteur densité de courant de particules est donné par la loi de Fick $\vec{j} = -D\overrightarrow{\text{gradient}}\, n$.

Le régime est stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps.

1. Déterminer $\vec{j}$ pour $r > R_0$ puis pour $r < R_0$ $(r = OM)$.

2. En déduire l'expression de $n(r)$ pour tout r.

On considèrera que $\lim\limits_{r \to \infty} n(r) = 0$.

3. Établir l'équation vérifiée par $n(r, t)$ en notant $q(r, t)$ le nombre de particules produites par unité de temps et de volume. Utiliser cette équation – dans le cadre proposé dans cet exercice – pour retrouver les résultats du **2)**.

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de Fick.
- Savoir établir une équation de bilan.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On cherchera à exploiter l'hypothèse de stationnarité et la symétrie sphérique. À l'extérieur de la boule il n'y a pas de production de particules et le flux de particules à travers une sphère de rayon r ne doit pas dépendre de r. D'autre part ce flux doit s'identifier à ce qui est produit par unité de temps dans toute la boule. Ce même raisonnement peut être repris pour $r < R_0$ en associant le flux à travers la sphère de rayon r et la production dans la boule de même rayon.

2. On exploitera la relation de Fick qui s'écrit ici $\vec{j} = -D\dfrac{dn}{dr}\vec{u}$.

3. Faire un bilan des particules contenues dans le volume limité par les sphères de centre O et de rayons r et $r + dr$.

3. Solution

1. Considérons tout d'abord l'espace $r > R_0$. Nous avons (symétrie sphérique) :

$$n = n(r) \quad \text{et} \quad \vec{j} = j(r)\vec{u}.$$

Copyrighted material

Il ne doit pas y avoir accumulation ou perdition de particules entre deux sphères de rayons r_1 et r_2 ($r_2 > r_1 > R_0$), puisque le régime étudié est indépendant du temps. Ceci se traduit en écrivant que le flux de particules traversant les deux sphères doit être le même, à savoir :

$$j(r > R_0) \cdot \Sigma(r) = \text{constante} \quad \text{donc} \quad j(r > R_0) 4\pi r^2 = \text{constante}.$$

Pour calculer la constante écrivons que ce flux correspond au nombre de particules créées dans la boule de rayon R_0 pendant l'unité de temps (là encore le régime stationnaire doit résulter de l'évacuation – par diffusion – des particules produites).
D'où :

$$j(r > R_0) 4\pi r^2 = q_0 \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad \text{et} \quad \boxed{j(r > R_0) = \frac{q_0 R_0^3}{3r^2}} \quad (1)$$

• De la même façon pour $r < R_0$ on écrira que le flux de particules à travers la sphère de rayon r est égal à ce qui est produit, en une seconde, dans la boule de même rayon. Soit :

$$j(r < R_0) 4\pi r^2 = q_0 \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{et} \quad \boxed{j(r < R_0) = \frac{1}{3} q_0 r} \quad (2)$$

2. Nous pouvons maintenant remonter à la densité particulaire $n(r)$ par application de la loi de Fick (en symétrie sphérique nous avons $\vec{j} = -D \frac{\partial n}{\partial r} \vec{u}$).

D'où, pour $r < R_0$: $-D \frac{dn}{dr} = \frac{1}{3} q_0 r$ (n ne dépend que r).

Soit en intégrant : $n(r) = -\frac{1}{6} \frac{q_0 r^2}{D} + \text{constante} = -\frac{q_0}{6D} r^2 + a$.

Et pour $r > R_0$: $-D \frac{dn}{dr} = \frac{q_0 R_0^3}{3r^2}$.

De même :

$$n(r) = \frac{q_0 R_0^3}{3Dr} + \text{constante} = \frac{q_0 R_0^3}{3Dr} + b.$$

Les constantes a et b se déterminent par la relation aux limites $\lim_{r \to +\infty} n(r) = 0$, et la relation de continuité en $r = R_0$: $n_0(R_0^-) = n_0(R_0^+)$ (puisque $j(r)$ reste borné en $r = R_0$).
Nous obtenons :

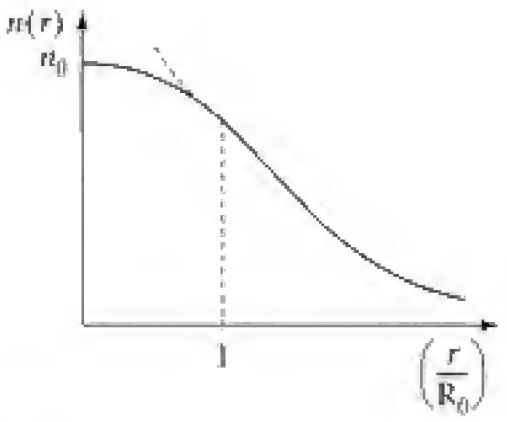
$$\begin{cases} b = 0 \\ a - \frac{q_0 R_0^2}{6D} = \frac{q_0 R_0^2}{3D} \quad \text{donc} \quad a = \frac{q_0 R_0^2}{2D}. \end{cases}$$

D'où : $\boxed{n(r < R_0) = \frac{q_0 R_0^2}{2D} \left(1 - \frac{r^2}{3R_0^2}\right)}$ et $\boxed{n(r > R_0) = \frac{q_0 R_0^3}{3Dr}}$ (3)

Copyrighted material

Traçons le graphe donnant $r \to n(r)$,

avec : $n_0 = \dfrac{q_0 R_0^2}{2D}$ (la dérivée à la courbe $r \to n(r)$ est continue en $r = R$).



3. Dans le cadre de la symétrie sphérique nous avons :

$$n(M, t) = n(r, t) \quad \text{et} \quad \vec{j}(M, t) = j(r, t)\vec{u}, \quad \text{avec} \quad j(r, t) = -D\frac{\partial n}{\partial r} \quad \text{(loi de Fick)}.$$

Considérons le volume $\mathcal{V}$ compris entre les sphères de rayons $r_1 = r$ et $r_2 > r_1$; désignons par $N(t)$ le nombre de particules contenues dans $\mathcal{V}$ à l'instant t, et par $P(t)$ le nombre de particules produites dans $\mathcal{V}$ par unité de temps, il vient :

$$N(t) = \int_{r_1}^{r_2} n(r, t) 4\pi r^2 \, dr \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial n}{\partial t} 4\pi r^2 \, dr$$

$$P(t) = \int_{r_1}^{r_2} q(r, t) 4\pi r^2 \, dr \text{ par définition de } q(r, t).$$

D'autre part il rentre à travers la sphère de rayon r_1 un flux de particules : $\phi_1 = j(r_1, t)4\pi r_1^2$.

De même il sort à travers la sphère de rayon r_2 le flux de particules : $\phi_2 = j(r_2, t)4\pi r_2^2$.

Le bilan de particules relatif au volume $\mathcal{V}$ s'écrit alors :

$$\frac{dN}{dt} = P(t) + \phi_1 - \phi_2$$

soit : $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial n(r, t)}{\partial t} 4\pi r^2 dr = \int_{r_1}^{r_2} q(r, t) 4\pi r^2 dr + 4\pi D\left\{ r_2^2 \frac{\partial n}{\partial t}(r_2, t) - r_1^2 \frac{\partial n}{\partial t}(r_1, t) \right\}$.

Divisons cette équation par $r_2 - r_1$ et passons à la limite où $r_2 \to r_1 = r$. Nous obtenons :

$$r^2 \frac{\partial n}{\partial t} = qr^2 + D\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial n}{\partial r}\right)$$

d'où finalement :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = q + D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial n}{\partial n}\right)} \quad (4)$$

Dans le cadre de l'exercice proposé nous avons :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0 \text{ (régime stationnaire) et } \begin{cases} q = 0 \text{ pour } r > R_0 \\ q = q_0 \text{ pour } r < R_0. \end{cases}$$

Copyrighted material

soit $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial n}{\partial r}\right) = 0$ (5) pour $r > R_0$, et $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial n}{\partial r}\right) = -\frac{q_0}{D} r^2$ (6) pour $r < R_0$.

(5) donne avec $\lim_{r \to +\infty} n(r) = 0$: $n(r) = \frac{a'}{r}$.

(6) s'écrit par intégration : $r^2 \frac{dn}{dr} = -\frac{q_0 r^3}{3D} + b'$, soit $n(r) = -\frac{q_0 r^2}{6D} - \frac{b'}{r} + c'$.

Or la densité de particules doit rester finie en $r = 0 \Rightarrow b' = 0$.

De plus on doit avoir en $r = R_0$:

• $n(R_0^-) = n(R_0^+)$, soit : $\frac{a'}{R_0} = -\frac{q_0 R_0^2}{6D} + c'$

• $j(R_0^-) = j(R_0^+)$, soit : $\left.\frac{\partial n}{\partial r}\right|_{R_0^-} = \left.\frac{\partial n}{\partial r}\right|_{R_0^+} \Rightarrow -\frac{q_0 R_0}{3D} = -\frac{a'}{R_0^2}$

d'où : $a' = \frac{q_0 R_0^3}{3D}$ et $n(r > R_0) = \frac{q_0 R_0^3}{3D} \cdot \frac{1}{r}$ (7)

$c' = \frac{q_0 R_0^2}{3D} + \frac{q_0 R_0^2}{6D} = \frac{q_0 R_0^2}{2D}$ et $n(r > R_0) = +\frac{q_0}{2D} R_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{3R_0^2}\right)$ (8)

Les relations (7) et (8) sont bien identiques à (3).

Commentaires

• En conclusion, et en régime stationnaire, la relation entre le vecteur courant volumique $\vec{j}$ et la densité volumique de production de particules q est du même type que celle existant entre le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ et la densité volumique de charges (*cf.* théorème de Gauss, et faire $\varepsilon_0 = 1$!). La boule de notre exercice est l'analogue d'une boule uniformément chargée placée dans le vide.

$$\vec{j} \leftrightarrow \vec{E} \; ; \quad q \leftrightarrow \rho \; ; \quad \text{« } 1 \leftrightarrow \varepsilon_0 \text{ » ;} \quad \phi(\vec{j}) = P_{int} \leftrightarrow \phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On pourrait pousser l'analogie un peu plus loin en remarquant que pour la diffusion $\vec{j} = -D\overrightarrow{\text{gradient}}\, n$ et pour l'électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{gradient}}\, V$…

Cette analogie faisant correspondre ε_0 à 1 n'est directement utilisable que dans un sens (électrostatique vers diffusion). Une autre formulation permettrait de lever cette difficulté.

Copyrighted material

Hidden page

On cherche une solution $c(x, t)$ à l'équation différentielle de diffusion (en présence d'absorption et de création de neutrons) de la forme $c(x, t) = f(t)\,g(x)$. Cette solution doit toujours s'annuler en $x = \pm\frac{L}{2}$.

Déterminer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ et exprimer la densité volumique de neutrons $c(x, t)$ en fonction de $c(0, 0)$, des variables t, x et des paramètres p, p_c, ℓ_0, L et D.

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de Fick.
- Établissement d'une équation de bilan.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. L'équation proposée est une équation locale associée à une équation de bilan. On considérera donc un volume élémentaire $\delta\tau$ pour lequel on établira un bilan de particules en tenant compte du flux « sortant » (lié à la diffusion) et de la « production » interne (réactions d'absorption et de fission).

1. b. L'application envisagée consiste en une étude en régime indépendant du temps, dans un milieu absorbant, avec des conditions aux limites imposées à l'infini (c doit tendre vers zéro) et en $x = 0$ (la source y impose le flux de particules).

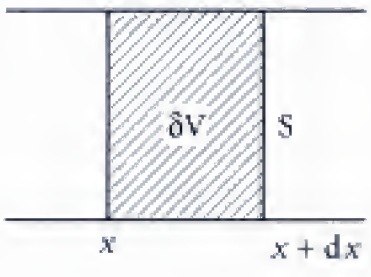
2. a. Cette application décrit un modèle très simplifié d'un réacteur nucléaire de « longueur » L. Dans un milieu il y a en moyenne plus de création (par fission) que d'absorption : $p > 1$. Le régime stable, s'il existe, correspondra à une solution $c(x)$ indépendante du temps. Cette solution doit être définie positive ($c > 0$) et compatible avec les conditions aux limites $c\left(\pm\frac{L}{2}\right) = 0$. Ce qui imposera une valeur particulière p_c du paramètre p à ℓ_0 et L fixés.

2. b. p étant différente de p_c la densité volumique est maintenant fonction du temps. L'équation différentielle comportant une dérivée première par rapport au temps on doit s'attendre à une variation de la concentration avec le temps du type exponentiel ($\exp(-\eta t)$). Pour $p > p_c$ on a certainement $\eta < 0$ et la réaction « s'emballe » (divergence). Pour $p < p_c$ le réacteur s'éteint ($\eta > 0$).

3. Solution

1. a. Considérons une tranche de matériau de section S et de largeur dx infiniment petite. Le taux de variation dans le temps du nombre de neutrons contenu dans δV est donné par :

$$\frac{d\delta N}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t}\,\delta V.$$



Copyrighted material

Il rentre dans δV, par la section située en x et pendant une seconde, un flux de neutrons $\phi(x, t)$ tel que :

$$\phi(x, t) = j(x, t)S = -DS\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_x.$$

De même il en ressort, par la section située en $x + dx$ et pour une seconde, un flux $\phi(x + dx, t)$ tel que :

$$\phi(x + dx, t) = j(x + dx, t)S = -DS\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x+dx}.$$

D'autre part, pendant une seconde, le milieu associé à δV va absorber une quantité de neutrons qui est déterminée par : $\dfrac{d\delta N_a}{dt} = \dfrac{c\,v}{\lambda_a}\delta V$.

Enfin ayant supposé qu'en moyenne un neutron absorbé donnait naissance à p neutrons secondaires (réactions nucléaires) il y aura donc, dans δV et par unité de temps, production d'un nombre de neutrons :

$$\frac{d\delta N_p}{dt} = p\frac{\delta N_a}{dt} = p\frac{c\,v}{\lambda_a}\delta V.$$

L'équation de bilan s'écrit alors :

$$\frac{\partial c}{\partial t}\delta V = \left[\begin{array}{l}\text{terme d'échange}\\ \text{avec l'extérieur}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{terme de « production »}\\ \text{au sens large dans } \delta V\end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$|\phi(x, t) - \phi(x + dx, t)| \qquad \left[\frac{d\delta N_p}{dt} - \frac{d\delta N_a}{dt}\right]$$

D'où : $\dfrac{\partial c}{\partial t}\delta V = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}dx + \dfrac{c\,v}{\lambda_a}\delta V(p - 1)$

or $\phi = Sj = -SD\dfrac{\partial c}{\partial x}$ (loi de Fick $\vec{j} = -D\,\overrightarrow{\text{gradient}\,c}$).

Finalement après simplification par $\delta V = S\,dx$: $\boxed{\dfrac{\partial c}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \dfrac{c\,v}{\lambda_a}(p - 1)}$ (1)

1. b. On prend ici $p = 0$ et on se place en régime stationnaire (soit $\dfrac{\partial c}{\partial t} = 0$). L'équation (2) devient :

$$\frac{d^2c}{dx^2} - c\frac{v}{\lambda_a D} = 0$$

et avec $D = \dfrac{1}{3}\lambda' v$: $\dfrac{d^2c}{dx^2} - c\dfrac{3}{\lambda_a \lambda'} = 0$.

La solution à cette équation est :

$$c(x) = a\exp\left(-\frac{x}{\ell_0}\right) + b\exp\left(\frac{x}{\ell_0}\right), \text{ où } \boxed{\ell_0 = \sqrt{\frac{\lambda_a \lambda'}{3}}}$$

Copyrighted material

Le milieu est infini, et on a disposé en $x = 0$ une source de neutrons émettant un nombre ϕ_0 de neutrons par m^2 et par seconde, soit $\frac{\phi_0}{2}$ dans chaque direction. Les conditions aux limites sont donc les suivantes ($x > 0$) :

- $b = 0$ (sinon $c(x)$ divergerait à l'infini),
- $j(0^+) \cdot 1 = \frac{\phi_0}{2}$ avec $j(0^+) = -D\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{0^+}$.

D'où : $\frac{\phi_0}{2} = -D \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{\ell_0}\right)$ et $a = \frac{\phi_0 \ell_0}{2D}$.

Soit : $$\boxed{c(x) = \frac{\phi_0 \ell_0}{2D} \exp\left(-\frac{x}{\ell_0}\right)}$$

ℓ_0 : « longueur de diffusion en présence d'absorption ».

$A.N$: $\ell_0 = \sqrt{\frac{1}{3} 46 \times 0{,}4} \Rightarrow \ell_0 = 2{,}5$ cm.

2. a. Dans ce modèle à une dimension d'un réacteur nucléaire, la densité volumique de neutrons doit obéir à l'équation (1) :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\nu(p-1)}{\lambda_a} c, \text{ avec ici } p - 1 > 0.$$

En régime stationnaire (c'est-à-dire indépendant du temps) il vient :

$$\frac{d^2 c}{dx^2} + \frac{\nu(p-1)}{\lambda_a D} c = 0.$$

Et en notant $\ell_0^2 = \frac{\lambda_a D}{\nu}$ (homogène au carré d'une longueur) :

$$\boxed{\frac{d^2 c}{dx^2} + \frac{(p-1)}{\ell_0^2} c = 0}$$

La solution mathématique à cette équation est de la forme :

$$c(x) = a\cos\left(\sqrt{p-1}\frac{x}{\ell_0}\right) + b\sin\left(\sqrt{p-1}\frac{x}{\ell_0}\right).$$

Elle doit satisfaire aux conditions, aux limites $c\left(\pm\frac{L}{2}\right) = 0$:

$$a\cos\left(\sqrt{p-1}\frac{L}{2\ell_0}\right) \pm b\sin\left(\sqrt{p-1}\frac{L}{2\ell_0}\right) = 0.$$

Ce qui conduit à :

$$\left| \begin{array}{l} a = 0 \text{ et } \sin\left(\sqrt{p-1}\frac{L}{2\ell_0}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ b = 0 \text{ et } \cos\left(\sqrt{p-1}\frac{L}{2\ell_0}\right) = 0 \end{array} \right.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

$$\left.\frac{\partial c'}{\partial t}\right|_{x'} = \frac{\partial}{\partial t} c\big|\underbrace{x' - V_s t}_{x}, t\big| = \frac{\partial c}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x'} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

d'où : $$\left.\frac{\partial c'}{\partial t}\right|_{x'} = \frac{\partial c}{\partial t} - V_s\frac{\partial c}{\partial x} \quad (5)$$

et d'après (3), (4) et (5) : $\frac{\partial c}{\partial t} - V_s\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = V_s\frac{\partial c}{\partial x} + D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}}$ (6)

Commentaires

En fait on peut donner une signification physique à la dérivée $\frac{\partial c'}{\partial t}$. Il s'agit du taux de variation dans le temps de la concentration en un point M' que l'on suit et qui est ici immobile par rapport au solvant (x' fixé).

On alors : $\left(\frac{dc}{dt}\right)_{M'} = \frac{\partial c'}{\partial t}(x', t) = \frac{\partial c}{\partial t} + v(M'/\mathcal{R}_E)\frac{\partial c}{\partial x}$.

1. c. Notons $\vec{j}(x, t) = j(x, t)\vec{u}_x$ le vecteur densité de courant de soluté dans $\mathcal{R}_E$. Le bilan de soluté pour le volume élémentaire $\delta V = S\,dx$ conduit à (*cf.* **1.a**) :

$$\frac{\partial c}{\partial t} S\,dx = \Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx.$$

Or $\Phi = jS$, soit : $\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$ (7)

Il reste à exprimer le vecteur $\vec{j}$. Il suffit alors de remarquer que si le soluté était fixe dans $\mathcal{R}'$ on aurait, $\vec{v}_s$ désignant alors la vitesse de déplacement de ce soluté :

$$\vec{j}_e = c(x, t)\vec{v}_s,$$

Le soluté diffusant dans $\mathcal{R}'$ le courant total de soluté dans $\mathcal{R}_E$ est donné par :

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}'$$

soit en tenant comte de (1) : $\vec{j} = c(x, t)\vec{v}_s - D\frac{\partial c}{\partial x}\vec{u}$ (8)

Reportant (8) dans (7), avec $\vec{v}_s = -V_s\vec{u}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = V_s\frac{\partial c}{\partial x} + D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$ (relation identique à (6)).

2. • En régime stationnaire la concentration devient indépendante du temps de sorte que $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{dc}{dx}$:

$$V_s\frac{dc}{dx} + D\frac{d^2c}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2c}{dx^2} = -\frac{V_s}{D}\frac{dc}{dx}.$$

Posons $\frac{dc}{dx} = f(x)$, l'équation précédente se réécrit selon :

$$\frac{df}{dx} = -\frac{V_s}{D}f \Leftrightarrow \frac{df}{f} = -\frac{V_s}{D}dx.$$

Copyrighted material

Une simple intégration donne : $f(x) = A\exp\left(-\frac{V_s}{D}x\right)$.

Intégrons une seconde fois :

$$c(x) = \left(-\frac{AD}{V_s}\right)\exp\left(-\frac{V_s}{D}x\right) + B.$$

La concentration $c(x)$ doit s'annuler à l'infini du côté des x positifs, ce qui impose $B = 0$. D'autre part on maintient une concentration constante c_0 en $x = 0$, soit : $c_0 = -\frac{AD}{V_S}$.

Finalement :

$$\boxed{c(x) = c_0\exp\left(-\frac{V_s}{D}x\right)} \quad (9)$$

Commentaires

Calculons la densité volumique de courant de soluté :

$J(x, t) = -V_s c(x) - D\frac{dc}{dx}$, (puisqu'ici $c = c(x)$).

La solution (9) entraîne $J(x) = 0$, et dans l'état considéré le courant d'entraînement compense exactement le courant de diffusion.

304 Réalisation d'une jonction par diffusion

On désire étudier la diffusion de particules (atomes de Bore) dans un matériau (silicium dopé négativement) : le coefficient de diffusion est D et la diffusion se réduit ici à un problème à une dimension selon l'axe $x'x$. On impose la densité volumique c en $x = 0$, à partir de l'instant $t = 0$, que l'on maintient à la valeur $c(0, t) = c_0$. Le matériau s'étend théoriquement de $x = 0$ à l'infini, et $c(t \leqslant 0, x > 0) = 0$.

1. Étude préliminaire :

a. Donner l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de particules $c(x, t)$.

b. On considère la fonction $(x, t) \mapsto f(x, t)$ définie, pour x et t positifs, par l'intégrale :

$$f(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-u^2}\,du.$$

Montrer (ou admettre) qu'elle est solution de l'équation différentielle de la diffusion établie au **1.a**. En étudier les limites lorsque x tend vers zéro puis vers l'infini.

On donne $\int_0^\infty \exp(-u^2)\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Copyrighted material

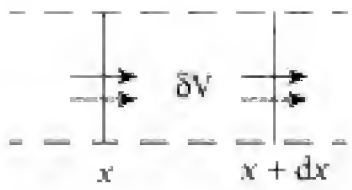
2. À partir de l'étude précédente, et des conditions imposées, déterminer la densité volumique $c(x, t)$ des particules diffusées en x à l'instant t.

Application numérique : On donne $c_0 = 5 \cdot 10^{24}$ atomes $\cdot$ m^{-3}.

Calculer le temps t_1 pour lequel $c(x, t_1) = 10^{22}$ atomes $\cdot$ m^{-3} pour $x = X = 3\,\mu$m. On prendra $D = 5 \cdot 10^{-17}$ m^2 $\cdot$ s^{-1}.

Solution

1. a. Il s'agit ici d'établir l'équation différentielle de la diffusion en l'absence de « production » (pas d'absorption ni de création de particules).

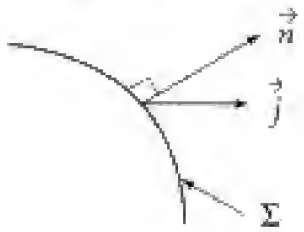


Le bilan de particules traduit alors que la variation, dans le temps, du nombre des particules contenues dans le volume δV est égale à la différence des flux de particules traversant les sections situées en x et $x + dx$:

$$\frac{d\delta N}{dt} = \phi(x, t) - \phi(x + dx, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} dx \quad (1)$$

Or le flux est lié au vecteur de courant de particules par la relation intégrale

$\phi = \iint \vec{j} \cdot \vec{n}\, \delta\Sigma$, soit ici plus simplement :



$\phi(x, t) = Sj(x, t)$ (On a $\vec{j} = j(x, t)\vec{u}_x$ avec, d'après la loi de Fick, $j(x, t) = -D\frac{\partial c}{\partial x}$).

Dès lors : $\phi(x, t) = -SD\frac{\partial c}{\partial x}$.

L'équation de bilan (1) devient :

$$\frac{d\delta N}{dt} = S\,dx D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\delta V.$$

Or $\delta N = c(x, t)\delta V$ (δV infiniment petit), d'où :

$$\frac{d[\delta N]}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t}\delta V, \text{ et : } \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}} \quad (2)$$

1. b. ■ Notons tout d'abord que la fonction $(x, t) \mapsto f(x, t)$ peut encore s'écrire :

$$f(x, t) = F\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right), \text{ avec } \frac{dF}{dW}(W) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-W^2) \text{ et } W = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}.$$

Vérifions que f est bien solution de l'équation (2).

Copyrighted material

Hidden page

Au bout d'un temps infiniment long $c(x, t)$ deviendrait uniforme et égal à c_0 valeur imposée en $x = 0$.

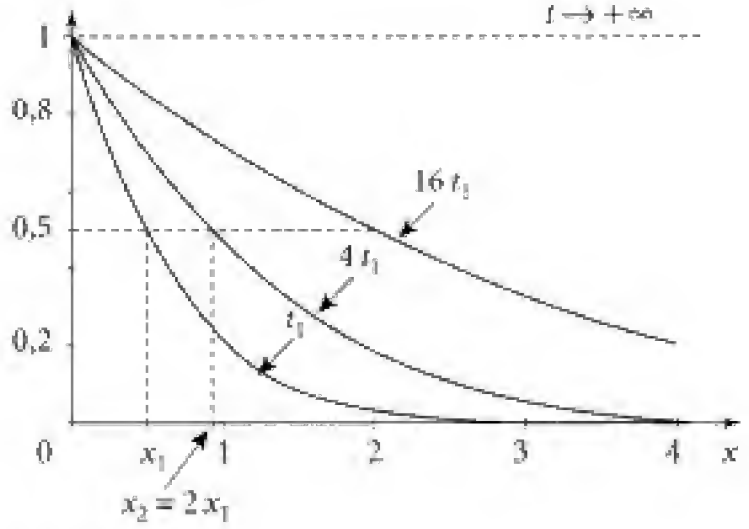
On peut d'autre part remarquer que $c(x, t)$ prend la même valeur en des points et des instants caractérisés par :

$$\frac{x}{\sqrt{Dt}} = \text{constante, ou encore } t = \text{constante} \cdot x^2.$$

Ce qui signifie que les durées de diffusion sont proportionnelles au carré des distances à atteindre (le seul phénomène pris en compte étant la diffusion : absence de convection…) Ceci permet également d'évaluer les temps de diffusion τ sur une longueur L.

On écrira $\tau \sim \frac{L^2}{D}$…

On a représenté ci-dessous les courbes donnant la densité volumique de particules $c(x, t)$ à des dates $t_1 < t_2 < t_3$…



■ *Application numérique :*

On veut $c(X, t_1) = 10^{22}$ avec $c_0 = 5 \cdot 10^{24}$, d'où :

$$10^{22} = 5 \cdot 10^{24}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{u_1} e^{-u^2}\,du\right] \quad \text{avec} \quad u_1 = \frac{X}{2\sqrt{Dt_1}}.$$

Soit : $$\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{u_1} e^{-u^2}\,du}_{F(u_1)} = \left(1 - \frac{10^{22}}{5 \cdot 10^{24}}\right) = 0{,}998.$$

Le calcul de l'intégrale, à l'aide de la machine à calculer, donne :

$$F(2{,}1851) = 0{,}9979995 \neq 0{,}998 ; \quad F(2{,}1852) = 0{,}9980006.$$

On prendra donc $u_1 = 2{,}185(1)$, ce qui détermine t_1 selon :

$$t_1 = \frac{X^2}{4Du_1^2} = \frac{(3 \cdot 10^{-6})^2}{4{,}5 \cdot 10^{-17} \cdot (2{,}185)^2} \Rightarrow t_1 = 9{,}42 \cdot 10^3 \text{ s},$$

Soit $t_1 = 2{,}62$ h. (Le phénomène de diffusion est très lent)

Copyrighted material

Commentaires

On peut imaginer que le problème considéré décrit la diffusion du Bore (corps trivalent) dans du silicium dopé négativement (avec des atomes pentavalents de concentration uniforme $c_1 = 10^{22}$ atomes · m^{-3}).

Si l'on arrête la diffusion à l'instant t_1 la concentration en atome trivalent devient égale à c_1 en $x = X$. Elle est inférieure à c_1 pour $x > X$ et supérieure pour $x < X$. On a ainsi réalisé en $x = X$ une jonction $p - n$ (dans la réalité la jonction n'est bien évidemment pas infinie…).

Copyrighted material

Partie

6

Conversion de puissance

Copyrighted material

Chapitre

1

Conversion électromagnétique statique

101 Transformateur pour alimenter une ampoule basse tension

La plaque signalétique d'un transformateur indique ses caractéristiques nominales 220 V/12 V/40 VA : valeurs efficaces nominales de la tension d'entrée, de la tension de sortie et produit des valeurs efficaces nominales de la tension et de l'intensité.

Ce transformateur est alimenté côté primaire par la tension délivrée par E.D.F. $e(t) = E\sqrt{2}\cos(2\pi ft)$ avec E = 220 V et f = 50 Hz. Côté secondaire, on branche une ampoule (12 V, 40 W) que l'on assimilera à un résistor de résistance R.

Le montage peut donc être schématisé de la façon suivante, en faisant apparaître les bornes homologues du transformateur :

1. Déterminer le rapport de transformation m du transformateur (supposé parfait) et la résistance R du résistor équivalent à l'ampoule.

2. Le transformateur est considéré comme parfait. Déterminer les expressions $i_1(t)$ et $i_2(t)$ des intensités des courants dans le primaire et le secondaire. Peut-on dire que le transformateur choisi est bien adapté au montage dans lequel il est inséré ?

3. En réalité, l'enroulement primaire possède une résistance $R_1 = 5\ \Omega$ et l'enroulement secondaire une résistance $R_2 = 0{,}5\ \Omega$.

a. Déterminer la valeur efficace de la tension $u_2(t)$ aux bornes de l'ampoule.

b. Déterminer la valeur numérique des « pertes cuivre » dans le transformateur, c'est-à-dire la puissance moyenne perdue par effet Joule dans les enroulements.

c. Déterminer le rapport entre ces pertes cuivre et la puissance moyenne « utile », c'est-à-dire la puissance moyenne fournie à l'ampoule.

1. Ce qu'il faut savoir

- Propriétés du transformateur parfait.
- Puissance moyenne en régime sinusoïdal.

2. Ce qu'il faut comprendre

- La notion de bornes homologues permet de déterminer la relation algébrique entre le flux à travers une spire du primaire et le flux à travers une spire du secondaire.
- Pour éviter toute erreur de signe, il est conseillé d'utiliser les schémas équivalents des deux circuits, primaire et secondaire, en faisant intervenir les f.é.m. d'induction.

Copyrighted material

3. Solution

1. Dans un transformateur parfait, il n'y a ni fuites de flux ni résistance des bobinages. Le rapport des valeurs efficaces des tensions au secondaire et au primaire donne le rapport de transformation du transformateur :

$$\boxed{m = \frac{12}{220} = 0{,}055}$$

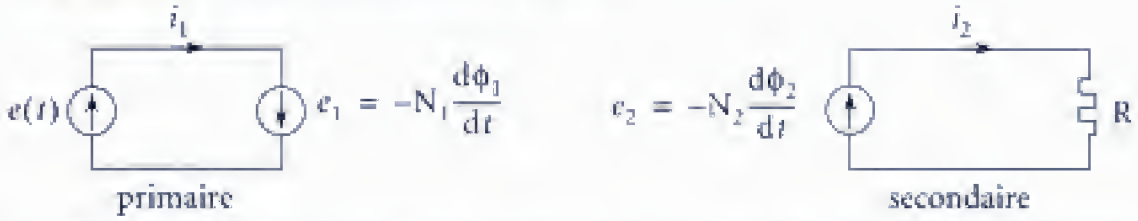
La résistance R du résistor équivalent à l'ampoule peut être déterminée avec la puissance moyenne consommée. En effet, cette puissance moyenne consommée P_{moyen} a pour expression $RI_{2_{eff}}^2 = \dfrac{U_{2_{eff}}^2}{R}$. On obtient donc : $\boxed{R = \dfrac{U_{2_{eff}}^2}{P_{moyen}} = 3{,}6\ \Omega}$

2. Pour étudier de façon précise les circuits primaire et secondaire, il est conseillé d'utiliser les schémas équivalents de ces deux circuits.

POINT MÉTHODE

Pour étudier un circuit qui est le siège du phénomène d'induction, on utilise le schéma équivalent faisant apparaître la f.é.m. d'induction $-\dfrac{d\phi}{dt}$. Il ne faut surtout pas oublier de mettre cette f.é.m. *dans le sens positif du circuit.*

Les schémas équivalents sont alors les suivants :



dans lesquels ϕ_1 représente le flux à travers une spire du primaire et ϕ_2 le flux à travers une spire du secondaire.

La loi des mailles s'écrit alors $e(t) = N_1\dfrac{d\phi_1}{dt}$ dans le circuit primaire et $Ri_2 = -N_2\dfrac{d\phi_2}{dt}$ dans le secondaire. La considération des bornes homologues et des sens positifs des deux circuits permet de trouver que $\phi_2 = -\phi_1$ (car le sens positif est entrant par la borne homologue au primaire et sortant au secondaire). On en déduit :

$$Ri_2 = me(t) \quad \text{et} \quad \boxed{i_2(t) = \frac{mE}{R}\sqrt{2}\cos(2\pi ft)}$$

Pour déterminer l'intensité du courant dans le primaire, on peut utiliser la transformation des intensités qui vient de la transformation des puissances : la puissance $e(t)i_1$ fournie par la source est intégralement transmise à l'ampoule, car il n'y a pas de pertes d'énergie dans un transformateur parfait. Comme la puissance reçue par l'ampoule est Ri_2^2, on obtient donc $e(t)i_1 = Ri_2^2$, d'où $i_1 = mi_2$ (car $Ri_2 = me(t)$).

Copyrighted material

D'où :

$$i_1(t) = \frac{m^2 E}{R}\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$$

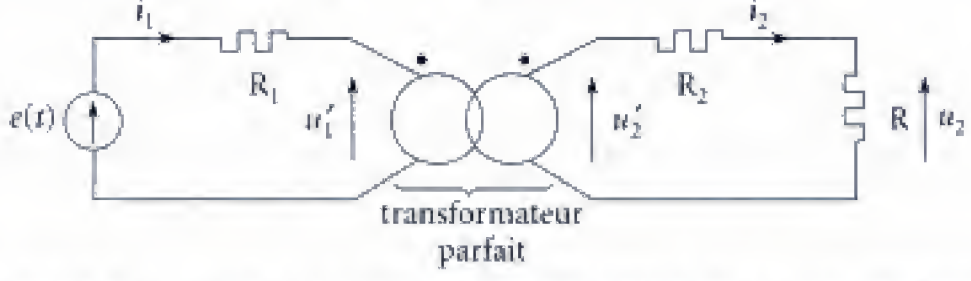
Commentaire

Pour trouver la relation entre les deux intensités, on pourrait aussi appliquer le théorème d'Ampère à un contour fermé situé à l'intérieur du noyau ferromagnétique mais il faudrait connaître le schéma des enroulements (voir plus loin l'exercice sur le transformateur réel).

Si on calcule alors le produit des valeurs efficaces de la tension et de l'intensité, on obtient, par exemple au primaire, le produit de E par $\frac{m^2 E}{R}$, soit : $\frac{(mE)^2}{R} = P_{moyen} = 40$ VA.

Le calcul de ce produit au secondaire conduit au même résultat. Il apparaît donc que le transformateur fonctionne dans les conditions nominales : il est bien adapté au montage étudié.

3. Pour réaliser cette seconde étude, on peut utiliser un schéma équivalent faisant apparaître un transformateur parfait de rapport m :

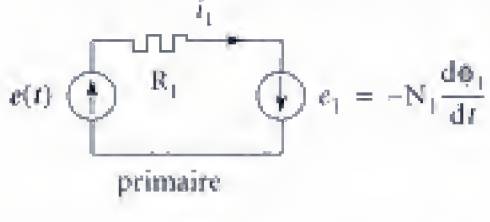


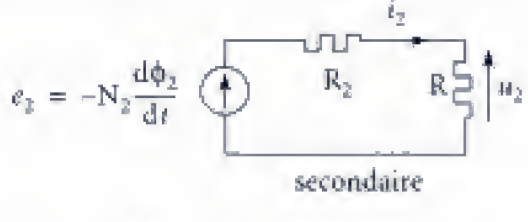
3. a. On peut alors utiliser les propriétés du transformateur parfait vues dans la question précédente. La transformation des courants conduit, comme on l'a vu précédemment, à : $i_1 = m i_2$ et la transformation des tensions conduit à :

$$u_2' = m u_1' \quad \text{et donc à} \quad u_2 + R_2 i_2 = m(e - R_1 i_1).$$

Commentaire

Il est bien entendu également possible de revenir aux schémas équivalents des deux mailles :





La loi des mailles au primaire donne alors $e = R_1 i_1 + N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$ et la loi des mailles au secondaire conduit à $R_2 i_2 + u_2 = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$. Comme les deux flux sont opposés, on obtient ainsi la relation $u_2 + R_2 i_2 = m(e - R_1 i_1)$ vue précédemment.

Copyrighted material

Pour avoir la relation de transformation des intensités, on utilise la transformation des puissances : ici, la puissance ei_1 fournie par la source se retrouve partiellement fournie à l'ampoule $(u_2 i_2)$ et partiellement dissipée par effet Joule $(R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2)$. On a donc :

$$ei_1 = u_2 i_2 + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2, \text{ soit } (e - R_1 i_1) i_1 = (u_2 + R_2 i_2) i_2.$$

Comme $u_2 + R_2 i_2 = m(e - R_1 i_1)$, il vient $i_1 = m i_2$.

L'égalité de transformation des tensions peut alors s'écrire, en utilisant la transformation des intensités : $Ri_2 + R_2 i_2 = m(e - mR_1 i_2)$ et donc $i_2 = \dfrac{me}{R + R_2 + m^2 R_1}$.

On en déduit : $u_2 = Ri_2 = me\dfrac{R}{R + R_2 + m^2 R_1}$.

La nouvelle valeur efficace de $u_2(t)$ apparaît alors comme égale à :

$$\boxed{U'_{2_{eff}} = mE\frac{R}{R + R_2 + m^2 R_1}} \quad \boxed{U'_{2_{eff}} = 10{,}5\ \text{V}} \quad \text{(au lieu de 12 V)}.$$

3. b. Il est toujours possible de passer aux pertes cuivre avec : $P_{Cu} = R_1 I_{1_{eff}}^2 + R_2 I_{2_{eff}}^2$.

Il vient : $$P_{Cu} = R_1\left(\frac{m^2 E}{R + R_2 + m^2 R_1}\right)^2 + R_1\left(\frac{mE}{R + R_2 + m^2 R_1}\right)^2$$

$$\boxed{P_{Cu} = (R_2 + m^2 R_1)\left(\frac{mE}{R + R_2 + m^2 R_1}\right)^2 = 4{,}4\ \text{W}}$$

3. c. La puissance moyenne utile est la puissance moyenne reçue par l'ampoule, c'est-à-dire :

$$P'_{moyen} = \frac{U'^2_{2_{eff}}}{R} = P_{moyen}\left(\frac{U'_{2_{eff}}}{U_{2_{eff}}}\right)^2 = P_{moyen}\left(\frac{R}{R + R_2 + m^2 R_1}\right)^2.$$

Le rapport cherché est alors :

$$\frac{P_{Cu}}{P'_{moyen}} = \frac{(R_2 + m^2 R_1)(mE)^2}{P_{moyen}} = \boxed{\frac{R_2 + m^2 R_1}{R} = 0{,}14} \text{ soit 14 \% de pertes.}$$

102 Transformateur et transfert de puissance

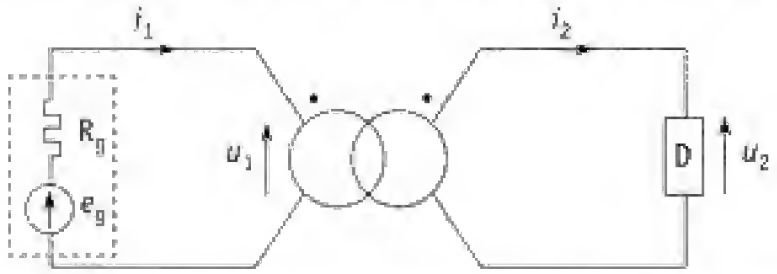
On étudie le transfert de puissance en régime sinusoïdal d'une source de f.é.m. $e_g(t) = E\cos(\omega t)$ et résistance R_g vers une charge constituée d'un dipôle linéaire passif D d'impédance $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$ (avec $j^2 = -1$).

Copyrighted material

1. On considère ici un branchement direct :

Déterminer en régime sinusoïdal établi l'expression de la puissance moyenne reçue par la charge. Simplifier cette expression dans le cas où $R_u = X_u = 2R_g$.

2. On insère maintenant entre la source et la charge un transformateur (supposé parfait) de rapport de transformation égal à m. Le schéma devient le suivant :



a. Déterminer en notation complexe la tension aux bornes de la charge ainsi que l'intensité du courant au secondaire. En déduire l'expression de la puissance moyenne transférée à la charge.

b. Déterminer le rapport de transformation qui permet de rendre maximale cette puissance moyenne reçue par la charge.

c. On suppose que m a la valeur déterminée ci-dessus. Donner l'expression de la puissance moyenne transmise alors à la charge ; la simplifier pour $R_u = X_u = 2R_g$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Propriétés du transformateur parfait.
- Puissance moyenne en régime sinusoïdal.

2. Ce qu'il faut comprendre

- Il est fortement conseillé d'utiliser les complexes associés pour les tensions et les intensités, mais la notion de complexe associé ne peut être utilisée pour les puissances (car la puissance instantanée apportée à un dipôle n'est pas une grandeur sinusoïdale de valeur moyenne nulle).
- La notion de bornes homologues dans un transformateur permet de déterminer la relation entre le flux à travers une spire du primaire et le flux à travers une spire du secondaire sans erreur de signe.
- La bonne utilisation des f.é.m. d'induction permet, avec la notion de bornes homologues, de donner les intensités et tensions sans erreur de signe.

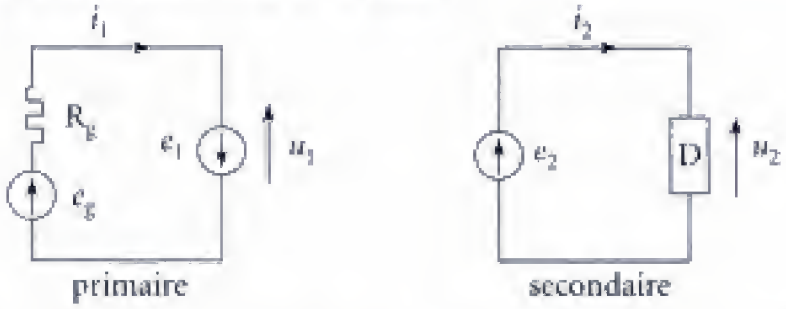
Copyrighted material

Hidden page

raître les f.é.m. d'induction e_1 et e_2 caractérisant le phénomène d'induction qui est à la base du fonctionnement du transformateur.

Il ne faut pas oublier de mettre les f.é.m. d'induction dans le bon sens (sens positif du circuit).

Les schémas équivalents sont donc les suivants :



Les expressions des f.é.m. d'induction sont $e_1 = -N_1\dfrac{d\phi_1}{dt}$ et $e_2 = -N_2\dfrac{d\phi_2}{dt}$ si on note N_1 et N_2 les nombres de spires et ϕ_1 et ϕ_2 les flux à travers une spire au primaire et au secondaire. La considération des sens positifs des deux circuits et de la position des bornes homologues indique que, dans le cas étudié, $\phi_1 = -\phi_2$. La loi des mailles s'écrit alors :

- dans le primaire $u_1 = e_g - R_g i_1 = N_1\dfrac{d\phi_1}{dt}$;
- dans le secondaire $-N_2\dfrac{d\phi_2}{dt} = u_2$.

On en déduit $u_2 = mu_1$ $\left(m = \dfrac{N_2}{N_1}\right)$ et donc $e_g - R_g i_1 = \dfrac{u_2}{m}$ (1)

Pour trouver la seconde relation utile entre les deux intensités, on peut considérer le bilan en puissance : la puissance d'entrée $u_1 i_1$ du transformateur se retrouve intégralement dans la puissance de sortie $u_2 i_2$. Donc $u_1 i_1 = u_2 i_2$; comme $u_2 = mu_1$, d'après ce qui précède, on en déduit :

$$i_1 = mi_2 \quad (2)$$

On peut alors écrire les relations (1) et (2) avec les complexes associés (ou, plus précisément, avec les amplitudes complexes) :

La relation (1) s'écrit $E - R_g\underline{I_1} = \dfrac{\underline{U_2}}{m}$.

La relation (2) s'écrit $\underline{I_1} = m\underline{I_2}$; on sait en outre que $\underline{U_2} = \underline{Z_u}\underline{I_2}$. On obtient :

$$E - mR_g\underline{I_2} = \frac{\underline{Z_u}\underline{I_2}}{m}.$$

Cette relation conduit ainsi à l'expression de l'amplitude complexe de l'intensité du courant dans la charge :

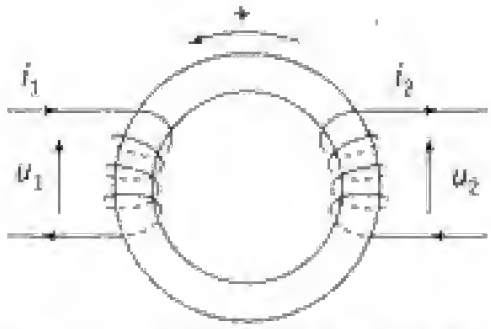
$$\boxed{\underline{I_2} = \frac{mE}{m^2R_g + \underline{Z_u}} = \frac{mE}{R_u + m^2R_g + jX_u}}$$

Copyrighted material

Hidden page

103 Transformateur non parfait : pertes fer par hystérésis

Un transformateur est réalisé avec un enroulement primaire de N_1 spires, un enroulement secondaire de N_2 spires et un noyau ferromagnétique. Celui-ci a la forme d'un tore de section d'aire $s = 7{,}0\ cm^2$ et de périmètre moyen $l = 0{,}50\ m$. Les spires sont enroulées autour du noyau en accord avec le schéma suivant :



On considérera dans la suite que les enroulements sont de résistance négligeable et que le champ magnétique à l'intérieur du noyau torique est uniforme sur toute l'étendue d'une section droite du tore.

Le transformateur fonctionne en régime sinusoïdal, alimenté au primaire par une tension sinusoïdale de valeur efficace $E = 220\ V$ et de fréquence $f = 50\ Hz$:
$u_1(t) = E\sqrt{2}\cos(2\pi ft)$.

1. Déterminer l'expression de $B(t)$, composante orthoradiale (de valeur moyenne nulle) du champ magnétique au sein du noyau torique. Pour éviter la saturation du matériau ferromagnétique, la norme du champ magnétique au sein du noyau torique doit rester constamment en dessous de la valeur de saturation $B_{sat} = 1{,}4\ T$: préciser alors le nombre minimal de spires que doit posséder l'enroulement primaire. On supposera par la suite que $N_1 = 1{,}2 \cdot 10^3$.

2. Le transformateur est considéré comme parfait à l'exception du milieu ferromagnétique. Celui-ci est assimilé dans cette question à un milieu linéaire homogène isotrope (L.H.I.) de perméabilité magnétique relative μ_r réelle : $\mu_r = 3 \cdot 10^4$.

a. La transformation des tensions s'effectue-t-elle dans ce transformateur comme dans un transformateur parfait ? Préciser la relation entre les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

b. En ne considérant que les puissances **moyennes**, peut-on dire que la transformation des puissances (moyennes) s'effectue comme dans un transformateur parfait ?

c. La transformation des courants ne s'effectue pas comme dans un transformateur parfait : préciser la relation entre les intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $B(t)$. Faire apparaître le terme correctif (courant magnétisant) dans l'expression de $i_1(t)$ dû au caractère non parfait du milieu magnétique. Supposons que l'on admette que le modèle transformateur parfait est valable à condition que l'amplitude du terme correctif soit plus petite que 5 % de l'amplitude de l'intensité $i_1(t)$ du courant au primaire : préciser alors pour quelles valeurs de $I_{1_{eff}}$ (valeur efficace de $i_1(t)$) le modèle transformateur parfait peut s'appliquer.

Copyrighted material

Hidden page

(la constante d'intégration est nulle car $B(t)$ est de valeur moyenne nulle).

La condition de non saturation du noyau s'écrit alors $B_{max} < B_{sat}$ et on en déduit la condition sur le nombre de spires au primaire :

$$N_1 > \frac{E\sqrt{2}}{2\pi f s B_{sat}}, \text{ ce qui donne } N_1 > 10^3$$

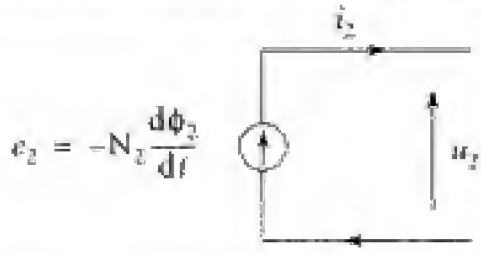
2. Le milieu magnétique n'est plus parfait : $B(t) = \mu_0 \mu_r H(t)$.

2. a. La transformation des tensions s'effectue comme dans un transformateur parfait dans la mesure où on considère qu'il n'y a pas de fuites de flux et pas de résistance pour les enroulements.

Commentaire

On considère ici que le caractère non parfait du milieu magnétique n'occasionne pas de fuites de flux. On a toujours $|\phi_1| = |\phi_2|$. En pratique, le milieu magnétique canalise d'autant mieux le champ magnétique qu'il se rapproche du modèle parfait. Si la perméabilité magnétique relative devenait trop faible, il y aurait *a priori* des fuites de flux et la transformation des tensions ne se ferait plus comme dans un transformateur parfait.

Le schéma équivalent du primaire a déjà été utilisé. Celui du secondaire est le suivant :

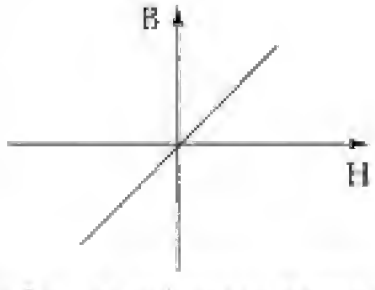


La loi des mailles appliquée dans ce second circuit s'écrit $u_2 = -N_2 \frac{d\phi_2}{dt}$.

Le flux à travers une spire du secondaire s'écrit $\phi_2 = +sB(t)$ car, cette fois, le vecteur unitaire normal se confond avec le vecteur unitaire orthoradial ; on a donc $\phi_2 = -\phi_1$ et

$$\boxed{u_2 = m u_1} \quad \left(\text{avec} \quad m = \frac{N_2}{N_1}\right).$$

2. b. Il n'y a pas de pertes par effet Joule. Les seules pertes d'énergie qu'il pourrait y avoir sont les pertes fer par hystérésis. La puissance moyenne perdue de cette façon est proportionnelle à l'aire du cycle d'hystérésis. Ici, le « cycle » se confond avec un segment de droite décrit dans un sens puis dans l'autre.



En conséquence, l'aire du cycle est nulle et donc la puissance moyenne perdue l'est également. La transformation des puissances moyennes se fait donc comme dans un transformateur parfait. La puissance moyenne d'entrée est égale à la puissance moyenne de sortie :

$$\boxed{\langle u_1 i_1 \rangle = \langle u_2 i_2 \rangle}$$

Copyrighted material

Commentaire

Contrairement à ce qui se passe dans un transformateur parfait, il n'y a pas ici égalité des puissances instantanées d'entrée et de sortie : $u_1 i_1 \neq u_2 i_2$. Une puissance est mise en jeu pour faire varier le champ magnétique dans le noyau et seule la valeur moyenne de cette puissance est nulle.

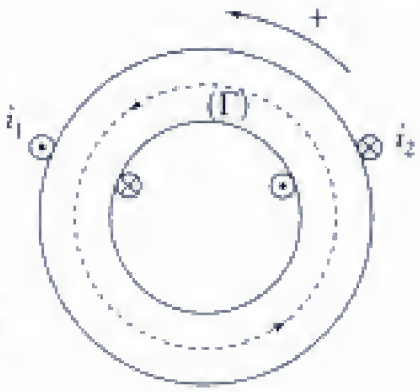
2. c. La formulation générale $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \overrightarrow{j_{\text{libre}}}$ de l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.) se traduit globalement par la propriété $\oint \vec{H}\delta\vec{l} = i_{\text{libre}}$.

On peut appliquer cette propriété globale au contour fermé (Γ) constitué du cercle correspondant au périmètre moyen du tore, le sens positif de ce contour étant le sens positif des angles.

Il vient alors $lH = i_{\text{libre}} = N_2 i_2 - N_1 i_1$.

Comme $H = \dfrac{B}{\mu_0 \mu_r}$, on obtient :

$$\boxed{i_1 = m i_2 - \frac{lB}{\mu_0 \mu_r N_1}}$$



Le terme correctif lié au caractère non parfait du matériau magnétique est donc le dernier terme que l'on peut noter $i_m(t)$. Il peut s'écrire, en remplaçant $B(t)$ par son expression :

$$i_m(t) = \frac{lE\sqrt{2}}{2\pi f \mu_0 \mu_r N_1^2 s} \sin(2\pi f t).$$

Le modèle « transformateur parfait » sera donc valable si : $\dfrac{lE\sqrt{2}}{2\pi f \mu_0 \mu_r N_1^2 s} < \dfrac{5}{100} I_{1_{\text{eff}}} \sqrt{2}$

soit pour :

$$\boxed{I_{1_{\text{eff}}} > 20 \frac{lE}{2\pi f \mu_0 \mu_r N_1^2 s}} \Rightarrow \boxed{I_{1_{\text{eff}}} > 0{,}2\ \text{A}}$$

Commentaire

Il apparaît que la condition précédente est souvent vérifiée dans la pratique pour un transformateur en charge (puissance transférée assez importante et donc courant d'intensité assez grande).

3. Le milieu est linéaire au sens des régimes sinusoïdaux : $\underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$, les grandeurs soulignées $\underline{B}$ et $\underline{H}$ désignant les complexes associés (ou les amplitudes complexes).

3. a. $B(t)$ et $H(t)$ sont alors deux fonctions sinusoïdales du temps présentant un déphasage l'une par rapport à l'autre (car $\phi \neq 0$). La courbe représentant les variations de B avec H est donc une ellipse de centre le point (0,0).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

$$H(t) = \frac{E\sqrt{2}}{2\pi f N_1 s \mu_0 \mu}\cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2} - \phi\right) = -\frac{E\sqrt{2}}{2\pi f N_2 s \mu_0 \mu}\sin(2\pi f t - \phi).$$

L'intégrale devient alors $A = -\int_0^{\frac{2\pi}{f}}\left[-\frac{E\sqrt{2}}{2\pi f N_1 s}\sin(2\pi f t)\right]\left[-\frac{E\sqrt{2}}{sN_1\mu_0\mu}\cos(2\pi f t - \phi)\right]dt$.

Pour la calculer, on utilise $\sin(2\pi f t)\cos(2\pi f t - \phi) = \frac{1}{2}[\sin(4\pi f t - \phi) + \sin(\phi)]$.

La première intégrale qui fait intervenir $\int_0^{\frac{2\pi}{f}} \sin(4\pi f t - \phi)dt$ est nulle.

On en déduit $A = \int_0^{\frac{2\pi}{f}} -\frac{E^2}{2\pi f N_1^2 s \mu_0 \mu}\sin(\phi)dt$ et donc $\boxed{A = -\frac{E^2\sin(\phi)}{2\pi(fN_1 s)^2\mu_0\mu}}$

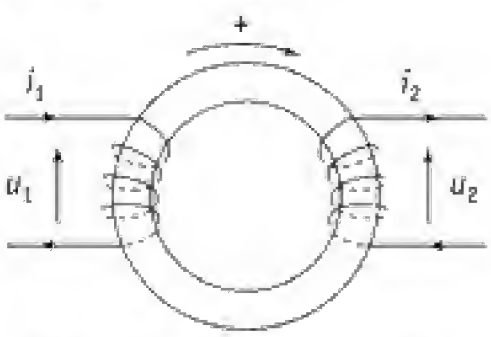
Cette aire représente l'énergie perdue par cycle et par unité de volume du matériau. Pour obtenir la puissance moyenne perdue, il faut donc multiplier A par le volume du matériau sl et par le nombre de cycles par unité de temps, soit f. La puissance moyenne perdue est alors $Aslf$, soit :

$$\left(-\frac{E^2\sin(\phi)}{2\pi(fsN_1)^2\mu_0\mu}\right)(slf) = -\frac{lE^2\sin(\phi)}{2\pi f\mu_0\mu s N_1^2}$$

qui correspond bien au résultat trouvé précédemment.

104 Transformateur d'impulsions

On considère un transformateur constitué de deux enroulements de N spires chacun régulièrement disposées sur un tore en ferrite de périmètre moyen a et de section d'aire s ($\sqrt{s} \ll a$). Le schéma des enroulements est donné ci-dessous :

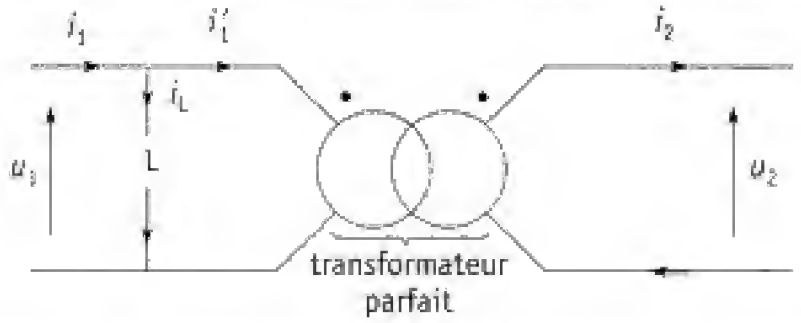


Ce transformateur sera considéré comme parfait, à l'exclusion du milieu magnétique qui sera assimilé, en dehors de la saturation, à un milieu linéaire homogène isotrope (L.H.I.) de perméabilité magnétique relative μ_r finie et réelle. La saturation du milieu magnétique correspond au moment où le champ magnétique est tel que la valeur absolue du flux magnétique à travers un enroulement atteint la valeur $\Phi_{sat} = 400$ Vμs. Dans toute la suite, on notera $\Phi(t)$ le flux du champ magnétique à travers la totalité de l'enroulement primaire.

1. Déterminer, à l'aide du schéma des enroulements, une paire de bornes homologues du transformateur.

Copyrighted material

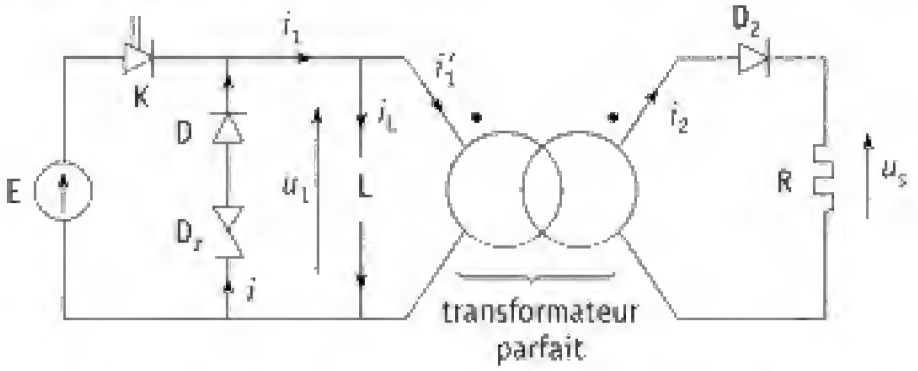
2. Un tel transformateur peut, en régime non saturé, être schématisé par l'association d'un transformateur parfait de rapport égal à un et d'une bobine parfaite de coefficient d'auto-induction L (schéma suivant que l'on appellera « schéma bis ») :



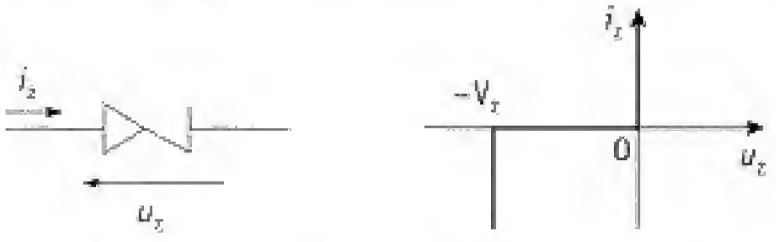
a. Justifier que le schéma vu précédemment est bien équivalent pour les tensions u_1 et u_2.

b. Montrer également qu'il est équivalent pour les intensités i_1 et i_2 à condition qu'il existe une relation de proportionnalité à déterminer entre $\Phi(t)$ et $i_L(t)$ et, par conséquent, que le coefficient L ait une expression que l'on précisera à l'aide de μ_0, μ_r, N, s et a. Dans la suite, on représentera le transformateur par son schéma équivalent.

3. Avec ce transformateur, on réalise le montage ci-dessous (on a remplacé le transformateur étudié par son schéma équivalent) :



D et D_z sont deux diodes semi-conductrices idéales, la diode Zener D_z possède la caractéristique suivante, avec une tension Zener V_z = 6,8 V :

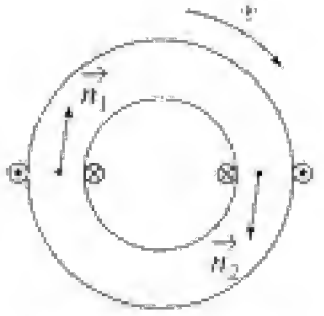


K est un interrupteur commandé (transistor utilisé en commutation) de fréquence $f = \frac{1}{T}$ = 5 kHz. Il est fermé entre t = 0 et $t = t_1$ = 20 µs, ouvert entre $t = t_1$ et t = T. Cet interrupteur sera supposé parfait.

Le montage est alimenté par une source de tension de f.é.m. E = 10 V. La charge est un résistor de résistance R = 100 Ω. Le but du montage est de transmettre à la charge des signaux du type impulsions.

Copyrighted material

Hidden page



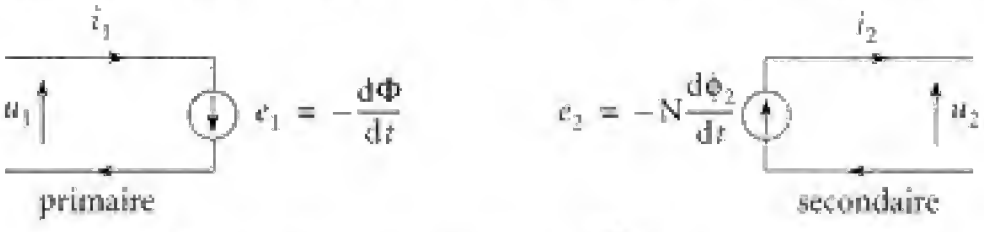
$$\vec{B} = B\vec{u_\theta}$$

($\vec{u_\theta}$: vecteur unitaire orthoradial orienté dans le sens positif des angles)

Remarque : il serait bien entendu possible de choisir comme bornes homologues le couple constitué des deux autres bornes.

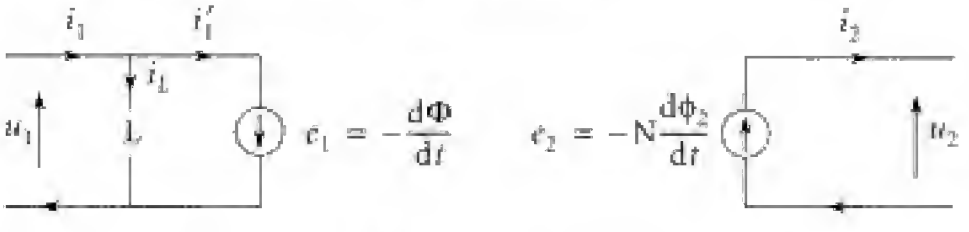
2. Pour étudier l'équivalence entre les deux schémas, on étudie la relation entre les tensions puis la relation entre les intensités.

2. a. Le transformateur réel peut être remplacé par le schéma équivalent des deux enroulements avec prise en compte du phénomène d'induction (f.é.m. e_1 et e_2) :



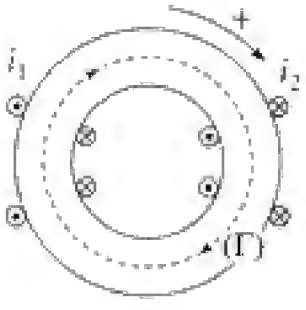
On a donc $u_1 = \frac{d\Phi}{dt}$ (avec $\Phi = N\phi_1$) et $u_2 = -N\frac{d\phi_2}{dt}$. Comme les deux sens positifs ne sont pas entrant par les bornes homologues, $\phi_1 = -\phi_2$ et donc $u_2 = u_1$.

Le montage correspondant au « schéma bis » peut aussi être remplacé par le schéma équivalent faisant apparaître les f.é.m. d'induction :



On a alors $u_1 = \frac{d\Phi}{dt}$ et $u_2 = -N\frac{d\phi_2}{dt}$. La considération des bornes homologues et des sens positifs des courants indique que $\phi_2 = -\phi_1$ et donc on retrouve $u_1 = u_2$. La relation concernant les tensions est donc la même dans les deux cas.

2. b. Pour le transformateur réel on peut avoir la relation concernant les intensités en appliquant le théorème d'Ampère $\oint \vec{H}\delta\vec{l} = i_{\text{libres}}$ dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.). On considère un contour fermé (Γ) orienté dans le sens positif des angles :



On a alors $\oint_{(\Gamma)} \vec{H}\delta\vec{l} = aH = Ni_1 - Ni_2$ en notant H la composante orthoradiale de l'excitation magnétique.

Copyright Matériel

Hidden page

Au temps t_1, le flux atteint sa valeur maximum $Et_1 = 200$ V µs qui est bien inférieure à Φ_{sat} : la saturation n'est donc pas atteinte. Comme on l'a vu précédemment, $u_2 = u_1 = E$. La diode D_2 est alors passante et la tension de sortie est :

$$\boxed{u_s = E}$$

(on vérifie que la diode D_2 est passante en calculant l'intensité $i_2 = \dfrac{E}{R}$ qui est bien positive).

3. c. Comme on pourra le vérifier *a posteriori* la diode D_2 est bloquée pour $t > t_1$: $i_2 = 0$. En conséquence $i_1' = i_2 = 0$ et donc $\boxed{u_s = 0}$

L'intensité i_L est une fonction continue du temps. Comme elle est strictement positive à t_1 elle reste nécessairement positive pendant un certain temps au-delà de t_1. Comme l'interrupteur K est ouvert et que $i_1' = 0$, on a nécessairement $i = i_L > 0$: la diode D_1 est passante et la diode Zener fonctionne en inverse.

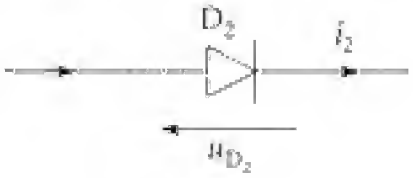
La caractéristique vue précédemment de l'association en série des deux diodes indique qu'alors $u_1 = -V_z$. Comme $u_1 = \dfrac{d\Phi}{dt}$, on en déduit par intégration entre t_1 et t :

$$\boxed{\Phi(t) = -V_z(t - t_1) + \Phi(t_1) = -V_z(t - t_1) + Et_1}$$

Cette expression n'est valable que tant que $i_L > 0$, donc tant que $\Phi(t) > 0$, soit pour $t - t_1 < \dfrac{Et_1}{V_z}$. Cette dernière inégalité conduit à $t < t_2$ tel que :

$$\boxed{t_2 = t_1\left(1 + \frac{E}{V_z}\right) = 49\ \mu s}$$

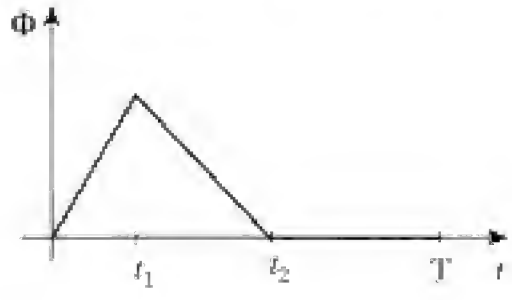
On peut alors vérifier *a posteriori* que la diode D_2 est bien bloquée :

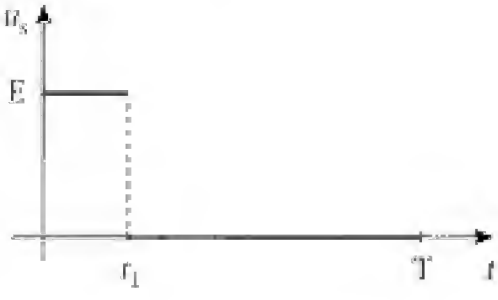


en effet, $u_{D_2} = u_2 = u_1 = -V_z < 0$.

Pour $t \in]t_2, T[$, toutes les grandeurs électriques (tensions et intensités) sont nulles.

3. d. Représentations graphiques de l'évolution temporelle :





Copyrighted material

Hidden page

chapitre

2

Conversion électromécanique

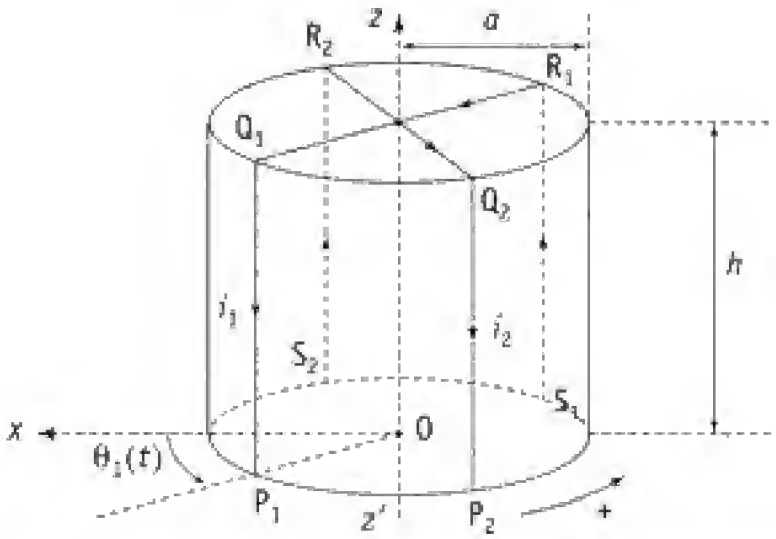
201 Modélisation d'une machine à courant continu

Sur un cylindre (le rotor) d'axe $z'z$, de rayon $a = 5$ cm et hauteur $h = 20$ cm, sont disposées quatre spires réparties en deux groupes :

• le premier groupe est composé de deux spires superposées $P_1Q_1R_1S_1$ et $P_1'Q_1'R_1'S_1'$ appartenant toutes deux au plan caractérisé par l'angle :
$\theta_1(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP_1}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP_1'})$;

• le second groupe est composé de deux spires superposées $P_2Q_2R_2S_2$ et $P_2'Q_2'R_2'S_2'$ appartenant toutes deux au plan perpendiculaire au précédent :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP_2}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP_2'}) = \theta_1(t) + \frac{\pi}{2}.$$



La portion de l'espace contenant les spires est le siège d'un champ magnétique radial indépendant du temps. Au niveau de la périphérie du cylindre ($r = a$), la composante radiale du champ magnétique est une fonction sinusoïdale de l'angle θ :
$\vec{B}(a, \theta, z) = B_0 \sin\theta \vec{u}_r$ ($\vec{u}_r$ vecteur unitaire radial) avec $B_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ T.

L'ensemble du rotor sur lequel sont disposées les spires tourne à vitesse angulaire $\omega > 0$, constante autour de l'axe $z'z$. En conséquence, $\theta_1(t) = \omega t$.

1. Le sens positif d'une spire est pris, comme l'indique la figure, de S vers P.

Déterminer les expressions de la f.é.m. d'induction $e_1(t)$ dans une spire du premier groupe et de la f.é.m. d'induction $e_2(t)$ dans une spire du deuxième groupe.

2. Les huit extrémités des quatre spires sont reliées deux à deux au niveau des quatre lames du collecteur :

• les points S_2' et P_1' sont reliées à la lame (α) ;

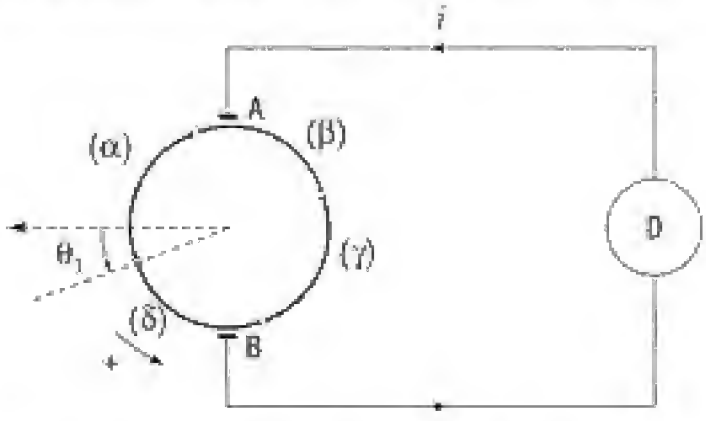
• les points S_1' et S_2 sont reliées à la lame (β) ;

• les points S_1 et P_2 sont reliées à la lame (γ) ;

• les points P_2 et P_2' sont reliées à la lame (δ).

Copyrighted material

Le collecteur, solidaire du rotor, assure par l'intermédiaire de ses quatre lames électriquement isolées une liaison électrique entre les spires et le circuit extérieur (dipôle D) par l'intermédiaire de deux balais fixes A et B. Le schéma est le suivant :



Si $\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, le point A est au contact de la lame (β), elle-même reliée à S_1' et S_2 et le point B est au contact de la lame (δ), elle-même reliée à P_1 et P_2'.

Si $\theta_1 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point A passe au contact de la lame (γ) et B au contact de la lame (α), et ainsi de suite.

Déterminer, pour chacun des quatre intervalles de temps, l'expression, en fonction de e_1 et e_2, de la f.é.m. d'induction e à prendre en compte dans le schéma équivalent du circuit extérieur. En déduire, pour chaque intervalle de temps, l'expression de la f.é.m. $e(t)$ en fonction du temps. Faire la représentation graphique de l'évolution temporelle de $e(t)$.

3. a. Déterminer numériquement la valeur maximale e_{max} de cette f.é.m. d'induction si le rotor tourne à 1 800 tours par minute.

b. Que pourrait-on faire pour obtenir une f.é.m. d'induction de plusieurs dizaines de volts sans changer les dimensions du rotor ni la vitesse de rotation ?

c. Déterminer la valeur numérique de l'ondulation relative de f.é.m. : $\frac{e_{max} - e_{min}}{e_{max}}$ (e_{min} étant la valeur minimale de $e(t)$).

d. Que faudrait-il faire pour diminuer cette ondulation ?

4. On note i_1 l'intensité du courant dans une spire du premier groupe et i_2 l'intensité du courant dans une spire du deuxième groupe. Déterminer l'expression en fonction de i_1 du moment résultant par rapport à l'axe $z'z$ des forces électromagnétiques exercées sur une spire du premier groupe. Déterminer de même l'expression en fonction de i_2 du moment résultant par rapport à l'axe $z'z$ des forces exercées sur une spire du second groupe.

5. On note i l'intensité du courant dans le circuit extérieur.

a. Préciser les expressions de i_1 et i_2 en fonction de i dans les différents intervalles de temps.

b. En déduire les expressions du moment résultant total des forces électromagnétiques dans les différents intervalles de temps. Montrer qu'il existe à tout instant, une relation entre ce moment, l'intensité i, la f.é.m. d'induction e et la vitesse angulaire ω.

Document numérique complémentaire

1. Ce qu'il faut savoir

- F.é.m. d'induction.
- Forces électromagnétiques.
- Machine à courant continu.

2. Ce qu'il faut comprendre

- La f.é.m d'induction ne peut se calculer ici qu'avec la circulation du champ électromoteur. En effet, chaque spire forme un circuit ouvert : on ne peut donc pas parler de flux à travers le circuit. D'autre part, le champ magnétique n'est connu qu'au niveau de la périphérie du rotor.
- Dans une machine à courant continu, l'objectif est d'obtenir une f.é.m. d'induction pour le circuit extérieur qui soit sensiblement constante à vitesse angulaire de rotation constante. La répartition des spires sur la périphérie du rotor et le système collecteur-balais permettent d'atteindre ce but.

3. Solution

1.

POINT MÉTHODE

La f.é.m. d'induction dans une portion de circuit (circuit ouvert) se détermine obligatoirement avec la circulation du champ électromoteur : celle-ci doit se calculer dans le sens positif du circuit.

Dans le cas d'un champ magnétique stationnaire, le champ électromoteur au point M du circuit est $\overrightarrow{E_m} = \vec{V} \wedge \vec{B}$, expression dans laquelle $\vec{V}$ représente la vitesse du point M du circuit par rapport au référentiel d'étude.

Le champ électromoteur en un point M d'une spire est $\overrightarrow{E_m} = \vec{V} \wedge \vec{B}$, donc colinéaire à l'axe $z'z$. La circulation du champ électromoteur est égale à la circulation sur les portions du circuit parallèles à $z'z$. En périphérie du rotor, le champ électromoteur est : $\overrightarrow{E_m} = a\omega\vec{u_\theta} \wedge B(\theta)\vec{u_r} = -a\omega B(\theta)\vec{u_z}$ ($\vec{u_\theta}$: le vecteur unitaire orthoradial).

La f.é.m. d'induction e_1 pour une spire du premier groupe est alors :

$$e_1 = \int_{S_1}^{P_1} \overrightarrow{E_m}\vec{\delta l} = \int_{S_1}^{R_1} \overrightarrow{E_m}\vec{\delta l} + \int_{Q_1}^{P_1} \overrightarrow{E_m}\vec{\delta l}.$$

$$\int_{S_1}^{R_1} \overrightarrow{E_m}\vec{\delta l} = \int_0^h -a\omega B(\theta_1 + \pi)dz = +a\omega h B_0 \sin[\theta_1(t)]$$

$$\int_{Q_1}^{P_1} \overrightarrow{E_m}\vec{\delta l} = \int_h^0 -a\omega B(\theta_1)dz = +a\omega h B_0 \sin[\theta_1(t)].$$

Donc $\boxed{e_1(t) = 2a\omega h B_0 \sin(\omega t)}$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Donc $$\boxed{\frac{\epsilon_{max} - \epsilon_{min}}{\epsilon_{max}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}29}$$

3. d. Il faudrait répartir les spires sur la périphérie du rotor pour obtenir un effet de moyenne.

4. Le moment résultant des forces est égal au moment résultant des forces exercées sur les portions du circuit parallèles à l'axe $z'z$.

La force qui s'exerce sur un élément compris entre z et $z + dz$ est :
$\vec{\delta f} = i_1 dz \vec{u_z} \wedge B(\theta)\vec{u_r} = i_1 B(\theta) dz \vec{u_\theta}$.

Le moment par rapport à l'axe de cette force est :
$\vec{u_z} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\delta f}) = +a i_1 B(\theta) dz$.

Le moment résultant par rapport à l'axe des forces exercées sur une spire du premier groupe est alors :

$$\gamma_1 = \int_0^h +a i_1 B(\theta_1 + \pi) dz + \int_h^0 +a i_1 B(\theta_1) dz$$

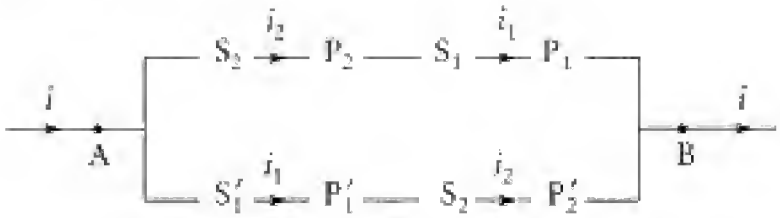
soit $\boxed{\gamma_1 = -2ahB_0 i_1 \sin(\omega t)}$

On obtient le moment résultant γ_2 des forces exercées sur une spire du second groupe en remplaçant i_1 par i_2 et $\theta_1 = \omega t$ par $\theta_1 + \frac{\pi}{2} = \omega t + \frac{\pi}{2}$. On obtient alors :

$$\boxed{\gamma_2 = -2ahB_0 i_2 \cos(\omega t)}$$

5. a. On utilise les schémas de branchements de la question **2.**

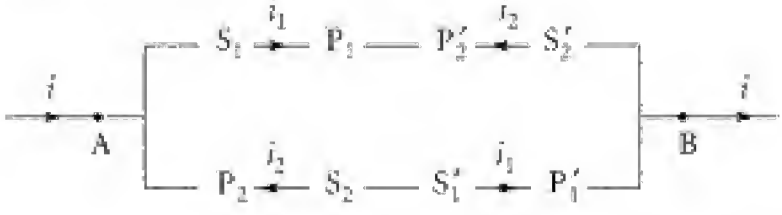
· Lorsque $\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:



La symétrie impose :

$$\boxed{i_1 = i_2 = \frac{i}{2} \quad \text{pour } \theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$$

· Lorsque $\theta_1 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$:

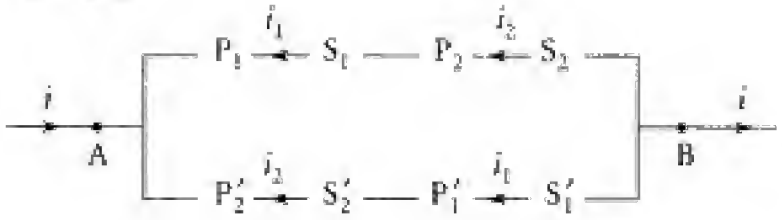


Copyrighted material

On a donc :

$$\boxed{i_1 = -i_2 = \frac{i}{2} \quad \text{pour } \theta_1 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[}$$

• Lorsque $\theta_1 \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$:



$$\boxed{i_1 = i_2 = -\frac{i}{2} \quad \text{pour } \theta_1 \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[}$$

• Enfin, lorsque $\theta_1 \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$:

$$\boxed{i_1 = -i_2 = -\frac{i}{2} \quad \text{pour } \theta_1 \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[}$$

5. b. • Lorsque $\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, le moment résultant total est $\Gamma = 2\gamma_1 + 2\gamma_2$ car il y a deux spires de chaque groupe. D'où :

$$\Gamma = -4ahB_0(i_1 \sin\omega t + i_2 \cos\omega t) = -2ahB_0 i(\sin\omega t + \cos\omega t)$$

$$\boxed{\Gamma = -2\sqrt{2}ahB_0 i \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{pour } \theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$$

• Lorsque $\theta_1 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$: $\Gamma = 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = -2ahB_0 i(\sin\omega t - \cos\omega t)$

$$\boxed{\Gamma = -2\sqrt{2}ahB_0 i \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{pour } \theta_1 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[}$$

• Lorsque $\theta_1 \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$:

$$\Gamma = 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = +2ahB_0 i(\sin\omega t + \cos\omega t)$$

$$\boxed{\Gamma = 2\sqrt{2}ahB_0 i \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{pour } \theta_1 \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[}$$

• Lorsque $\theta_1 \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$:

$$\Gamma = 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 2ahB_0 i(\sin\omega t - \cos\omega t)$$

$$\boxed{\Gamma = 2\sqrt{2}ahB_0 i \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{pour } \theta_1 \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

- Propriété du hacheur série (uniquement pour la dernière question).
- Décomposition en série de Fourier.

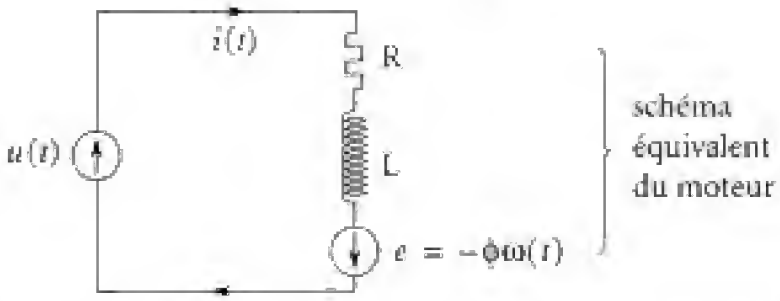
2. Ce qu'il faut comprendre

- Le passage au schéma équivalent d'un moteur à courant continu, avec le problème du signe de la f.é.m. d'induction.
- La méthode pour tracer un diagramme de Bode de façon approximative.

3. Solution

1. La loi des mailles appliquée au circuit du moteur donne :

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \Phi\omega(t).$$



en écrivant la f.é.m. d'induction sous la forme $-\Phi\omega$ (ceci impose d'écrire le moment résultant sous la forme $+\Phi i$).

Dans le domaine de Laplace, l'équation précédente devient :

$$U(p) = RI(p) + pLI(p) + \Phi\Omega(p).$$

Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation appliqué au rotor conduit à

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Phi i(t) - \alpha\omega(t)$$

ce qui donne dans le domaine de Laplace : $pJ\Omega(p) = \Phi I(p) - \alpha\Omega(p)$.

Ces deux équations permettent d'obtenir les deux fonctions de transfert cherchées :

$$F(p) = \frac{\Phi}{(\Phi^2 + \alpha R) + (\alpha L + RJ)p + JLp^2}$$

$$G(p) = \frac{\alpha + Jp}{(\Phi^2 + \alpha R) + (\alpha L + RJ)p + JLp^2}$$

2. En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient après multiplication du numérateur et du dénominateur par 10^4 :

$$F(p) = \frac{8 \cdot 10^2}{78{,}4 + 6{,}12p + 5 \cdot 10^{-2}p^2}.$$

On en déduit : $H(p) = \dfrac{F(p)}{F(0)} = \dfrac{1}{1 + 7{,}8 \cdot 10^{-2}p + 6{,}4 \cdot 10^{-4}p^2}.$

Copyrighted material

On peut calculer les deux racines du dénominateur qui valent sensiblement −14,5 et −108. On en déduit l'expression :

$$H(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{14,5}\right)\left(1 + \frac{p}{108}\right)}$$

On voit apparaître les deux pulsations $\omega_{01} = 14,5\ s^{-1}$ et $\omega_{02} = 108\ s^{-1}$.

3. En remplaçant par les valeurs numériques et en multipliant numérateur et dénominateur par 10^4, il vient

$$G(p) = \frac{12 + 5p}{78,4 + 6,12p + 5 \cdot 10^{-2}p^2}. \text{ D'où : } H_1(p) = \frac{1 + \frac{p}{2,4}}{1 + 7,8 \cdot 10^{-2}p + 6,4 \cdot 10^{-4}p^2}$$

et donc

$$H_1(p) = \frac{1 + \frac{p}{2,4}}{\left(1 + \frac{p}{14,5}\right)\left(1 + \frac{p}{108}\right)}$$

on voit apparaître une troisième pulsation $\omega_{03} = 2,4\ s^{-1}$.

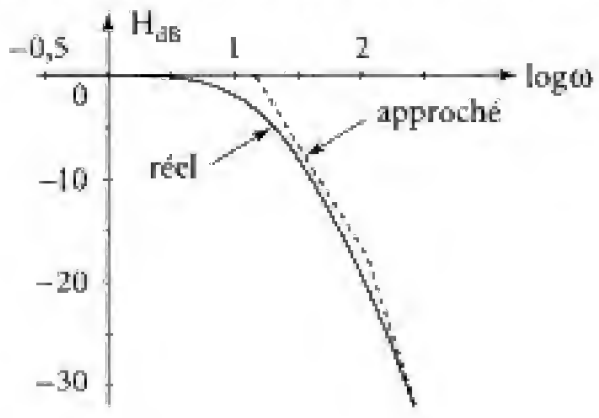
4. Pour tracer une première approche du diagramme de Bode, on peut distinguer trois domaines de valeurs de la pulsation ω :

• $\omega \ll \omega_{01}$ chacun des deux termes du dénominateur peut être considéré comme égal à 1 : $H(j\omega) = 1$ et donc $H_{dB} = 0$.

• $\omega_{01} \ll \omega \ll \omega_{02}$ dans le premier terme du dénominateur, on peut négliger 1 et le second terme peut toujours être considéré comme égal à 1 : $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega/\omega_{01})}$ et donc $H_{dB} = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_{01}}\right)$.

• $\omega \gg \omega_{02}$ on peut négliger 1 dans chacun des deux termes du dénominateur : $H(j\omega) = \frac{1}{\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_{01}}\right)\left(\frac{j\omega}{\omega_{02}}\right)\right]}$ et donc $H_{dB} = 20\log(\omega_{01}\omega_{02}) - 40\log(\omega)$.

Le tracé approché du diagramme avec ces trois segments de droite conduit à



Copyrighted material

Hidden page

7. On peut introduire le développement en série de Fourier de la tension d'alimentation :

$$u(t) = u_0 + A_1\cos(2\pi ft + \varphi_1) + A_2\cos(4\pi ft + \varphi_2) + \cdots$$

Le système étant linéaire, la réponse en courant à la tension $u(t)$ est, en régime établi, la somme des réponses partielles aux différentes composantes vues ci-dessus de la tension. Si la fréquence est nettement supérieure aux fréquences de coupure, on peut considérer que la réponse en vitesse de rotation (et en courant) est quasi nulle pour toutes les composantes autres que la composante continue. La réponse globale sera alors pratiquement confondue avec la réponse à la composante continue u_0 donc

$$\omega(t) = F(0)u_0 = \frac{\Phi}{\Phi^2 + \alpha R}u_0$$

$$i(t) = G(0)u_0 = \frac{\alpha}{\Phi^2 + \alpha R}u_0$$

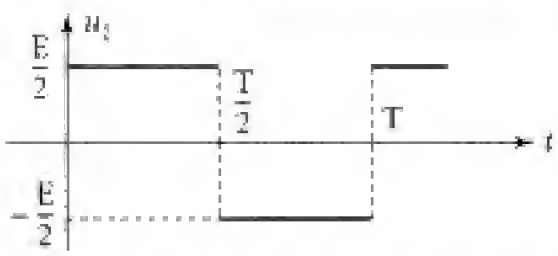
Il est donc licite de considérer la f.é.m. d'induction comme une constante dans la mesure où la vitesse angulaire de rotation est constante. Le moteur est parcouru par un courant d'intensité pratiquement constante, alors que la tension subit des variations temporelles qui peuvent être importantes : on peut qualifier le moteur de « source de courant » selon la terminologie en vigueur en électronique de puissance.

8. La fréquence f est notablement supérieure aux fréquences de coupure. Toutes les composantes de la tension périodique $u(t)$ seront de fréquences notablement supérieures aux fréquences de coupure. On peut alors utiliser l'expression simplifiée de $G(p)$ valable pour des pulsations suffisamment élevées : $G(p) \approx \frac{1}{L.p}$.

Ceci traduit un comportement analogue à un intégrateur. En revenant dans le domaine temporel, on a donc :

$$L\frac{di}{dt} = u(t)$$

9. La tension $u(t)$ peut être considérée comme la somme de la valeur moyenne $u_0 = \frac{E}{2}$ et de la tension $u_1(t)$ de valeur moyenne nulle alternativement égale à $\frac{E}{2}$ et $-\frac{E}{2}$.



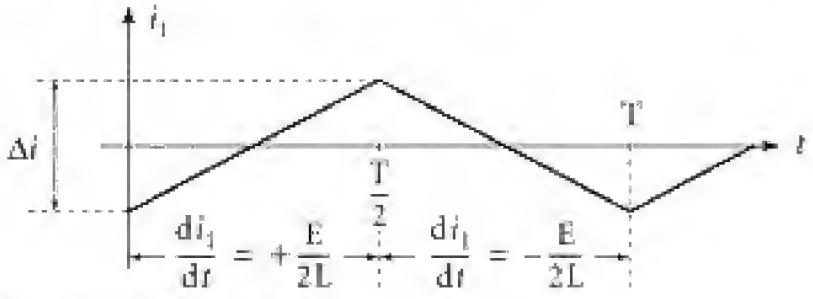
La fréquence de 1 kHz se situe, pour la vitesse angulaire, très largement au-dessus de la fréquence de coupure . La réponse en vitesse angulaire du moteur correspond alors à la réponse à la valeur moyenne de la tension :

$$\omega = \frac{\Phi}{\Phi^2 + \alpha R}u_0 = \frac{\Phi}{\Phi^2 + \alpha R}\frac{E}{2}$$

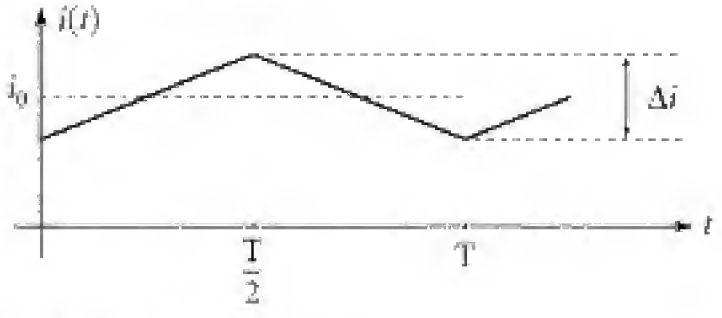
ce qui donne une valeur de 153 rad · s^{-1}, donc un peu moins de 1 500 tr/min.

Copyrighted material

L'intensité du courant en régime établi sera la somme de l'intensité correspondant à la réponse à la valeur moyenne $u_0 = \dfrac{E}{2}$ et de l'intensité correspondant à la réponse à la tension u_1, qui est une tension de valeur moyenne nulle et périodique de fréquence notablement supérieure à la fréquence de coupure. On aura donc : $i(t) = i_0 + i_1(t)$ avec $i_0 = \dfrac{\alpha}{\Phi^2 + \alpha R}\dfrac{E}{2}$ et $i_1(t)$ de valeur moyenne nulle et tel que $L\dfrac{di_1}{dt} = u_1(t)$. On peut représenter les variations temporelles de $i_1(t)$:



Et donc les variations temporelles de $i(t)$:



La valeur moyenne de l'intensité est donc :

$$\boxed{I = \langle i(t) \rangle = i_0 = \frac{\alpha}{\Phi^2 + \alpha R}\frac{E}{2} = 2{,}3\ \text{A}}$$

L'ondulation est donnée par la variation de $i_1(t)$:

$$\boxed{\Delta i = \left|\frac{di_1}{dt}\right|\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{ET}{4L} = \frac{E}{4Lf} = 0{,}75\ \text{A}}$$

10. On a $u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di}{dt} + \Phi\omega(t)$. En passant aux moyennes temporelles sur une période et en prenant en compte le fait que

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{di}{dt}dt = i(T) - i(0) = 0,$$

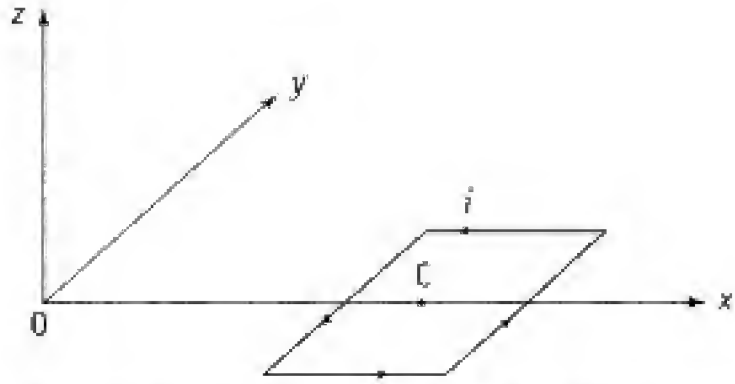
on obtient :

$$\langle u \rangle = \frac{E}{2} = RI + \Phi\langle\omega\rangle.$$

De plus $J\dfrac{d\omega}{dt} = \Phi i(t) - \alpha\omega(t)$. En passant aux valeurs moyennes, on a :
$0 = \Phi I - \alpha\langle\omega\rangle$. En combinant les deux relations, il vient $\dfrac{E}{2} = RI + \Phi\left(\dfrac{\Phi I}{\alpha}\right)$.

Copyrighted material

Hidden page



Dans la suite, on notera $S = 4Na^2$ et $\Phi_m = SB_m$. On donne $R = 1{,}5\ \Omega$, $L = 10$ mH et $S = 1\ m^2$.

Le champ créé par l'inducteur

1. Représenter graphiquement les variations de B_x avec x à un instant donné t_1. Quelle est la signification physique de la constante λ ?

2. Représenter sur le graphe précédent les variations de B_x avec x à un instant t_2 légèrement supérieur à t_1. On qualifie ce type de champ magnétique de « champ glissant » : dans quel sens glisse-t-il et quelle quantité v_0 peut-on appeler « vitesse de glissement » du champ ?

3. À l'instant t, le centre C de la bobine est à l'abscisse x. Déterminer, en utilisant Φ_m, l'expression du flux Φ du champ magnétique créé par l'inducteur à travers la bobine : donner l'expression non simplifiée, puis l'expression simplifiée avec $a \ll \lambda$.

Les forces électromagnétiques s'exerçant sur l'induit

On note $i(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine (le sens positif a été préalablement défini).

4. Déterminer, en prenant en compte $a \ll \lambda$, l'expression simplifiée de la résultante $\vec{F}$ des forces électromagnétiques s'exerçant sur la bobine.

5. La bobine possède (en régime permanent de mouvement) un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$. Son centre C a alors une abscisse $x = vt$.

a. Déterminer (en utilisant $\omega = \omega_0 - \frac{2\pi v}{\lambda}$) l'expression de la f.é.m. d'induction dans l'induit, sans prendre en compte pour l'instant l'auto-induction.

b. Déterminer, en prenant en compte l'auto-induction, l'expression, en régime forcé, de l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit : on mettra cette expression sous la forme $I\sin(\omega t - \varphi)$ en précisant I et φ.

6. On note $\langle\vec{F}\rangle$ la valeur moyenne au cours du temps de la résultante $\vec{F}$.

a. Déterminer, en fonction de Φ_m, ω, λ, R et L, l'expression de cette moyenne.

b. Représenter l'allure des variations de la composante $F = \langle\vec{F}\rangle \cdot \vec{u}_x$ avec ω (pour $\omega \in]-\infty\ ;\ +\infty[$), puis les variations de F avec v. On indiquera sur ces graphiques les coordonnées des points remarquables.

c. Déterminer la valeur numérique F_0 de F pour $v = 0$ et la valeur maximale F_{max} de F.

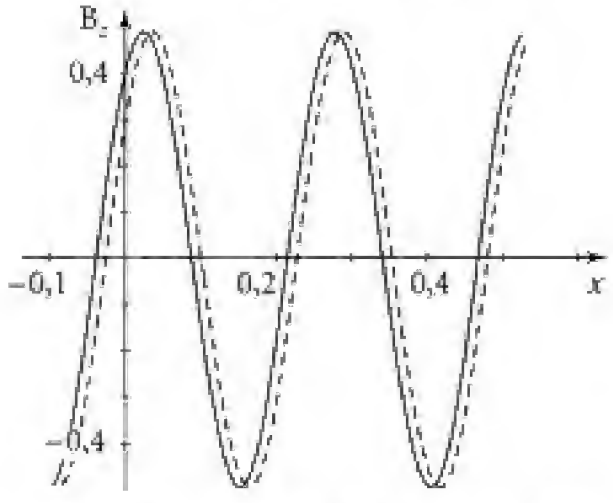
Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Solution

1. À un instant donné, la composante B_z est une fonction sinusoïdale de la variable x. La distance λ est la période spatiale de la fonction $B_z(x)$.



2. Les variations du champ magnétique avec x à un instant légèrement supérieur sont représentées ci-dessus en pointillés. On voit apparaître que le champ « glisse » dans le sens positif. On peut écrire le champ magnétique sous la forme

$$B_z = B_m \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{x}{\frac{\lambda\omega_0}{2\pi}}\right)\right].$$

Cette expression est du type $B_m \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{x}{v_0}\right)\right]$: elle fait apparaître un décalage temporel égal à $\frac{x}{v_0}$ entre le champ en x et le champ en O. La vitesse v_0 peut alors être qualifiée de vitesse de glissement :

$$\boxed{v_0 = \frac{\lambda\omega_0}{2\pi}}$$

3. Le flux du champ magnétique est $\Phi = N\iint_{1\,\text{spire}} \vec{B}\,\vec{n}\,\delta S$. Ici le vecteur normal est confondu avec $\vec{u_z}$ donc :

$$\Phi = N\iint B_z \delta S = N(2a)\int_{x-a}^{x+a} B_z dx' = N(2a)B_m \int_{x-a}^{x+a} \cos\left(2\pi\frac{x'}{\lambda} - \omega_0 t\right)dx'.$$

On obtient donc

$$\Phi = N(2a)B_m \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left(\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+a) - \omega_0 t\right] - \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-a) - \omega_0 t\right]\right).$$

Ce qui donne $\boxed{\Phi = \Phi_m \text{sinc}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)\cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$ (en notant $\text{sinc}\,(A) = \frac{\sin A}{A}$).

Si $a \ll \lambda$, $\text{sinc}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)$ est sensiblement égal à 1. On pourra alors utiliser l'expression simplifiée :

$$\boxed{\Phi = \Phi_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$$

Copyrighted material

Commentaire

On aurait pu obtenir directement cette seconde expression simplifiée en considérant que le champ magnétique était pratiquement uniforme à l'échelle d'une spire. On aurait alors $\Phi = NSB_z(x)$, ce qui donne l'expression précédente.

4. Les forces électromagnétiques s'annulent sur les deux côtés parallèles à $x'x$. Il faut prendre en compte uniquement les forces exercées sur les deux côtés parallèles à $y'y$:

$$\vec{F} = 2N(2a)i[\vec{u_y} \wedge B_z(x+a,t)\vec{u_z} + (-\vec{u_y}) \wedge B_z(x-a,t)\vec{u_z}].$$

On remplace le champ magnétique par son expression :

$$\vec{F} = N(2a)iB_m\vec{u_x}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x+a)-\omega_0 t\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-a)-\omega_0 t\right)\right].$$

On obtient alors $\vec{F} = N(2a)iB_m\vec{u_x}\sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)\sin\left(\omega_0 t-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$.

Comme $\sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \approx \frac{2\pi a}{\lambda}$, il vient $\boxed{\vec{F} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)i\Phi_m\vec{u_x}\sin\left(\omega_0 t-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$

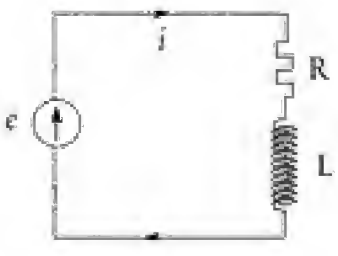
5. Si la vitesse est constante, le flux peut s'écrire :

$$\Phi = \Phi_m\cos\left(\omega_0 t-\frac{2\pi vt}{\lambda}\right) = \Phi_m\cos(\omega t).$$

5. a. La f.é.m. d'induction a pour expression $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$. On en déduit :

$$\boxed{e(t) = \omega\Phi_m\sin(\omega t)}$$

5. b. Le schéma électrique équivalent est le suivant :



La loi des mailles s'écrit alors $e(t) = Ri + L\frac{di}{dt}$. En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, on peut utiliser les complexes associés. En passant aux amplitudes complexes, l'équation des mailles s'écrit :

$$-j\omega\Phi_m = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} \quad (\text{avec } j^2 = -1).$$

On en déduit :

$$\underline{I} = \frac{-j\omega\Phi_m}{R+jL\omega}.$$

En passant aux modules :

$$\boxed{I = \frac{|\omega|\Phi_m}{(R^2+L^2\omega^2)^{1/2}}}$$

En passant aux arguments : $-\frac{\pi}{2}-\varphi+\arg(\omega) = -\frac{\pi}{2}-\arg(R+jL\omega)$.

Et donc

$$\boxed{\varphi = -\arg(R+jL\omega)+\arg(\omega)}$$

Remarque : $\arg(\omega) = 0$ si $\omega > 0$ et $\arg(\omega) = \pi$ si $\omega < 0$.

Copyrighted material

6. On remplace i par son expression et on obtient :

$$\vec{F} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) I \Phi_m \vec{u}_x \sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi).$$

6. a. Pour déterminer la moyenne de $\vec{F}$, on peut remarquer que

$$\sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2}(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)).$$

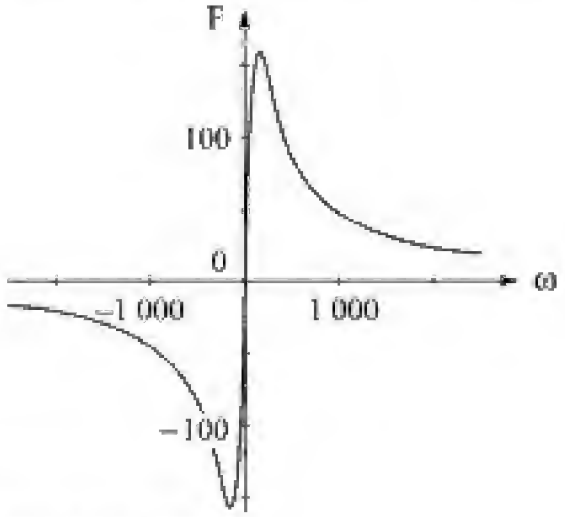
Donc $$\langle \sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2}\cos(\varphi).$$

Si $\omega > 0$, $\cos(\varphi) = \dfrac{R}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$ et $I = \dfrac{\omega \Phi_m}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$

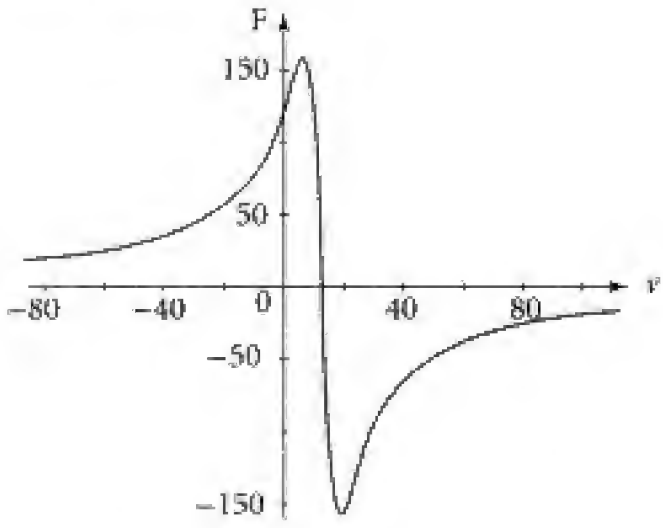
Si $\omega < 0$, $\cos(\varphi) = -\dfrac{R}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$ et $I = -\dfrac{\omega \Phi_m}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$.

Dans les deux cas, on en déduit : $\boxed{\langle \vec{F} \rangle = \dfrac{\pi R \omega \Phi_m^2}{\lambda(R^2 + L^2\omega^2)} \vec{u}_x}$

6. b. On peut alors faire la représentation graphique des variations de F avec ω :



On en déduit les variations de F avec v :



Copyrighted material

Hidden page

$$B_1 = \left(\frac{4B_0}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left[\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)-\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right] = \frac{2B_0}{\pi}.$$

D'où l'expression simplifiée de $B_2(x)$: $\boxed{B_2 = \frac{2B_0}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$

12. Lorsque l'intensité passe de I_0 à $I_0\cos(\omega_0 t)$, le champ magnétique créé par les bobines du premier groupe devient, dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents : $\frac{2B_0}{\pi}\cos(\omega_0 t)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$.

Le champ magnétique créé par les bobines du second groupe sera alors :

$$\frac{2B_0}{\pi}\cos\left(\omega_0 t-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi\left(x-\frac{\lambda}{3}\right)}{\lambda}\right) = \frac{2B_0}{\pi}\cos\left(\omega_0 t-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Le champ magnétique créé par les bobines du troisième groupe sera de même :

$$\frac{2B_0}{\pi}\cos\left(\omega_0 t-\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi\left(x-\frac{2\lambda}{3}\right)}{\lambda}\right) = \frac{2B_0}{\pi}\cos\left(\omega_0 t-\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{4\pi}{3}\right)$$

Pour calculer la somme, on peut utiliser la notation complexe. L'amplitude complexe du champ résultant s'écrit :

$$\underline{B} = \frac{2B_0}{\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)+\exp\left(-\frac{j2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{2\pi}{3}\right)+\exp\left(-\frac{j4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

En développant les cosinus en exponentielles complexes, il vient :

$$\underline{B} = \frac{B_0}{\pi}\left[\left(\exp\left(j\frac{2\pi x}{\lambda}\right)+\exp\left(-j\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right)+\left(\exp\left(j\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{4\pi}{3}\right)\right)+\exp\left(-j\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\exp\left(j\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{8\pi}{3}\right)\right)+\exp\left(-j\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right].$$

Soit $\underline{B} = \frac{B_0}{\pi}\left[\exp\left(j\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\left[\underbrace{1+\exp\left(-j\frac{4\pi}{3}\right)+\exp\left(-j\frac{8\pi}{3}\right)}_{0}\right]+3\exp\left(-j\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right]$

D'où $\underline{B} = \frac{3B_0}{\pi}\exp\left(-j\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$.

Avec les notations réelles, il vient :

$$B = \left(\frac{3B_0}{\pi}\right)\cos\left(\omega_0 t-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \text{ donc } \boxed{B_m = \frac{3B_0}{\pi}}$$

Copyrighted material

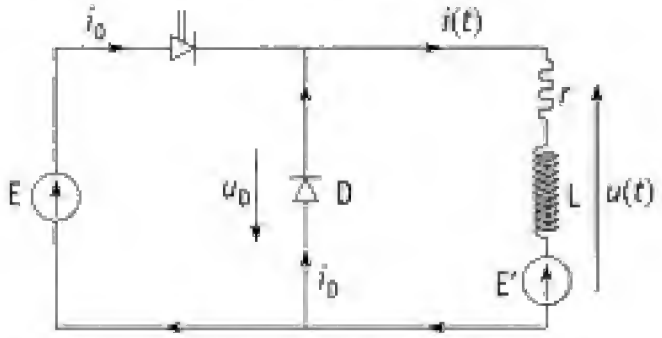
chapitre

3

Conversion électronique

301 Moteur à courant continu alimenté par hacheur série

On modélise un moteur à courant continu par l'association en série d'une source de tension de f.é.m. constante $E' > 0$, d'un résistor de résistance r et d'une bobine parfaite de coefficient d'auto-induction L. Ce moteur est alimenté par une source de tension de f.é.m. $E > E'$ par l'intermédiaire d'un hacheur série utilisant deux interrupteurs que l'on considère comme parfaits :



Le hacheur possède un fonctionnement périodique de période T. L'interrupteur commandé est fermé pour $t \in]0, \alpha T[$ et ouvert pour $t \in]\alpha T, T[$; α représente le rapport cyclique (compris entre 0 et 1). Dans toute la suite, on supposera le régime périodique établi.

1. Préciser qualitativement dans quelle mesure il est légitime de considérer une source de tension de f.é.m. constante dans le schéma équivalent du moteur.

2. On suppose que le moteur fonctionne en régime de conduction continue, c'est-à-dire que l'intensité $i(t)$ du courant dans le moteur ne s'annule pas : $\forall t \in [0, T]$, $i(t) > 0$.

a. Déterminer l'expression de la valeur moyenne $U = \langle u \rangle$ de la tension $u(t)$ aux bornes du moteur.

b. Déterminer la valeur moyenne $I = \langle i \rangle$ de l'intensité du courant dans le moteur $i(t)$ en fonction de α, r, E et E'.

c. Représenter l'allure des variations de l'intensité $i(t)$ au cours du temps sans chercher à expliciter les constantes d'intégration intervenant dans l'expression de $i(t)$.

d. On suppose $T \ll \frac{L}{r}$. Représenter alors l'allure des variations temporelles de l'intensité $i(t)$ et déterminer l'expression approchée de l'ondulation de courant $\Delta i = i_{max} - i_{min}$.

e. Toujours dans le cas $T \ll \frac{L}{r}$, déterminer directement la puissance moyenne fournie par la source de f.é.m. E et la puissance moyenne reçue par le moteur.

f. Comment concrètement se place-t-on dans le cas $T \ll \frac{L}{r}$?

3. On suppose maintenant que le moteur fonctionne en régime de conduction discontinue (l'intensité du courant s'annule).

Copyrighted material

Hidden page

2. a. Pour $t \in]0, \alpha T[$, la tension $u(t)$ reste égale à E, l'interrupteur commandé étant fermé et considéré comme parfait. Pour $t \in]\alpha T, T[$, la tension $u(t)$ reste égale à zéro dans la mesure où la diode est passante ($i_D = i > 0$) et considérée comme parfaite.

La valeur moyenne de la tension $u(t)$ est alors :

$$\boxed{U = \langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = \alpha E}$$

2. b. La relation entre $i(t)$ et $u(t)$ est donnée par la loi des mailles $u(t) = E' + ri(t) + L\dfrac{di}{dt}$.

En faisant la moyenne sur $[0, T]$, il vient : $U = rI + L\left\langle\dfrac{di}{dt}\right\rangle + E'$,

$$\left\langle\frac{di}{dt}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{di}{dt}dt = \frac{1}{T}(i(T) - i(0)) = 0 \text{ en régime périodique établi.}$$

On en déduit : $U = \alpha E = rI + E'$.

Le résultat cherché est donc : $\boxed{I = \dfrac{\alpha E - E'}{r}}$

(Ce résultat impose obligatoirement $\alpha E > E'$ car $I > 0$: en effet $i(t) > 0$.)

POINT MÉTHODE

Il est important de noter qu'il a été possible de calculer de façon relativement aisée la moyenne I sans chercher à expliciter l'expression de $i(t)$. Il serait bien entendu possible d'établir l'expression de $i(t)$ en intégrant par rapport au temps l'équation des mailles et ensuite d'en prendre la moyenne, mais cette façon de procéder serait excessivement laborieuse.

2. c. Entre 0 et αT, l'équation des mailles s'écrit : $E = E' + ri + L\dfrac{di}{dt}$, d'où

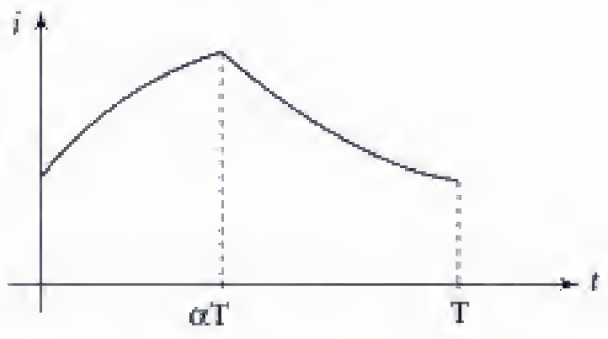
$$i(t) = \frac{E - E'}{r} + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{L}{r}.$$

Entre αT et T, l'équation des mailles s'écrit (car $i > 0$) : $0 = E' + ri + L\dfrac{di}{dt}$, d'où

$$i(t) = -\frac{E'}{r} + B\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{(avec } B > 0 \text{ car } i > 0\text{)}.$$

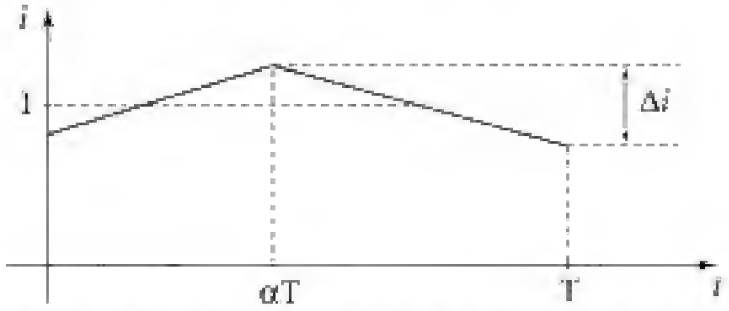
Pour $t \in [\alpha T, T]$, $i(t)$ est une fonction décroissante du temps car $B > 0$.

Comme le régime périodique est établi, $i(t)$ est obligatoirement une fonction croissante du temps pour $t \in]0, \alpha T[$ (donc $A < 0$). On peut alors représenter l'allure des variations temporelles de l'intensité :



Copyrighted material

2. d. Si $\tau \gg T$, alors le terme $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ varie peu dans les deux intervalles de temps. La courbe $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ peut être assimilée dans l'intervalle $[0, T]$ à sa tangente. En conséquence, $i(t)$ peut être considérée dans chacun des deux intervalles comme une fonction affine du temps variant peu autour de la valeur moyenne I :



Pour accéder à l'ondulation de courant, on peut, par exemple, considérer la moyenne de l'équation des mailles sur l'intervalle $[0, \alpha T]$:

$$E = E' + r\langle i\rangle_{[0,\alpha T]} + L\frac{1}{\alpha T}(i(\alpha T) - i(0)).$$

Comme $i(t)$ est sensiblement une fonction affine du temps sur $[0, \alpha T]$, la moyenne de $i(t)$ sur cet intervalle est égale à la valeur de $i(t)$ en $\frac{\alpha T}{2}$, soit I. En conséquence :

$$E = E' + rI + L\frac{\Delta i}{\alpha T}.$$

En remplaçant I par l'expression vue précédemment, il vient : $\boxed{\Delta i = \alpha(1-\alpha)\frac{ET}{L}}$

Commentaire

L'ondulation est d'autant plus faible que la période de hachage est plus faible (fréquence élevée) et que le coefficient d'auto-induction est plus important : on utilise souvent une « self de lissage » qui, mise en série avec l'induit du moteur, permet d'augmenter la valeur de L.

2. e. La puissance fournie par la source de f.é.m. E est Ei_0. La puissance moyenne fournie par cette source est donc $E\langle i_0\rangle$.

L'intensité i_0 est égale à $i(t)$ pour $t \in]0, \alpha T[$ et est nulle pour $t \in]\alpha T, T[$. Donc

$$\langle i_0\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i_0(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} i(t)dt = \alpha\langle i\rangle_{[0,\alpha T]}.$$

On a vu précédemment que $\langle i\rangle_{[0,\alpha T]} = I$ et donc la puissance moyenne fournie par la source est :

$$\boxed{\alpha EI}$$

La puissance reçue par le moteur est ui. La puissance moyenne est donc :

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} Ei(t)dt \text{ car entre } \alpha T \text{ et } T,\ u(t) = 0.$$

Copyrighted material

Cette puissance moyenne est donc : $\frac{E}{T}\int_0^{\alpha T} i(t)\,dt = \alpha E\,\langle i\rangle_{[0,\alpha T]} = \boxed{\alpha E I}$

On a bien entendu égalité des deux puissances moyennes (absence de pertes).

2. f. On cherche souvent à se placer dans ce cas où le moteur présente un comportement que l'on peut qualifier de « source de courant ». Pour assurer l'inégalité $T \ll \frac{L}{r}$, on peut diminuer T en augmentant la fréquence de hachage : ici, on est limité par les performances des semi-conducteurs qui constituent les interrupteurs (mais on peut monter au maximum jusqu'à quelques dizaines de kHz). On peut aussi augmenter L en mettant en série une « self de lissage ».

3. On étudie ici le cas où le moteur fonctionne en régime de conduction discontinue.

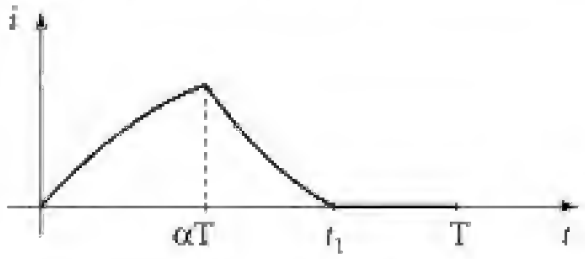
3. a. Les expressions générales vues précédemment restent partiellement valables :

Pour $t \in]0, \alpha T[$, $u(t) = E$ et donc $i(t)$ est du type $\frac{E-E'}{r} + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ (avec $i(0) = i(T) = 0$, cette fois).

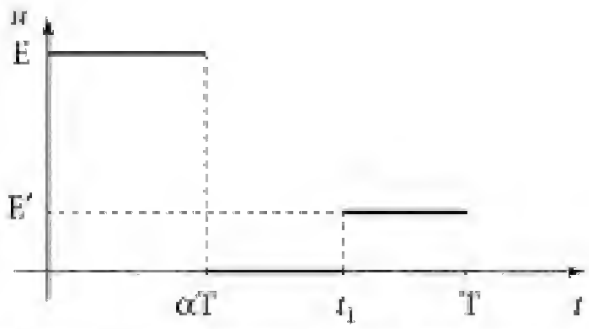
Pour $t \in]\alpha T, t_1[$, $u(t) = 0$ et donc $i(t)$ est du type $-\frac{E'}{r} + B\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ (avec $B > 0$ car $i > 0$).

Par contre, pour $t \in [t_1, T]$, l'intensité du courant reste nulle car la diode est bloquée ($u_D = -E' < 0$).

Les variations temporelles de l'intensité sont alors les suivantes :



3. b. Comme on l'a vu précédemment, la tension $u(t)$ vaut successivement E, 0 et E' (lorsque $i = 0$) :



3. c. La résistance de l'induit est maintenant considérée comme nulle.

Entre 0 et αT, la loi des mailles s'écrit $E = E' + L\frac{di}{dt}$, d'où $\frac{di}{dt} = \frac{E-E'}{L} > 0$.

Entre αT et t_1, l'intensité est positive, la diode est passante et la loi des mailles s'écrit alors $0 = E' + L\frac{di}{dt}$ d'où $\frac{di}{dt} = -\frac{E'}{L}$.

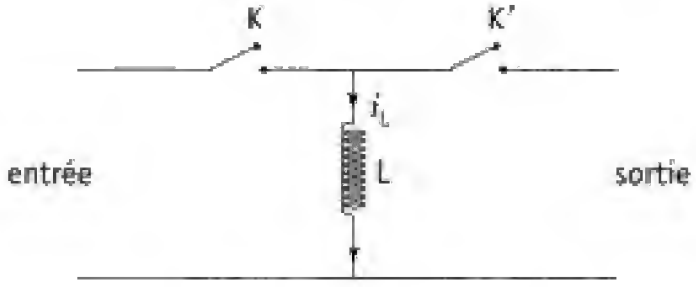
Copyrighted material

Hidden page

302 Hacheur indirect à stockage inductif

On fait ici l'étude d'un convertisseur continu-continu (hacheur) permettant un transfert contrôlé de puissance d'une source de tension de f.é.m. E = 100 V (source d'entrée) vers une autre source de tension de f.é.m. E' = 3E (source de sortie).

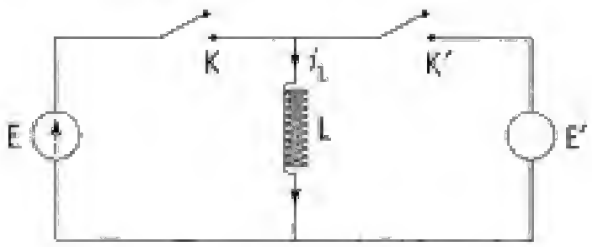
Ce hacheur est constitué d'une bobine supposée parfaite (coefficient d'auto-induction L) et de deux interrupteurs K et K' que l'on considérera également comme parfaits :



Le fonctionnement des interrupteurs est périodique de période T ($f = \frac{1}{T} = 1$ kHz). L'interrupteur K est fermé pour $t \in]0, \alpha T[$ et ouvert pour $t \in]\alpha T, T[$; c'est l'inverse pour l'interrupteur K' ($0 < \alpha < 1$).

Dans toute la suite, on supposera que l'intensité du courant dans la bobine reste positive ou nulle $i_L(t) \geq 0$ et que le régime périodique est établi. On notera $I_L = \langle i_L \rangle$ la valeur moyenne de l'intensité du courant dans la bobine.

1. Le schéma complet du montage est le suivant :



Préciser alors le sens de branchement de la source de sortie pour que le transfert de puissance s'effectue dans le sens voulu.

2. On suppose dans cette question que l'intensité du courant dans la bobine reste strictement positive tout au long de la période.

a. Étudier l'évolution temporelle de $i_L(t)$ au cours d'une période et préciser la valeur nécessaire α_0 du rapport cyclique pour que le régime soit périodique. Représenter, en supposant connue la valeur moyenne I_L, l'évolution temporelle de l'intensité $i_L(t)$.

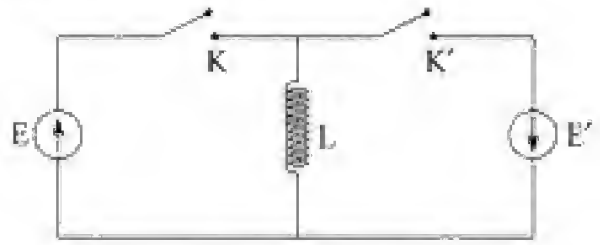
b. La puissance moyenne transférée de la source d'entrée vers la source de sortie devant être égale à 1 kW, préciser la valeur numérique de I_L.

c. On désire également que l'ondulation de courant $\Delta i_L = i_{max} - i_{min}$ ne dépasse pas 5 % de la valeur moyenne I_L. Préciser la valeur minimale à prévoir pour L et indiquer le qualificatif que l'on peut alors donner à la bobine.

Copyrighted material

Hidden page

La source de sortie devant alors fonctionner en récepteur, il est nécessaire que la tension aux bornes soit dans le sens indiqué ci-dessous :



La puissance instantanée reçue par la source de sortie est alors $E' i_L \geqslant 0$: la source de sortie reçoit de l'énergie.

2. L'intensité dans la bobine est toujours strictement positive.

2. a. Entre 0 et αT, la loi des mailles s'écrit $E = L\dfrac{di_L}{dt}$ donc $\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{E}{L}$: $i_L(t)$ est une fonction affine croissante de t.

Entre αT et T, la loi s'écrit $-E' = L\dfrac{di_L}{dt}$: $i_L(t)$ est une fonction affine décroissante de t.

En cas de régime périodique établi, $i_L(0) = i_L(T)$, ce qui signifie que la variation de i_L entre 0 et αT est l'opposée de la variation de i_L entre αT et T, d'où :

$$\frac{E}{L}\alpha T = -\frac{-E'}{L}(T - \alpha T),$$

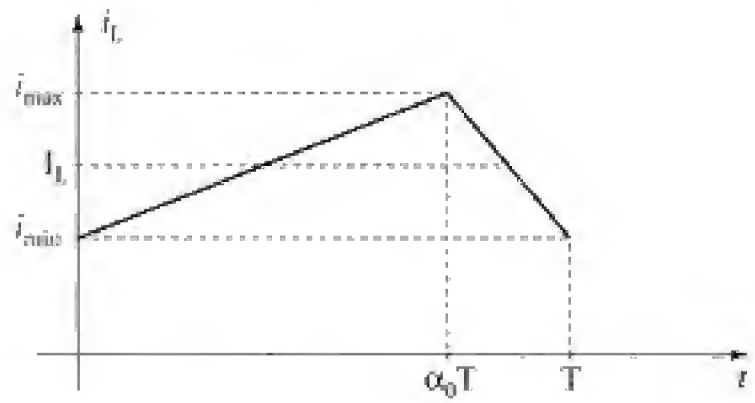
et donc

$$\alpha E = (1 - \alpha)E',$$

d'où

$$\boxed{\alpha = \alpha_0 = \frac{E'}{E + E'} = 0{,}7}$$

On peut alors représenter l'évolution temporelle de $i_L(t)$:



2. b. Pour accéder à la puissance moyenne transférée, on peut chercher soit la puissance moyenne reçue par la source de sortie soit la puissance moyenne fournie par la source d'entrée.

Copyrighted material

La puissance reçue par la source de sortie est nulle entre 0 et αT, et égale à $E' i_L$ entre αT et T. Sa valeur moyenne est donc :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha T}^{T} E' i_L(t)\,dt = (1-\alpha)E'\langle i_L\rangle_{[\alpha T,\,T]}$$

La moyenne de la fonction $i_L(t)$ sur l'intervalle $[\alpha T, T]$ se confond avec la demi somme des valeurs extrêmes de i_L (car sur cet intervalle de temps, la fonction est affine). Cette moyenne est donc égale à la moyenne I_L et la puissance moyenne cherchée devient :

$$P = (1-\alpha)E' I_L.$$

On aurait pu aussi chercher la puissance fournie par la source d'entrée : elle est égale à Ei_L entre 0 et αT et à zéro entre αT et T. La valeur moyenne est alors :

$$P = \frac{1}{T}\int_{0}^{\alpha T} E i_L(t)\,dt = \alpha E\langle i_L\rangle_{[0,\,\alpha T]} = \alpha E I_L.$$

Comme on l'a vu précédemment, $(1-\alpha)E' = \alpha E$ et donc les deux puissances moyennes sont bien égales (la bobine garde la même énergie en début et en fin de période, donc l'énergie totale fournie par la source d'entrée se retrouve globalement reçue par la source de sortie).

On en déduit :

$$\boxed{I_L = \frac{P}{\alpha E} = 13{,}3\ \text{A}}$$

2. c. L'ondulation de courant est $\Delta i_L = \left(\frac{E}{L}\right)(\alpha T)$. La condition de faible ondulation s'écrit donc :

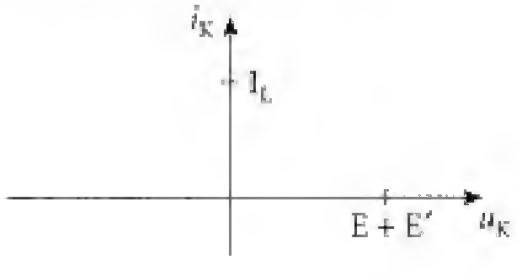
$$\frac{E\alpha T}{L} < \left(\frac{5}{100}\right)\left(\frac{P}{\alpha E}\right).$$

D'où

$$\boxed{L > 20\alpha^2\frac{E^2}{fP} = 112\ \text{mH}}$$

On peut alors qualifier la bobine de source de courant dans le langage de l'électronique de puissance.

2. d. Entre 0 et αT, $u_K = 0$ et $i_K \approx i_L$, proche de I_L. Entre αT et T, $i_K = 0$ et $u_K = E' + E$. D'où les deux points de fonctionnement :



Copyright matériel

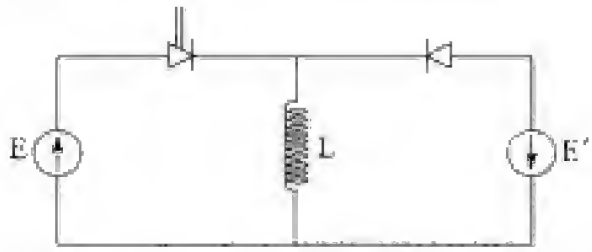
On choisit donc pour K un interrupteur commandé.

En effet, les deux points de fonctionnement se trouvent dans le même quadrant (en l'occurence, le premier).

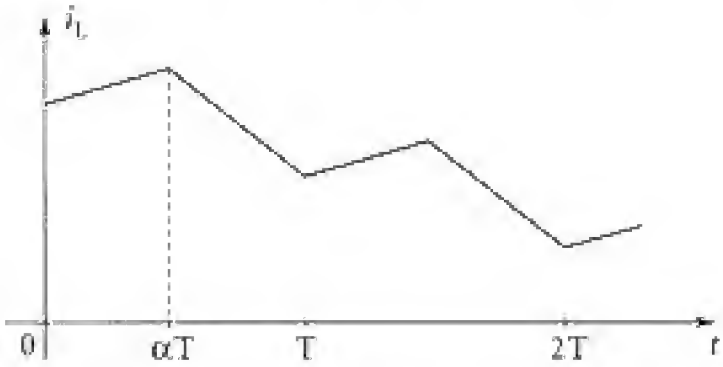
On s'intéresse maintenant à l'interrupteur K'. Entre 0 et αT, $i_{K'} = 0$ et $u_{K'} = -(E + E')$; entre αT et T, $i_{K'} = i_L$ proche de I_L et $u_{K'} = 0$. On peut alors représenter les points de fonctionnement.

Ici, un point de fonctionnement se trouve dans le premier quadrant et l'autre dans le troisième quadrant (les points de fonctionnement d'un dipôle non générateur ne pouvant se trouver que dans le premier ou le troisième quadrant). Pour K', on choisit donc une diode.

Le montage est alors le suivant :

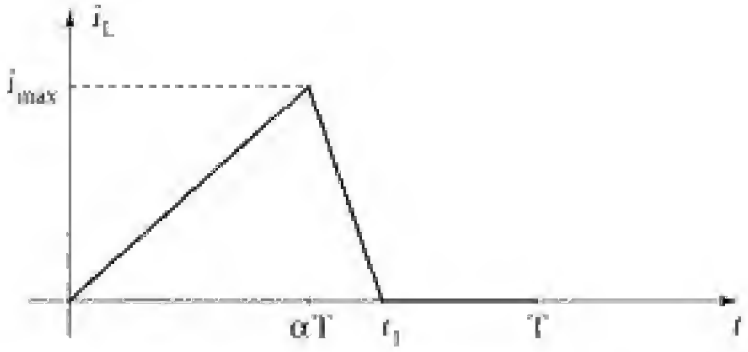


3. Le rapport cyclique n'a plus la valeur particulière α_0. Comme $\alpha < \alpha_0$, l'augmentation de $i_L(t)$ entre 0 et αT est plus petite que la valeur absolue de la diminution que l'on observerait entre αT et T si l'intensité i_L restait strictement positive. On aurait alors, en régime non périodique, une évolution temporelle du type :



3. a. L'évolution précédente mène à un régime périodique au cours duquel l'intensité i_L s'annule pour $t_1 \in]\alpha T, T[$. Entre t_1 et T, la présence de la diode empêche le changement de signe de i_L, cette intensité reste donc égale à zéro. L'évolution temporelle en régime périodique établi est alors :

Copyrighted material



On peut déterminer t_1 en se servant de la pente entre 0 et αT :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{i_{max}}{\alpha T} = \frac{E}{L},$$

puis de la pente entre αT et t_1 :

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{i_{max}}{t_1 - \alpha T} = -\frac{E'}{L}.$$

On élimine alors i_{max} entre les deux équations précédentes :

D'où $$\frac{E\alpha T}{L} = \frac{E'(t_1 - \alpha T)}{L}$$

et donc $$t_1 = \alpha T + \frac{E\alpha T}{E'} = \alpha T\left(1 + \frac{E}{E'}\right).$$

3. b. Pour obtenir la puissance moyenne transférée, on peut calculer la puissance moyenne reçue par la source de sortie ou la puissance moyenne fournie par la source d'entrée.

La puissance reçue par la source de sortie est nulle entre 0 et αT et entre t_1 et T. Entre αT et t_1, elle vaut $E'i_L$. La puissance moyenne reçue a donc pour expression :

$$P = \frac{1}{T}\int_{\alpha T}^{t_1} E'i_L(t)dt.$$

La valeur moyenne de i_L sur l'intervalle $[\alpha T, t_1]$ est égale à $\frac{i_{max}}{2}$ car $i_L(t)$ est une fonction affine. Donc

$P = \frac{E'(t_1 - \alpha T)i_{max}}{2T} = \frac{E\alpha i_{max}}{2}$ (d'après l'expression de t_1 déjà vue).

En remplaçant i_{max} par son expression, on en déduit :

$$\boxed{P = \frac{(\alpha E)^2}{2Lf} = 125\ W}$$

On peut aussi étudier la puissance d'entrée qui est non nulle entre 0 et αT et vaut alors Ei_L. La valeur moyenne est :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} Ei_L(t)dt = \alpha E\langle i_L\rangle_{[0,\alpha T]}.$$

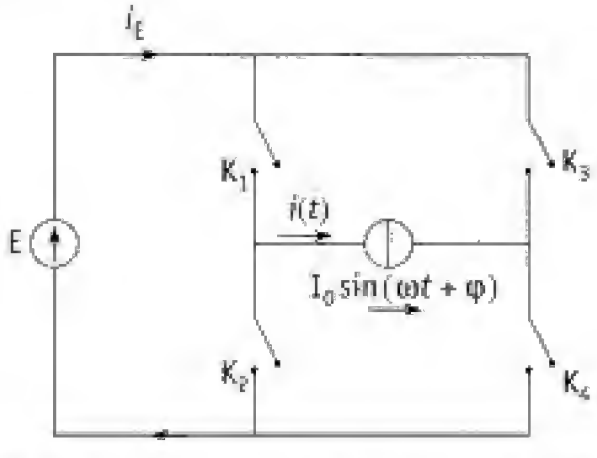
Copyright material

La moyenne de i_L sur l'intervalle $[0, \alpha T]$ peut s'écrire $\langle i_L \rangle_{[0,\alpha T]} = \frac{i_{max}}{2}$, donc on retrouve

$$P = \frac{\alpha E i_{max}}{2}.$$

303 Étude d'un onduleur

Un onduleur est un convertisseur continu-alternatif. La source d'entrée de l'onduleur étudié ici est une source de tension de f.é.m. E = 200 V et la source de sortie est assimilée, dans un premier temps, à une source de courant sinusoïdal de courant électromoteur $I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Le convertisseur lui-même est réalisé comme l'indique le schéma ci-dessous avec quatre interrupteurs K_1, K_2, K_3 et K_4 que l'on considère comme parfaits.



Le fonctionnement de ces interrupteurs est périodique (période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, fréquence f = 1 000 Hz). Pour $t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[$, K_1 et K_4 sont fermés, K_2 et K_3 sont ouverts ; pour $t \in \left]\frac{T}{2}, T\right[$, c'est l'inverse.

1. Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes de la source de sortie. On rappelle que le développement en série de Fourier d'une telle tension peut s'écrire :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \cdots\right).$$

2. En réalité, la source de sortie étudiée ici est une charge résonante. Il s'agit d'un four à induction que l'on peut modéliser par l'association en série d'un résistor de résistance R = 0,02 Ω, d'une bobine de coefficient d'auto-induction $L = 7 \cdot 10^{-5}$ H et

Copyrighted material

d'un condensateur de capacité $C = 5 \cdot 10^{-4}$ F. En régime périodique établi, l'intensité du courant dans cette charge peut s'écrire sous la forme :

$$I_0 \sin(\omega t + \varphi) + I_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + I_5 \sin(5\omega t + \varphi_5) + \cdots$$

Déterminer les valeurs numériques de I_0, I_3 et I_5, et préciser les valeurs de φ, φ_3 et φ_5. Dans toute la suite, on considérera que l'intensité du courant dans la charge se réduit au premier terme.

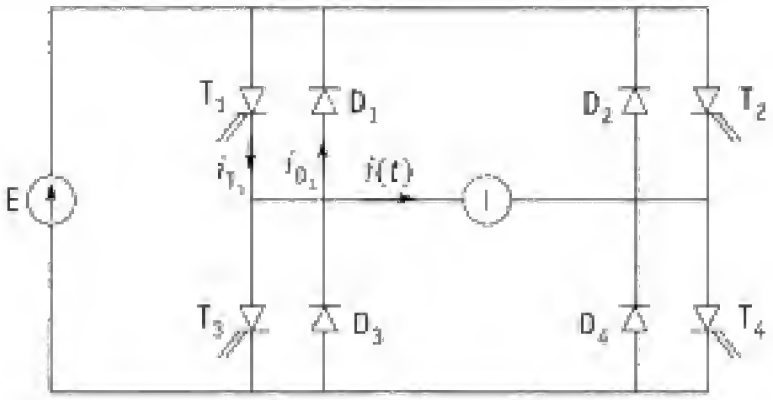
3. Déterminer l'intensité $i_E(t)$ du courant débité par la source d'entrée. Faire la représentation graphique et calculer la valeur moyenne de cette intensité.

4. Déterminer alors la puissance moyenne fournie par la source d'entrée. Retrouver ce résultat en calculant directement la puissance moyenne reçue par le four.

5. Pour finir, on s'intéresse à la nature des interrupteurs.

a. Ces interrupteurs peuvent-ils être unidirectionnels en courant ?

b. On considère que chacun des interrupteurs est constitué par l'association en antiparallèle d'un thyristor (interrupteur commandé unidirectionnel en courant) et d'une diode.

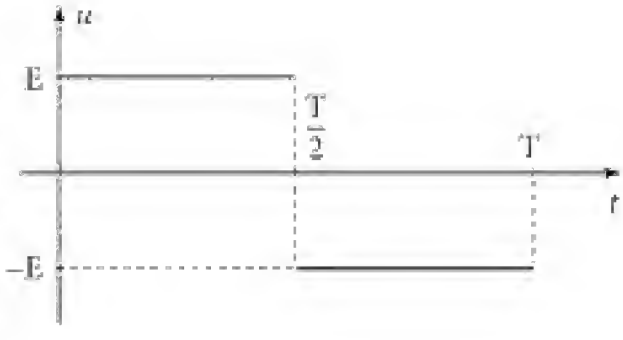


On étudie l'interrupteur K_1 : déterminer les expressions de l'intensité du courant $i_{T_1}(t)$ dans la branche contenant le thyristor T_1 et de l'intensité $i_{D_1}(t)$ dans la branche contenant la diode D_1.

c. Déterminer la valeur moyenne de ces deux intensités.

Solution

1. Pour $t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[$, $u(t) = E$ car K_1 et K_4 sont fermés et pour $t \in \left]\frac{T}{2}, T\right[$, $u(t) = -E$ car K_2 et K_3 sont fermés.



2. La relation entre $u(t)$ et $i(t)$ se traduisant par une équation différentielle linéaire, l'intensité $i(t)$ peut s'écrire comme la somme des

Copyright du matériel

réponses partielles, en régime établi, aux différentes composantes de la tension $u(t)$. On peut commencer par étudier la réponse $i_1(t)$ en régime établi à la première composante $u_1(t) = \left(\frac{4E}{\pi}\right)\sin(\omega t)$ de la tension $u(t)$. Comme les grandeurs sont sinusoïdales, on peut utiliser la notation complexe :

$$\underline{u_1} = \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\underline{i_1} \quad (\text{avec } j^2 = -1).$$

D'où $i_1(t) = \frac{4E}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}\sin(\omega t - \varphi)$ avec $\varphi = \arg\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]$.

On en déduit

$$\boxed{I_0 = \frac{4E}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 2{,}1 \cdot 10^3 \text{ A et } \varphi = 1{,}4 \text{ rad}}$$

On détermine de façon analogue le second terme de $i(t)$ qui est la réponse en courant à la seconde composante $\left(\frac{4E}{3\pi}\right)\sin(3\omega t)$ de $u(t)$:

$$i_3(t) = \frac{4E}{3\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(3L\omega - \frac{1}{3C\omega}\right)^2}}\sin(3\omega t - \varphi_3) \text{ avec } \varphi_3 = \arg\left[R + j\left(3L\omega - \frac{1}{3C\omega}\right)\right].$$

On en déduit

$$\boxed{I_3 = \frac{4E}{3\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(3L\omega - \frac{1}{3C\omega}\right)^2}} = 70 \text{ A et } \varphi_3 \approx \frac{\pi}{2}}$$

La troisième composante est alors

$$i_5(t) = \frac{4E}{5\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(5L\omega - \frac{1}{5C\omega}\right)^2}}\sin(5\omega t - \varphi_5) \text{ avec } \varphi_5 = \arg\left[R + j\left(5L\omega - \frac{1}{5C\omega}\right)\right].$$

On en déduit

$$\boxed{I_5 = 24 \text{ A et } \varphi_5 = \frac{\pi}{2}}$$

3. Entre 0 et $\frac{T}{2}$, $i_E = i = I_0\sin(\omega t + \varphi)$ et, entre $\frac{T}{2}$ et T, $i_E = -i = -I_0\sin(\omega t + \varphi)$. On en déduit la représentation graphique :

Copyrighted material

Hidden page

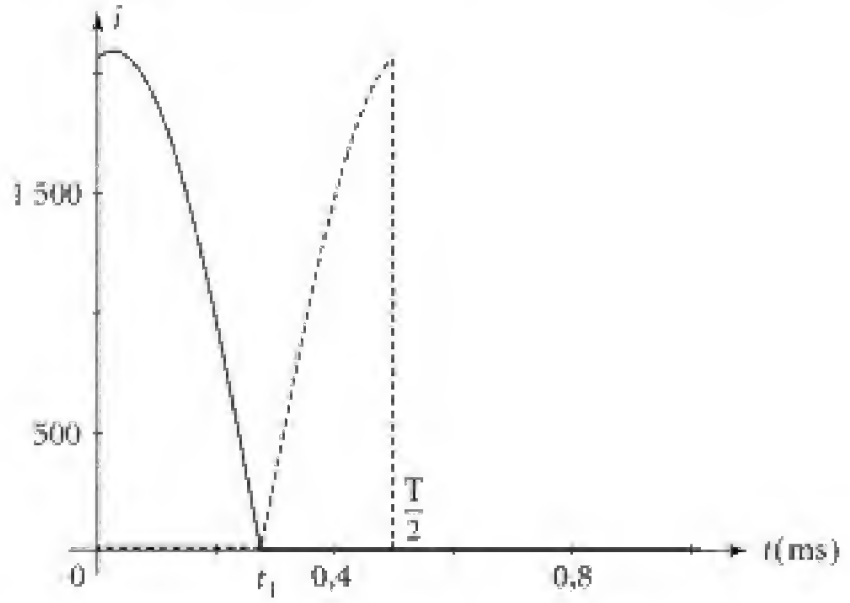
Les intensités sont donc :

$$\text{Pour } t \in]0, t_1[,\ i_{T_1} = i(t) > 0 \text{ et } i_{D_1} = 0 \text{ (car } u_{D_1} = 0^-).$$

$$\text{Pour } t \in \left]t_1, \frac{T}{2}\right[,\ i_{T_1} = 0 \text{ et } i_{D_1} = -i(t) > 0.$$

$$\text{Pour } t \in \left]\frac{T}{2}, T\right[,\ i_{D_1} = i_{T_1} = 0.$$

On peut alors représenter graphiquement l'évolution de ces deux intensités (avec i_{D_1} représentée en pointillés) :



5. c. La valeur moyenne de l'intensité dans la branche contenant le thyristor est :

$$\langle i_{T_1} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i_{T_1}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{t_1} I_0 \sin(\omega t + \varphi)\,dt.$$

Donc

$$\langle i_{T_1} \rangle = \left(\frac{I_0}{\omega T}\right)\left[-\cos(\omega t_1 + \varphi) + \cos(\varphi)\right]$$

$$\boxed{\langle i_{T_1} \rangle = \frac{I_0}{2\pi}(1 + \cos\varphi) = 3{,}8 \cdot 10^2 \text{ A}}$$

De façon analogue, l'intensité moyenne dans la branche contenant la diode s'écrit :

$$\langle i_{D_1} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i_{D_1}\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{\frac{T}{2}} -I_0 \sin(\omega t + \varphi)\,dt.$$

D'où

$$\langle i_{D_1} \rangle = \left(\frac{I_0}{\omega T}\right)\left[\cos(\pi + \varphi) - (-1)\right]$$

$$\boxed{\langle i_{D_1} \rangle = \frac{I_0}{2\pi}(1 - \cos\varphi) = 2{,}8 \cdot 10^2 \text{ A}}$$

Copyrighted material

Partie

7

Électronique des signaux et des systèmes

Copyrighted material

chapitre

1

Électronique des systèmes linéaires

101 Diagramme asymptotique

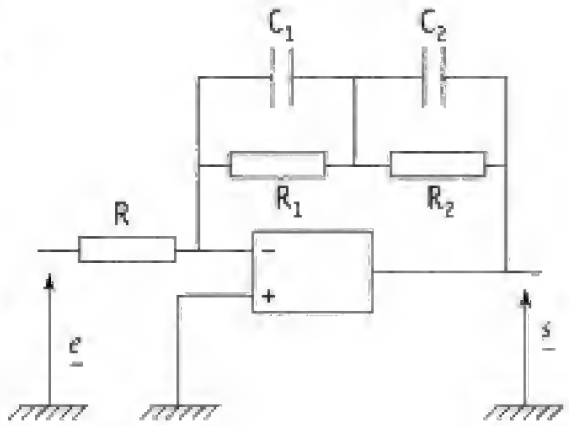
On suppose que le système fonctionne en régime linéaire sinusoïdal. On enregistre le diagramme de Bode donnant :

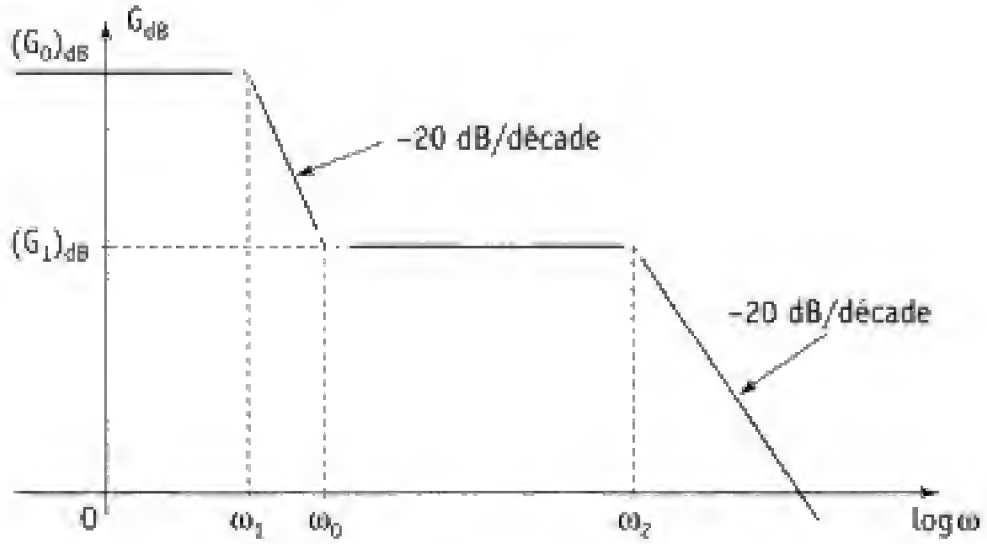
$$G_{dB} = 20\log\left|\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right|$$

en fonction de $\log\omega$.

Les grandes lignes de ce diagramme sont données sur la figure ci-dessous (toutes les pulsations ω_i sont exprimées en s^{-1}).

Commenter. L'A.O. est idéal.





A.N. : $R_1 = 100\ k\Omega$; $R_2 = 10\ k\Omega$; $R = 1\ k\Omega$; $C_1 = 100\ nF$ et $C_2 = 10\ nF$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Fonction de transfert ($\underline{H}(j\omega)$ et $H(p)$).
- Représentation de Bode (notamment diagramme $\log\omega \rightarrow G_{dB}$).
- Comportement basses et hautes fréquences.

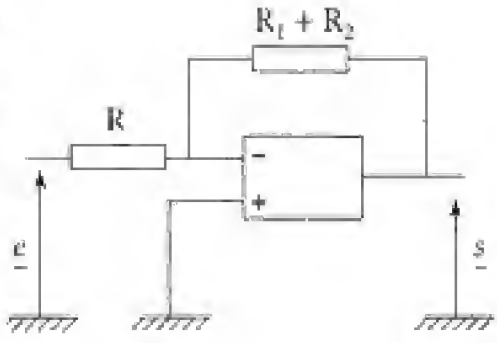
2. Ce qu'il faut comprendre

Le diagramme fourni dans l'énoncé correspond en fait aux tracés asymptotiques liés à la représentation de Bode ($G_{dB} = f(\log\omega)$). On étudiera, dans un premier temps, le comportement du montage en basses fréquences (BF) puis en hautes fréquences (HF).

Copyrighted material

3. Solution

■ Étudions les comportements basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) d'un tel circuit :



– BF : à la limite, les condensateurs sont équivalents à des coupe-circuit, et le montage se réduit alors à un simple **montage inverseur** de gain :

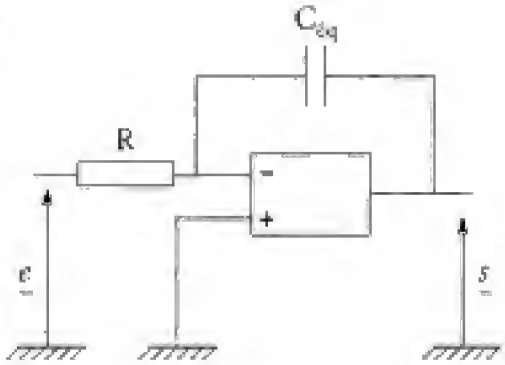
$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{R_1 + R_2}{R}.$$

Nous devons donc avoir :

$$\boxed{(G_0)_{dB} = 20\log\frac{R_1 + R_2}{R}}$$

– HF : les condensateurs deviennent équivalents, à la limite, à des fils et donc $\underline{s} = 0$ en régime linéaire.

Nous en déduisons que $\lim_{\omega \to +\infty} |\underline{H}| = 0$.



D'une façon plus précise, et pour ω suffisamment grand, le rôle des capacités C_1 et C_2 devient prépondérant devant celui des résistances R_1 et R_2. Le montage joue alors le rôle d'un intégrateur lié à la capacité $\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = C$ (C_1 série C_2). D'où :

$$C_{éq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\underline{H} \sim -\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

soit $\underline{H} \sim -\dfrac{1}{jR\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\omega}$

et $G_{dB} \sim -20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0'}\right)$ avec $\omega_0' = \dfrac{1}{R\left(\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)}$.

Le diagramme asymptotique donnant G_{dB} en fonction de $\log\omega$ est alors associé à une droite de pente –20 dB par décade.

■ Déterminons maintenant la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

Copyrighted material

Hidden page

Ainsi pour $R_1 = 100\,k\Omega$, $C_1 = 100\,nF$, $R_2 = 10\,k\Omega$ et $C_2 = 10\,nF$ (valeurs numériques données en fin d'énoncé), on aurait :

$$\omega_1 = 100\ s^{-1},\ \omega_0 = 10^3\ s^{-1},\ \omega_2 = 10^4\ s^{-1}.$$

Réécrivons la fonction de transfert sous la forme : $\underline{H} = H_0\underline{H}_{(1)}\underline{H}_{(2)}\underline{H}_{(3)}$

avec $\underline{H}_{(1)} = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$, $\underline{H}_{(2)} = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$ et $\underline{H}_{(3)} = 1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}$.

■ **Analyse qualitative :**

• $\omega \ll \omega_1$: $\underline{H}_{(1)} \sim 1$; $\underline{H}_{(2)} \sim 1$; $\underline{H}_{(3)} \sim 1$ et $\underline{H} \sim H_0$

et $G_{dB})_{asymptotique} = 20\log|H_0| = 20\log\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\right)$.

• $\omega \ll \omega_0$ (et pas nécessairement petit devant ω_1) :

$$\underline{H}_{(3)} \sim 1 ;\quad \underline{H}_{(2)} \sim 1 \quad \text{et} \quad \underline{H} \sim \frac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$$

soit pour $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_0$, $\underline{H}_{(2)} \sim 1$; $\underline{H}_{(1)} \sim -j\dfrac{\omega_1}{\omega}$ et $\underline{H}_{(3)} \sim 1$.

D'où $\underline{H} \sim -jH_0\dfrac{\omega_1}{\omega}$ et $(G_{dB})_{asymptotique} \sim 20\log|H_0| - 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)$. Il s'agit d'une droite de pente –20 dB par décade.

• $\omega_0 \ll \omega \ll \omega_2$: $\underline{H}_{(1)} \sim -j\dfrac{\omega_1}{\omega}$, $\underline{H}_{(3)} \sim j\dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_{(2)} \sim 1$

d'où $\underline{H} \sim H_0\dfrac{\omega_1}{\omega_0}$ soit $(G_{dB})_{asymptotique} \sim 20\log\left(|H_0|\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\right)$.

On reconnait $(G_1)_{dB} = 20\log\left(\left|H_0\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\right|\right)$

soit $(G_2)_{dB} = 20\log\left(\dfrac{R_1+R_2}{R}\right) + \underbrace{20\log\left(\dfrac{1+\dfrac{C_2}{C_1}}{1+\dfrac{R_1}{R_2}}\right)}_{<0 \text{ car } \frac{C_2}{C_1} < \frac{R_1}{R_2}} = \boxed{20\log\left[\dfrac{R_2}{R}\left(1+\dfrac{C_2}{C_1}\right)\right] = (G_1)_{dB}}$

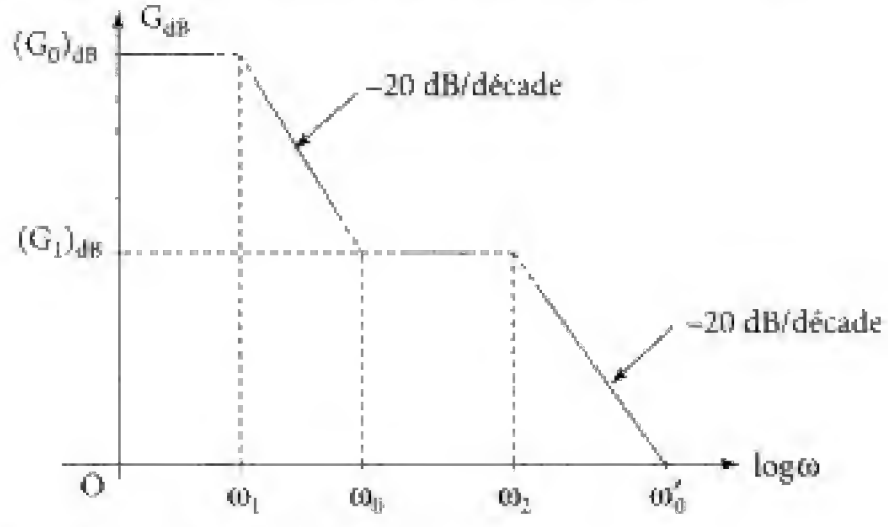
• Et pour $\omega \gg \omega_0$ (sans pour autant que $\omega \ll \omega_2$) : $\underline{H} \sim H_0\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\dfrac{1}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$.

De sorte que, pour $\omega \gg \omega_2$, on obtient :

$$\underline{H} \sim -jH_0\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_0\omega} \quad \text{soit} \quad (G_{dB})_{asymptotique} \sim 20\log\left(|H_0|\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_0}\right) - 20\log\omega.$$

Copyrighted material

Tous ces résultats se retrouvent dans le **diagramme asymptotique** représenté ci-dessous :



La pulsation ω'_0 est définie pour $\omega'_0 \gg \omega_2$ par :

$$0 \# 20\log\left(|H_0|\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{\omega_2}{\omega'_0}\right) \quad \left(\underline{H}_{(j)} \sim -j\frac{\omega_2}{\omega}\right) \quad \text{soit} \quad |H_0|\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{\omega_2}{\omega'_0} \# 1.$$

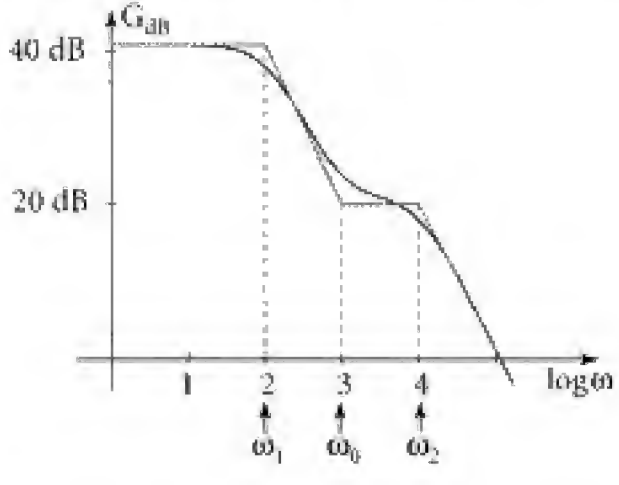
Pour les valeurs de l'énoncé, nous obtenons :

$$\omega_1 = 100\ s^{-1}\ ; \quad \omega_2 = 10^4\ s^{-1}\ ; \quad \omega_0 = 10^3\ s^{-1} \quad \text{et} \quad |H_0| = 110.$$

D'où $\quad (G_0)_{dB} = 20\log|H_0| = 40{,}8\ dB\ ;\ (G_1)_{dB} = 20\log\left(|H_0|\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) = 20{,}8\ dB$

$$\omega'_0 \# |H_0|\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_0} \# 11 \cdot 10^4\ s^{-1}.$$

Nous donnons à titre de comparaison, et pour les mêmes valeurs des résistances et des capacités, la courbe $G_{dB} = f(\log\omega)$ tracée à l'ordinateur.



Commentaire

On a : $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ avec $d°(N(p)) = 1$ et $d°(D(p)) = 2$. De plus, tous les coefficients de $D(p)$ sont de même signe, ce qui assure ici la stabilité d'un tel montage.

Copyrighted material

Hidden page

De même, dans la branche [R', C] :

$$jC\omega(\underline{V_A} - \underline{V_S}) = \frac{1}{R'}(\underline{V_S} - \underline{V_B}) \Rightarrow jR'C\omega\underline{V_A} + \underline{V_B} = (1 + jC\omega R')\underline{V_S}$$

et $(\underline{V_S} - \underline{V_M}) = \dfrac{1}{1 + jR'C\omega}[jR'C\omega(\underline{V_A} - \underline{V_M}) + (\underline{V_B} - \underline{V_M})]$

soit avec (1) : $\underline{V_S} - \underline{V_M} = \dfrac{-1 + jR'C\omega}{1 + jR'C\omega}\dfrac{E}{2} = \dfrac{-1 + jR'C\omega}{1 + jR'C\omega}(\underline{V_A} - \underline{V_M})$.

Posons $\underline{U} = \underline{V_A} - \underline{V_M}$, $\underline{S} = \underline{V_S} - \underline{V_M}$ et $\tau' = R'C$, d'où :

$$\underline{S} = -\left(\frac{1 - j\tau'\omega}{1 + j\tau'\omega}\right)\underline{U}.$$

On a donc : $\dfrac{\underline{S}}{\underline{U}} = \underline{H}(j\omega)$ avec $\underline{H}(j\omega) = -\left(\dfrac{1 - j\tau'\omega}{1 + j\tau'\omega}\right)$

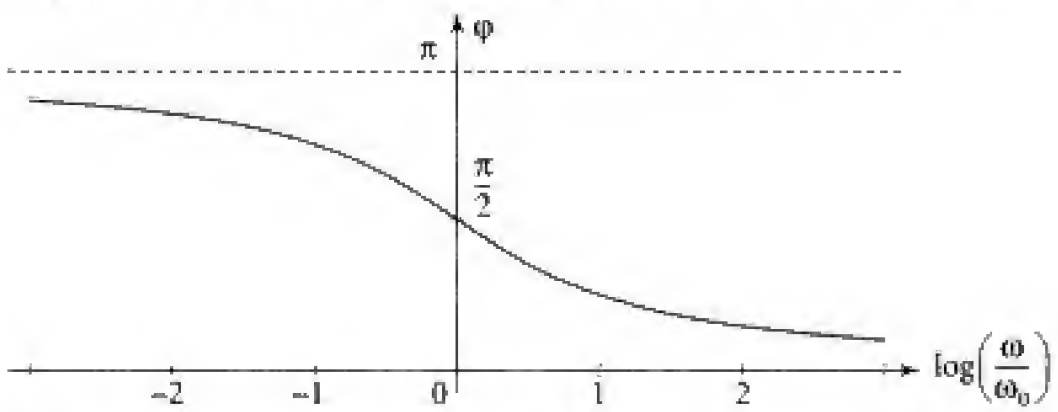
soit encore $\boxed{H(p) = -\dfrac{1 - \tau' p}{1 + \tau' p}}$

Ce montage constitue un passe-tout déphaseur d'ordre un.

Pour trouver le déphasage φ introduit, on peut écrire la fonction de transfert sous la forme $\underline{H} = -\exp(-j2\theta)$ avec $\theta = \arg(1 + j\tau'\omega) = \arctan(\tau'\omega) = \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$,

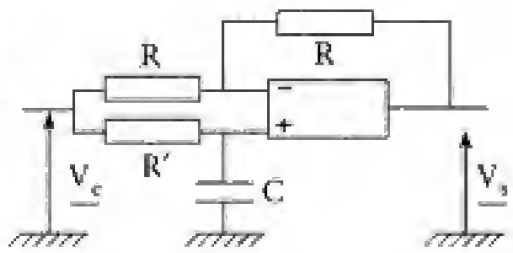
en notant $\omega_0 = \dfrac{1}{\tau'}$.

On obtient alors $\varphi = \arg\underline{H} = \pi - 2\theta$. Comme θ varie de façon monotone de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, φ est une fonction monotone décroissante de ω :



2. Il circule un même courant i dans les deux résistances R (courant d'entrée $i^- = 0$ pour un amplificateur opérationnel parfait). Donc :

$$\frac{\underline{V_e} - \underline{V^-}}{R} = \frac{\underline{V^-} - \underline{V_s}}{R} \quad \text{soit} \quad \underline{V_e} + \underline{V_s} = 2\underline{V^-}.$$



Il en est de même dans R' et C($i_+ = 0$) :

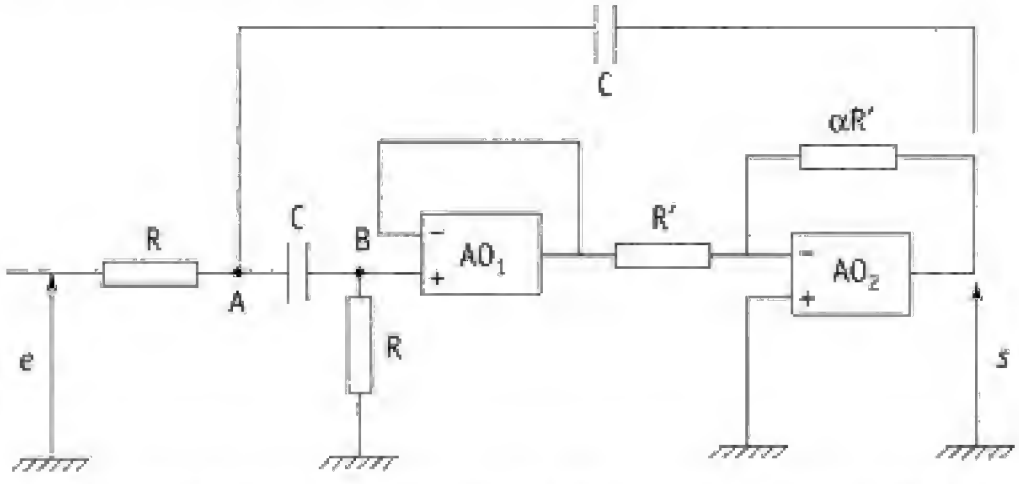
$$\frac{\underline{V_e} - \underline{V^+}}{R'} = \frac{\underline{V^+} - 0}{\dfrac{1}{jC\omega}} \quad \text{soit} \quad \underline{V_e} = (1 + jR'C\omega)\cdot\underline{V^+}.$$

Copyrighted material

Hidden page

103 Filtre passe-bande à deux A.O.

On considère le montage représenté ci-dessous :



Les A.O. sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire. α est un coefficient réel strictement positif.

1. Déterminer, en régime sinusoïdal établi, la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

Vérifier sa compatibilité avec le comportement basse fréquence (BF) puis haute fréquence (HF) du circuit.

2. Tracer les diagrammes de Bode.

1. Ce qu'il faut savoir

- Fonction de transfert complexe.
- Filtres, et en particulier filtre passe-bande d'ordre deux.
- Représentation de Bode (diagrammes de gain et de phase).

2. Ce qu'il faut comprendre

Le système est supposé stable et fonctionne en régime linéaire. À une excitation sinusoïdale $e(t) = E_0\cos\omega t$, correspond une réponse sinusoïdale de régime forcé $s(t) = H(\omega)E_0\cos(\omega t + \varphi(\omega))$. La fonction de transfert complexe est représentée par : $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)\exp(j\varphi(\omega))$.

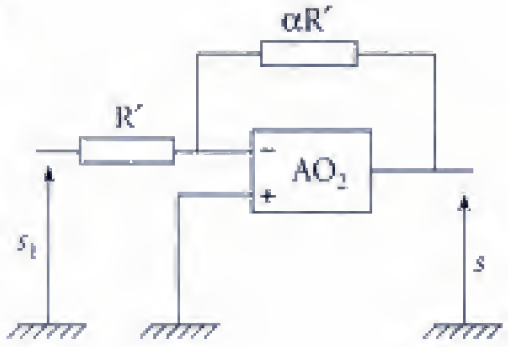
On mettra en évidence le rôle de chaque amplificateur opérationnel (suiveur pour l'AO_1 et montage inverseur pour l'AO_2), et on traduira la loi des nœuds en A et en B.

3. Solution

1. On se place dans le cadre d'un fonctionnement linéaire du système et donc des A.O.

Copyrighted material

■ Le montage représenté sur la figure ci-contre est un inverseur pour lequel :

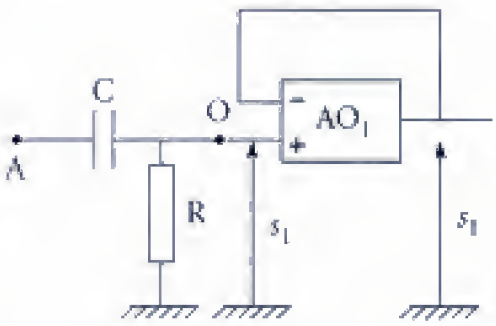


$$\frac{s}{s_1} = -\frac{\alpha R'}{R'} = -\alpha \quad (1)$$

De plus, le premier amplificateur opérationnel est monté en suiveur. On a donc :

$$(v_+)_1 = s_1 .$$

Écrivons que le même courant traverse la capacité C et la résistance R (puisque $i_+ = 0$) :

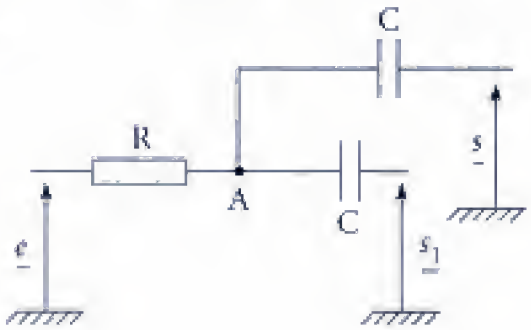


$$jC\omega(\underline{v_A} - \underline{s_1}) = \frac{1}{R}(\underline{s_1} - 0).$$

Soit :

$$jRC\omega \underline{v_A} = s_1(1 + jRC\omega) \quad (2)$$

Il reste à appliquer le théorème de Millman (loi des nœuds) en A :



$$\underline{v_A} = \frac{\frac{1}{R}\underline{e} + jC\omega(s_1 + \underline{s})}{\frac{1}{R} + 2jC\omega}.$$

D'où :

$$\underline{v_A}(1 + 2jRC\omega) = \underline{e} + jRC\omega(\underline{s_1} + \underline{s}) \quad (3)$$

Éliminons $\underline{s_1}$ et $\underline{v_A}$ à l'aide des relations (1), (2) et (3) :

$$\underline{e} + jRC\omega\,\underline{s}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = (1 + 2jRC\omega)\frac{1}{jRC\omega}(1 + jRC\omega)\left(-\frac{\underline{s}}{\alpha}\right).$$

Multiplions par $\alpha RC\omega$, nous obtenons :

$$j\alpha RC\omega\,\underline{e} + (\alpha - 1)(-R^2C^2\omega^2)\underline{s} = -(1 + jRC\omega)(1 + 2jRC\omega)\underline{s}.$$

Regroupons les termes :

$$\underline{s}[(1 + jRC\omega)(1 + 2jRC\omega) + (\alpha - 1)(-R^2C^2\omega^2)] = -j\alpha RC\omega\,\underline{e}$$

$$\underline{s}[1 + 3jRC\omega - (\alpha + 1)R^2C^2\omega^2] = -j\alpha RC\omega\,\underline{e}.$$

D'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-j\alpha RC\omega}{1 + 3jRC\omega - (1 + \alpha)R^2C^2\omega^2}.$$

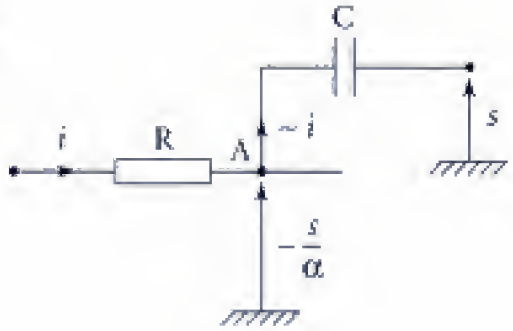
Expression que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{-\alpha}{3 + \frac{1}{jRC\omega} + j(1 + \alpha)RC\omega} = \frac{-\frac{\alpha}{3}}{1 + \frac{1}{3}j\left[(1 + \alpha)RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right]}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Considérons que le courant i passe quasi intégralement dans la branche supérieure $\left(\frac{1}{C\omega} \ll R\right)$: $\frac{1}{R}\left(\underline{e} + \frac{\underline{s}}{\alpha}\right) = jC\omega\left(-\frac{\underline{s}}{\alpha} - \underline{s}\right)$.



Or $RC\omega \gg 1$, d'où :

$$\underline{e} \sim -jRC\omega\,\frac{1+\alpha}{\alpha}\,\underline{s}$$

et $\underline{H} \sim \dfrac{-\alpha}{jRC\omega(1+\alpha)}$, comme il se doit.

2. Traçons les diagrammes de Bode :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = f\left[\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\right] \\ \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}) = g\left[\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\right]. \end{cases}$$

■ Étude de G_{dB} :

$$G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\left[\frac{|H_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\right]$$

dont le comportement asymptotique est donné par :

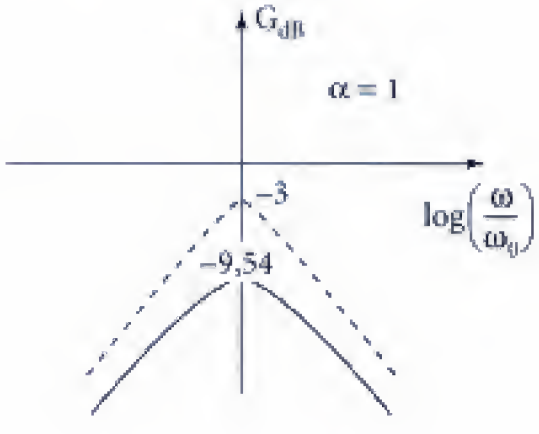
$$\omega \ll \omega_0 : \quad G_{dB} \sim 20\log\frac{|H_0|}{Q} + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad (3)$$

$$\omega \gg \omega_0 : \quad G_{dB} \sim 20\log\frac{|H_0|}{Q} - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad (4)$$

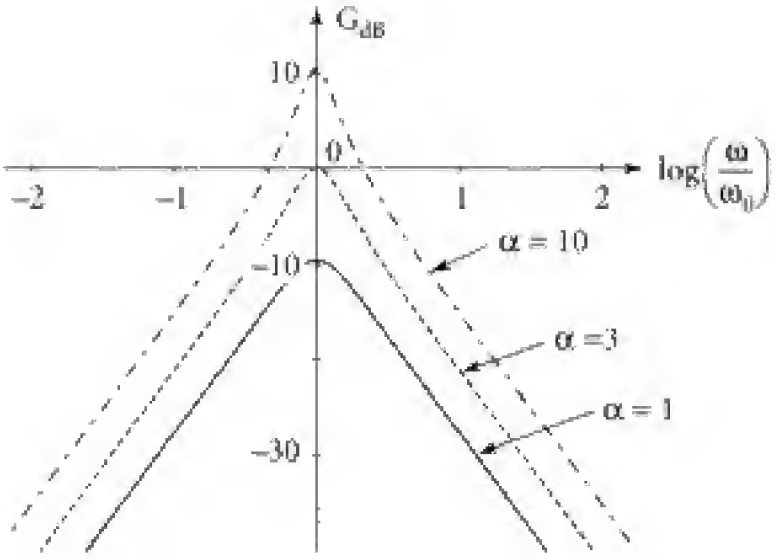
$$(\omega = \omega_0 : \quad G_{dB} \sim 20\log|H_0|\,).$$

(3) (respectivement (4)) correspond à une droite de pente 20 dB par décade (resp. −20 dB par décade). D'où les différentes courbes selon les valeurs du paramètre α :

α	1	3	10
H_0	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{10}{3}$
$(\lvert H_0\rvert)_{dB}$	−9,54	0	10,5
Q	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$
$\left(\frac{\lvert H_0\rvert}{Q}\right)_{dB}$	−3	3,5	9,6



Copyright Editions Eyrolles

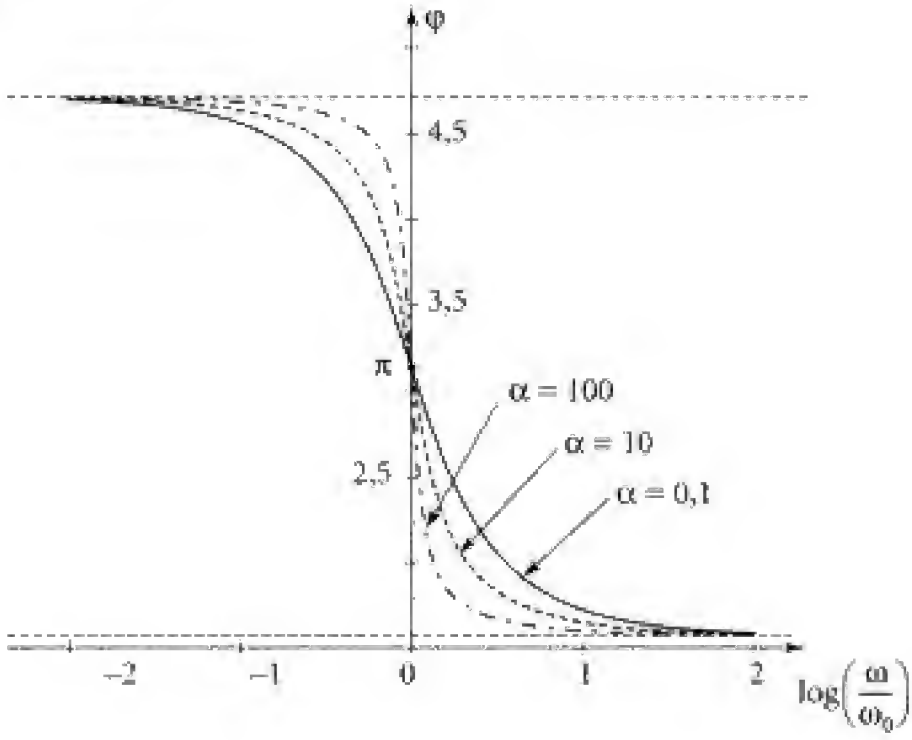


■ Étude de $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}) = \arg\left[\frac{H_0}{1 + jQ \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right] \quad \text{où} \quad H_0 = -\frac{1}{k} < 0$$

$$\varphi(\omega) = \arg\left[-1 + jQ \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \text{ d'où } \tan\varphi = Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{ avec } \cos\varphi < 0.$$

Ainsi quand ω varie de 0 à « ∞ », on peut prendre φ décroissant de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, d'où les graphes :



Copyrighted material

Commentaire

• Dans un passe-bande d'ordre deux ($H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = H_0 \cdot \frac{2\beta\frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\beta\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$,

soit $d°(D(p)) = 2$, les pentes des asymptotes sont de ±20 dB par décade et non pas de + (resp. –) 40 dB par décade comme c'est le cas pour un passe-haut (resp. passe-bas) du second ordre.

• On a également : $\varphi(\omega \to \infty) - \varphi(\omega = 0) = -\pi$.

• On peut vérifier aisément que la bande passante $\Delta\omega$ à –3 dB est donnée par :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

Plus Q est grand, plus le filtre est sélectif. Cependant si on note τ le temps caractéristique nécessaire à l'établissement du régime sinusoïdal forcé, on a :

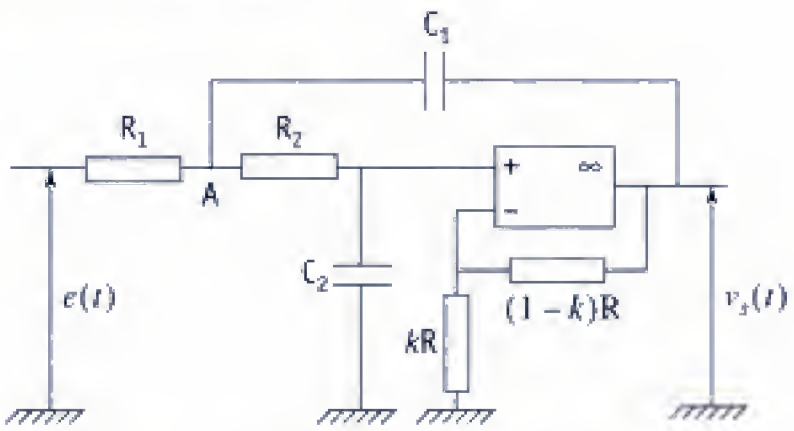
$$\Delta\omega \cdot \tau \sim 1.$$

lié à l'analyse fréquentielle — lié à l'analyse temporelle

Plus le filtre est sélectif, plus le temps nécessaire à l'amortissement du régime libre est important...

104 Filtre du type Butterworth

Soit le montage représenté ci-dessous.



L'amplificateur opérationnel est supposé idéal. On a : $0 < k < 1$.

On posera : $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$; $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$; $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Copyrighted material

Hidden page

De plus, le même courant traverse R_2 et C_2 ($i_+ = 0$), d'où :

$$\frac{1}{R_2}(\underline{V_A} - \underline{V_+}) = jC_2\omega\underline{V_+} \quad \text{soit} \quad \underline{V_A} = \underline{V_+}(1 + jR_2C_2\omega) \quad (2)$$

Enfin, l'amplificateur opérationnel fonctionnant dans cette étude en régime linéaire, il impose :

$$\underline{V_+} = \underline{V_-} = k\underline{V_s} \quad (3)$$

Éliminons $\underline{V_A}$ entre les équations (1) et (2) et utilisons (3) :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + jC_1\omega\right)(1 + jR_2C_2\omega)k\underline{V_s} = \frac{\underline{E}}{R_1} + jC_1\omega\underline{V_s} + \frac{1}{R_2}k\underline{V_s}$$

soit encore :

$$\left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1C_1\omega\right)(1 + jR_2C_2\omega) - j\frac{R_1C_1\omega}{k} - \frac{R_1}{R_2}\right]\underline{V_s} = \frac{\underline{E}}{k}$$

$$\left[1 + j\omega\left[R_1C_1\left(1 - \frac{1}{k}\right) + R_2C_2\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\right] + (j\omega)^2R_1C_1R_2C_2\right]\underline{V_s} = \frac{\underline{E}}{k}.$$

D'où $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + 2j\alpha\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ ou $\boxed{H(p) = \dfrac{H_0}{1 + 2\alpha p\dfrac{p}{\omega_0} - \dfrac{p^2}{\omega_0^2}} = \dfrac{N(p)}{D(p)}}$

avec $H_0 = \dfrac{1}{k}$; $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}$ et $\dfrac{2\alpha}{\omega_0} = R_1C_1\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) + R_2C_2\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)$.

2. En régime quelconque, l'équation différentielle en $v_s(t)$ est alors donnée par :

$$v_s + \frac{2\alpha}{\omega_0}\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2v_s}{dt^2} = H_0e(t)$$

et la stabilité est liée à l'étude des solutions de l'équation sans second membre dont l'équation caractéristique est donnée par :

$$\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\alpha\frac{p}{\omega_0} + 1 = 0 \quad \text{(recherche de solutions en } e^{p_i}\text{)}.$$

La stabilité est assurée dès que $R_e(p_i) < 0$, c'est-à-dire dès que les zéros du polynôme $D(p)$ sont à partir réelle négative, ce qui correspond à un amortissement des signaux transitoires.

Or $\begin{cases} p_1p_2 = \omega_0^2 > 0 \\ p_1 + p_2 = -2\alpha\omega_0. \end{cases}$

Dans tous les cas (racines réelles ou complexes conjuguées), cela impose :

$$p_1 + p_2 < 0 \text{ c'est-à-dire } \alpha > 0.$$

Il faut donc que $R_1C_1\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) + R_2C_2\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right) > 0$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Commentaires

On a représenté avec des pointillés les diagrammes asymptotiques :

• $\omega \to 0 \qquad G_{dB} \sim -20\log k$;

• $\omega \to$ « ∞ » $\quad G_{dB} \sim -20\log k - 40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$;

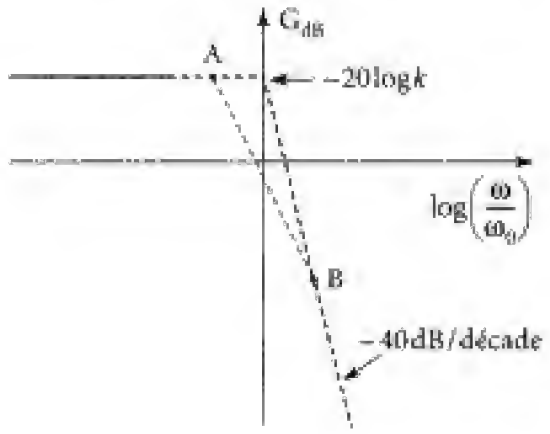
• $\omega_1' \ll \omega \ll \omega_2'$ (dans la mesure où cette double inégalité a un sens…) :

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_1'}\right)} \Rightarrow (G_{dB})_{asympt} = -20\log k - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1'}\right).$$

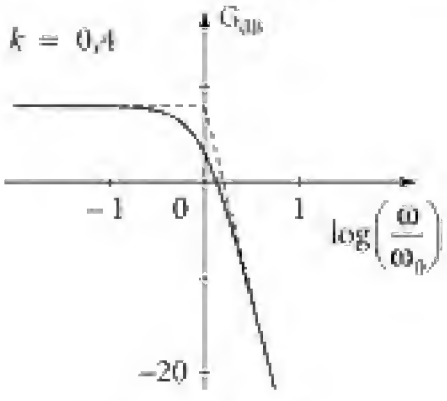
• Point A : $G_{dB}(A) = -20\log k$, soit pour l'asymptote $\omega_A = \omega_1'$.

• Point B tel que

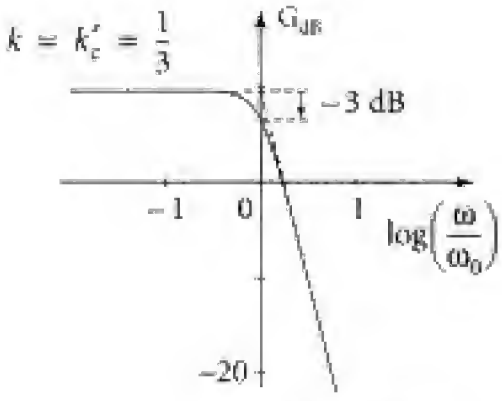
$-40\log\left(\dfrac{\omega_B}{\omega_0}\right) = -20\log\left(\dfrac{\omega_B}{\omega_1'}\right)$, soit $\left(\dfrac{\omega_B}{\omega_0}\right)^2 = \left(\dfrac{\omega_B}{\omega_1'}\right) \Rightarrow \omega_B = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_1'} = \omega_2$.



2) $k_c' < k < k_c''$ (soit $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < 1$) :



$(-20\log k = 7{,}96)$



$(-20\log k_c' = 9{,}54)$

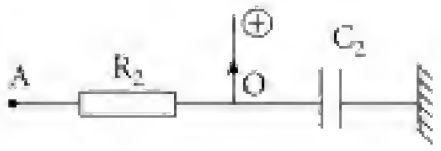
Copyrighted material

Hidden page

• $v_A(0^+) - v_s(0^+) = 0 \Rightarrow v_A(0^+) = 0.$

Or $\dfrac{v_A(0^+) - v_0(0^+)}{R_2} = C_2 \dfrac{dv_s}{dt}\Big)_{0^+}$

$C_2 \dfrac{dv_-}{dt}\Big)_{0^+} = C_2 k \dfrac{dv_s}{dt}\Big)_{0^+}$ d'où $\boxed{\dfrac{dv_s}{dt}\Big)_{0^+} = 0}$ (6)



Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle (4) avec les conditions initiales (5) et (6).

On a alors : $v_s(t) = \dfrac{1}{k}E_0 + u(t)$, où $\dfrac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0.$

Cherchons des solutions en $\exp(pt)$. Dès lors, p est solution de l'équation :

$$\begin{cases} p^2 + 2\alpha\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad (7) \quad (\text{soit } D(p) = 0\ldots) \\ \Delta' = (\alpha^2 - 1)\omega_0^2. \end{cases}$$

1) $k_c'' < k < 1$ **(soit** $1 < \alpha < \sqrt{2}$**) :**

(7) admet deux racines réelles ($\alpha > 1$) négatives ($p_1 p_2 = \omega_0^2$ et $p_1 + p_2 = -2\alpha\omega_0$).

D'où avec $p_{\frac{1}{2}} = \omega_0[-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}] = -\alpha\omega_0 \pm \Omega$ où $\Omega = \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$

$v_s(t) = \dfrac{1}{k}E_0 + e^{-\alpha\omega_0 t}(A\cosh\Omega t + B\sinh\Omega t)$

$v_s(0^+) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{k}E_0 + A = 0 \quad$ et $\quad A = -E_0\dfrac{1}{k}$

$\dfrac{dv_s}{dt}(0^+) = 0 \Rightarrow -\alpha\omega_0 A + B\Omega = 0 \quad$ et $\quad B = -\alpha\dfrac{\omega_0}{\Omega}E_0\dfrac{1}{k}.$

Finalement :

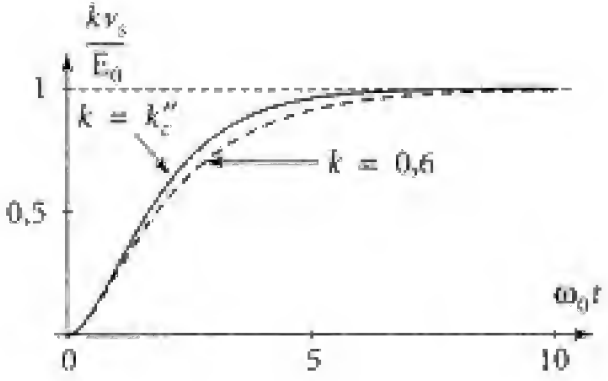
$$\boxed{v_s(t) = \frac{1}{k}E_0\left[1 - \exp(-\alpha\omega_0 t)\left\{\cosh\Omega t + \alpha\frac{\omega_0}{\Omega}\sinh\Omega t\right\}\right]} \quad (8)$$

Pour $\alpha = 1$ (soit $Q = \dfrac{1}{2}$), c'est le régime apériodique critique :

$$v_s(t) = \frac{1}{k}E_0[1 - \exp(-\omega_0 t)\{1 + \omega_0 t\}].$$

D'où les courbes :

régime apériodique (critique pour $\alpha = 1$: montée plus rapide)



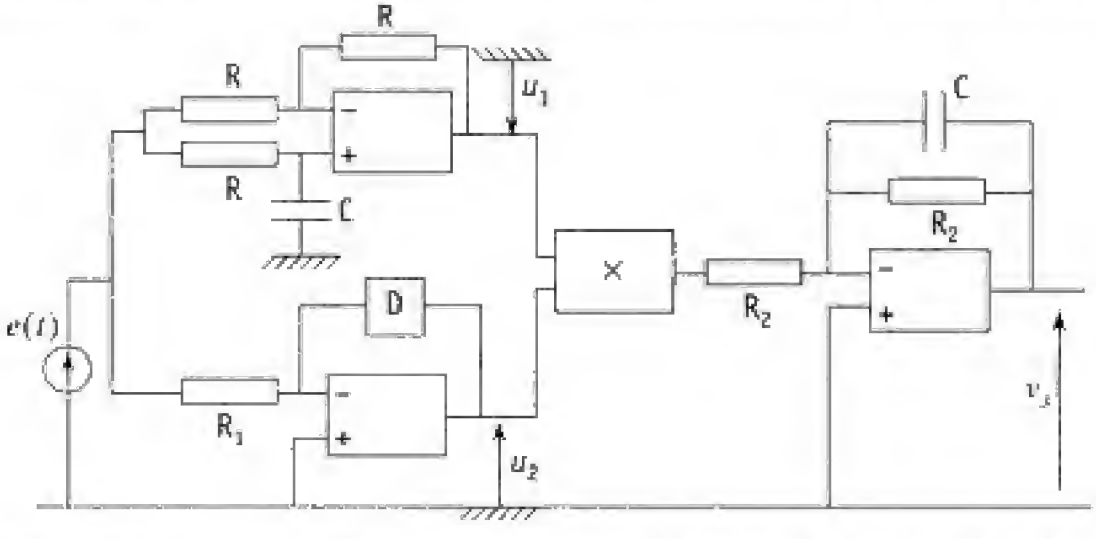
Copyrighted material

Hidden page

et pour $Q \gg 1$ (soit $\alpha \ll 1$), on a $T - T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, d'où : $\frac{y_n}{y_1} \approx \exp\left[-(n-1)\frac{\pi}{Q}\right]$, résultat à partir duquel on peut atteindre expérimentalement le facteur Q... L'expérience a été faite avec $R_2 = R_1 = 4{,}7\ k\Omega$; $C_1 = 100\ nF$; $C_2 = 200\ nF$; kR et $(1-k)R$: potentiomètre de l'ordre 10 kΩ ; tension e : générateur de signaux carrés calés sur 40 Hz).

105 Une application du multiplieur

On réalise avec un multiplieur (de coefficient multiplicateur k) et trois amplificateurs opérationnels (supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire) le montage suivant :



Ce montage fonctionne avec un dipôle linéaire passif D d'impédance complexe $\underline{Z}$. Il est alimenté par un G.B.F. qui délivre dans un premier temps une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$.

1. Déterminer, en notations complexes puis réelles, la tension u_1 d'entrée dans le multiplieur, sachant que $RC\omega = 1$.

2. Faire de même pour la seconde tension u_2 d'entrée dans le multiplieur.

3. On désire que la tension de sortie v_s du montage soit une image linéaire de la partie imaginaire $\mathrm{Im}(\underline{Z})$ de l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle D. Préciser la condition relative au produit $R_2C\omega$ pour qu'il en soit ainsi et donner alors la relation entre v_s et $\mathrm{Im}(\underline{Z})$.

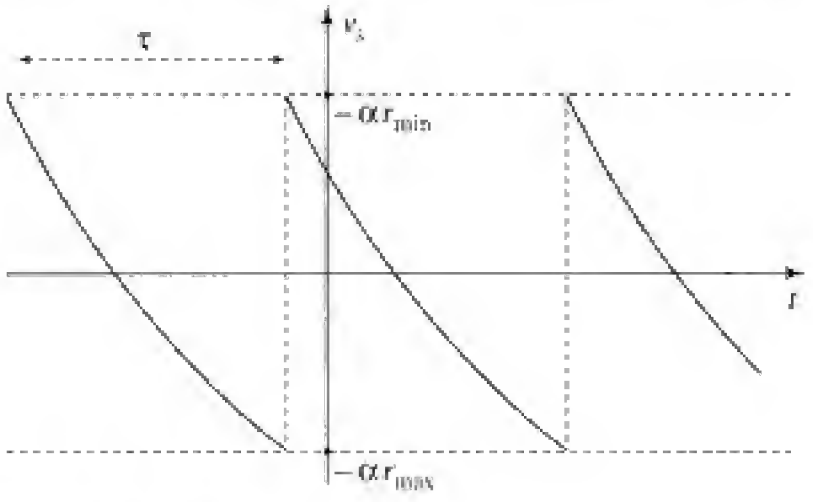
4. Le dipôle D est constitué de l'association en série d'une bobine (résistance r, coefficient L d'auto-induction) et d'un condensateur de capacité C. On met en action la modulation interne du G.B.F. (« wobbulation ») : la pulsation ω délivrée par le G.B.F. varie alors en dents de scie au cours du temps avec une période τ (très grande par rapport à $\frac{2\pi}{\omega}$). Les valeurs extrêmes ω_{min} et ω_{max} de ω sont telles que $\omega_{min} < \frac{1}{\sqrt{LC}} < \omega_{max}$; la

Copyrighted material

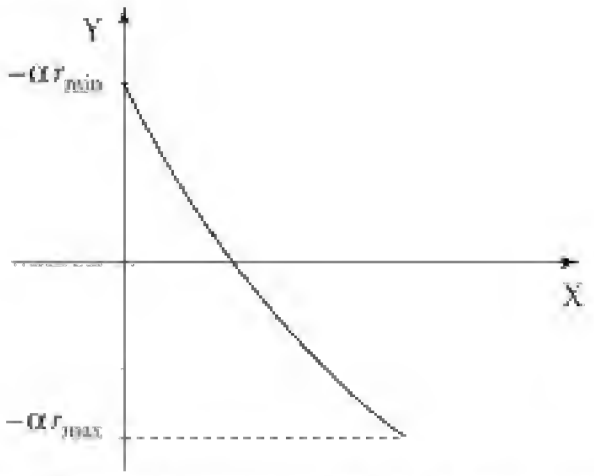
Hidden page

Hidden page

En balayage normal, on observera sur l'oscilloscope une courbe ayant l'allure suivante :



En X-Y, on n'observera plus que :



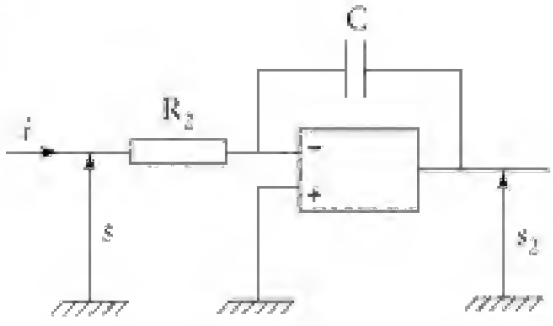
Ce montage permet donc de visualiser les variations avec la pulsation de la partie imaginaire de l'impédance d'un dipôle. Il faut cependant noter qu'en toute rigueur, le passe-tout déphaseur utilisé ne peut pas déphaser de $-\frac{\pi}{2}$ à toute fréquence.

Copyrighted material

Hidden page

• **Un montage intégrateur :**

l'amplificateur opérationnel étant idéal, nous avons :



$$i = \frac{1}{R_2}(s - 0) = C\frac{d}{dt}(0 - s_2).$$

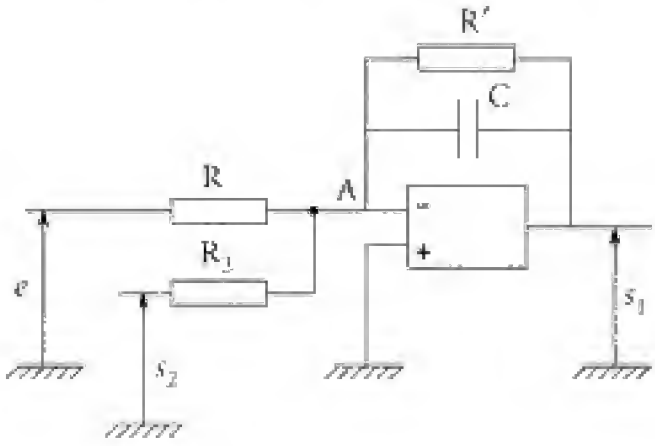
Soit encore : $R_2C\dfrac{ds_2}{dt} = -s$.

Et en régime sinusoïdal établi :

$$\frac{\underline{s}_2}{\underline{s}} = -\frac{1}{jR_2C\omega} \quad (2)$$

• **Un filtre passe-bas** à double entrée tel que (loi des nœuds en A avec $i_- = 0$) :

$$\frac{e-0}{R} + \frac{s_2 - 0}{R_3} = \frac{0 - s_1}{R'} + C\frac{d}{dt}(0 - s_1).$$



Soit $\dfrac{R'}{R}e + \dfrac{R'}{R_3}s_2 = -\left(s_1 + R'C\dfrac{ds_1}{dt}\right)$. Et, en régime sinusoïdal établi :

$$\frac{R'}{R}\underline{e} + \frac{R'}{R_3}\underline{s}_2 = -(1 + jR'C\omega)\underline{s}_1 \Rightarrow \underline{s}_1 = \frac{-\left(\underline{e}\dfrac{R'}{R} + \dfrac{R'}{R_3}\underline{s}_2\right)}{1 + jR'C\omega} \quad (3)$$

En « basses » fréquences ($R'C\omega \ll 1$), on retrouve un fonctionnement du type inverseur et en « hautes » fréquences ($R'C\omega \gg 1$), un fonctionnement du type intégrateur.

■ Déterminons la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ à partir des relations (1), (2) et (3) :

$$-\underline{e}\frac{R'}{R} - \underline{s}_2\frac{R'}{R_3} = (1 + jR'C\omega)\underline{s}_1 = (1 + jR'C\omega)\left(-\frac{R_1}{R'_1}\underline{s}\right)$$

$$-\underline{e}\frac{R'}{R} + \frac{1}{jR_2C\omega}\underline{s}\frac{R'}{R_3} = -\frac{R_1}{R'_1}(1 + jR'C\omega)\underline{s}.$$

Copyright material

D'où : $$\underline{H} = \frac{\frac{R'}{R}}{\frac{R_1}{R_1'}(1 + jR'C\omega) + \frac{R'}{jR_2R_3C\omega}}.$$

Posons alors $\boxed{H_0 = \frac{R'R_1'}{RR_1}}$, la fonction de transfert $\underline{H}$ se réécrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\left(R'C\omega - \frac{R'R_1'}{R_1R_2R_3C\omega}\right)}.$$

Soit, avec ω_0 défini par $R'C\omega_0 = \frac{R'R_1'}{R_1R_2R_3C\omega_0}$:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{R_1'}{R_1R_2R_3}}} \Rightarrow \underline{H} = \frac{H_0}{1 + jR'C\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_0, de gain H_0 pour $\omega = \omega_0$ et de facteur de qualité $Q = R'C\omega_0$.

D'où finalement : $$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

ou encore $$\boxed{H(p) = \frac{H_0}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}}$$

Commentaire

La bande passante à –3dB est définie par $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, les pulsations ω_1 et ω_2 vérifiant :

$|\underline{H}|(\omega_1) = |\underline{H}|(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\underline{H}|(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}H_0$.

Ainsi $G_{dB}(\omega_1) = G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_0) - 20\log\sqrt{2} \approx G_{dB}(\omega_0) - 3$,

ce qui donne ici : $2 = 1 + Q^2\left(X - \frac{1}{X}\right)^2$ avec $X = \frac{\omega}{\omega_0}$ et :

$$X^2 \pm \frac{X}{Q} - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \\ X_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}. \end{cases}$$

Nous obtenons : $\Delta X = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ soit $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R'C}}$

Copyrighted material

On peut ainsi modifier, **séparément**, pour une capacité fixée :
– la bande passante $\Delta\omega$ en jouant sur la valeur de R′,
– la pulsation centrale ω_0 du filtre en faisant varier la résistance R_3 (ou R_3),
– le gain H_0 maximal par l'intermédiaire de la résistance R.

A.N. : $H_0 = \dfrac{R'R_1'}{RR_1} = 1$; $\omega_0 = \dfrac{1}{680 \cdot 10^{-9}}\sqrt{\dfrac{1}{47^2}} \Rightarrow$ $\boxed{f_0 = 4{,}98 \text{ kHz}}$

$\Delta\omega = \dfrac{1}{6{,}8 \cdot 10^3 \times 680 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow$ $\boxed{\Delta f = 34 \text{ Hz}}$

Soit un facteur de qualité $\boxed{Q = \dfrac{f_0}{\Delta f} = 145}$

■ **Courbe** $G_{dB} = f\left[\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$

On a $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\dfrac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(X - \dfrac{1}{X}\right)^2}}$ où $X = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

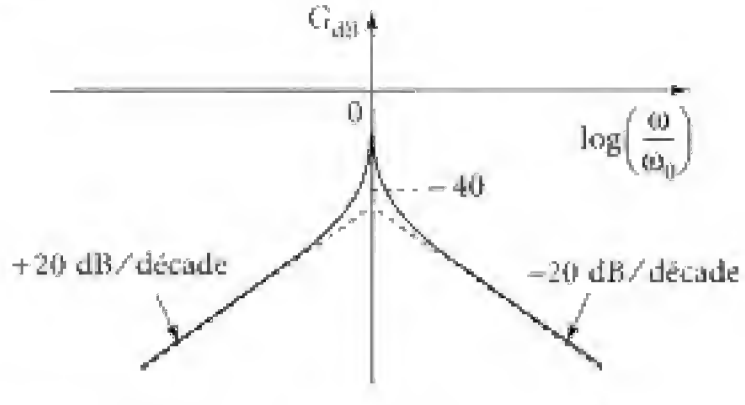
Le comportement asymptotique est donné :

– pour $\omega \gg \omega_0$ par $G_{dB} \sim 20\log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right) - 20\log X$;

– pour $\omega \ll \omega_0$ par $G_{dB} \sim 20\log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right) + 20\log X$.

De plus, $G_{dB}(\omega_0) = 20\log H_0 = 0$, et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées puisque : $G_{dB}\left(\dfrac{1}{X}\right) = G_{dB}(X)$ et $\log\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\log X$.

D'où la courbe :



On est dans le cas où $Q > 1$, et donc $G_{dB}(\omega_0) > 20\log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right)$.

2. On s'intéresse ici à la réponse, en régime établi, à un signal d'entrée carré de période T′ et d'amplitude E.

Copyrighted material

Hidden page

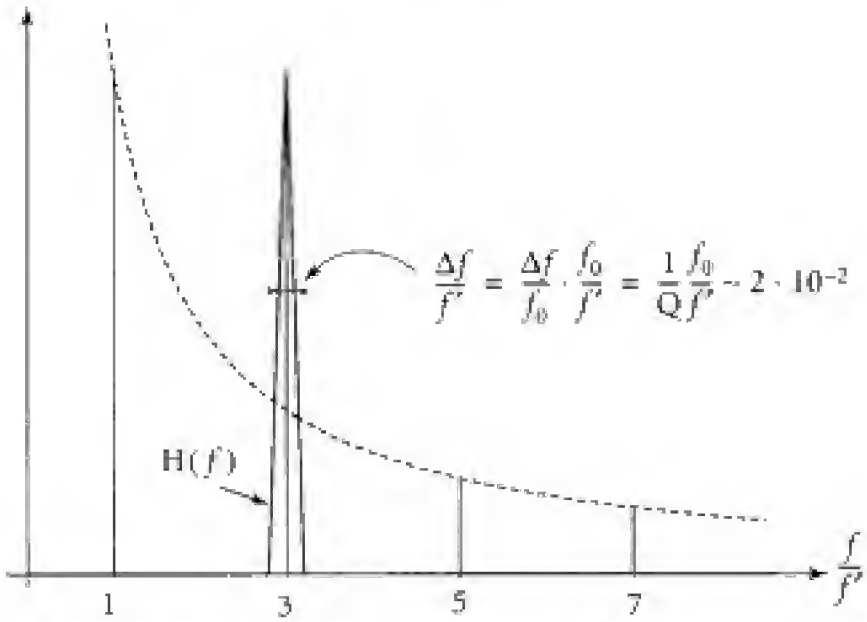
Et $e(t) = \dfrac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{1}{2p+1}\sin[(2p+1)\omega' t] = \sum e_p(t)$.

La réponse en régime forcé s'obtient alors en sommant les réponses associées à chaque composante sinusoïdale (système linéaire).

Or pour $e_1(t) = E_0\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow s_1(t) = H(\omega)E_0\cos(\omega t + \varphi + \Psi(\omega))$ si l'on note $\underline{H} = H(\omega)e^{j\Psi(\omega)}$ (le filtre a pour effet de multiplier l'amplitude du signal sinusoïdal par $H(\omega)$ et de le déphaser de $\Psi(\omega)$).

Traçons alors, sur le même graphique, la courbe $H(\omega)$ et le spectre du signal. Nous obtenons ici, puisque :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 4{,}98\ \text{kHz} \quad \text{et} \quad f' = \frac{\omega'}{2\pi} = 1{,}65\ \text{kHz} ; \text{ soit } f_0 \# 3f'$$



En première approximation, on peut considérer que seule l'harmonique trois est transmise, ce qui donne dans ce cas : $H(3f') \# H(f_0) = 1$ et $\Psi(3f') \# \Psi(f_0) = 0$.

Finalement : $\boxed{s(t) \# \dfrac{4E}{\pi}\cdot\dfrac{1}{3}\sin(3\omega' t)}$

On obtient alors un signal sinusoïdal de fréquence triple $(3f')$ et d'amplitude $\dfrac{4E}{3\pi} \# 4{,}25$ V.

Commentaire

Évaluons les grandeurs $A_1H(\omega')$ et $A_5H(5\omega')$:

$$A_1H(\omega') = \frac{4E}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+145^2\left(\dfrac{f'}{f_0}-\dfrac{f_0}{f'}\right)^2}} \Rightarrow A_1H(\omega') \# 3{,}3\cdot 10^{-2} ;$$

Copyrighted material

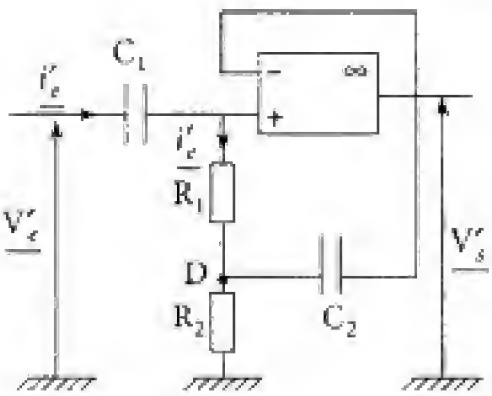
Hidden page

Hidden page

et $s(t) = 0$ pour : $\dfrac{R''}{R} = \dfrac{1}{\dfrac{R'}{R_c} + 1}\left(1 + \dfrac{R''}{R}\right)$;

soit : $\left(1 + \dfrac{R'}{R_c}\right)\dfrac{R''}{R} = 1 + \dfrac{R''}{R} \Rightarrow \dfrac{R'R''}{R_cR} = 1 \Rightarrow \boxed{R_c = \dfrac{R'R''}{R}}$

2. a. Déterminons l'impédance d'entrée $\underline{Z'_e} = \dfrac{\underline{V'_e}}{\underline{i'_e}}$ du montage proposé.



Nous avons $\underline{V_-} = \underline{V_+} = \underline{V'_s}$ (1)

$\underline{i'_e} = jC_1\omega(\underline{V'_e} - \underline{V_+}) = \dfrac{1}{R_1}(\underline{V_+} - \underline{V_D})$ (2)

D'autre part $\underline{V_D} = \dfrac{jC_2\omega(\underline{V'_s} + \underline{i'_e})}{\dfrac{1}{R_2} + jC_2\omega}$;

soit encore $\underline{V_D}(1 + jR_2C_2\omega) = jR_2C_2\omega\underline{V'_s} + R_2\underline{i'_e}$ (3)

(2) donne également $\underline{i'_e} = jC_1\omega(\underline{V'_e} - \underline{V'_s}) = \dfrac{1}{R_1}(\underline{V'_s} - \underline{V_D})$.

Éliminons $\underline{V_D}$ et $\underline{V'_s}$ entre les relations précédentes :

$$\underline{V_D} = \underline{V'_s} - R_1\underline{i'_e} \quad (4) \quad \text{et} \quad \underline{V'_s} = \underline{V'_e} - \frac{1}{jC_1\omega}\underline{i'_e} \quad (5)$$

Soit, avec (3) et (4) :
$(1 + jR_2C_2\omega)[\underline{V'_s} - R_1\underline{i'_e}] = jR_2C_2\omega\underline{V'_s} + R_2\underline{i'_e}$;

soit $\underline{V'_s} = (R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega)\underline{i'_e}$.

Et en utilisant (5) : $\underline{V'_e} - \dfrac{1}{jC_1\omega}\underline{i'_e} = (R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega)\underline{i'_e}$

d'où $\underline{V'_e} = \left[R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega + \dfrac{1}{jC_1\omega}\right]\underline{i'_e}$.

L'impédance d'entrée du montage a donc pour valeur :

$$\boxed{\underline{Z'_e} = R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}}$$

Commentaire

Elle correspond à la mise en série d'une résistance $R_{eq} = R_1 + R_2$, d'une inductance pure $L_{eq} = R_1R_2C_2$ et d'une capacité pure $C_{eq} = C_1$. Le montage à droite de C_1 simule donc une bobine (L_{eq}, R_{eq}) ...

Copyrighted material

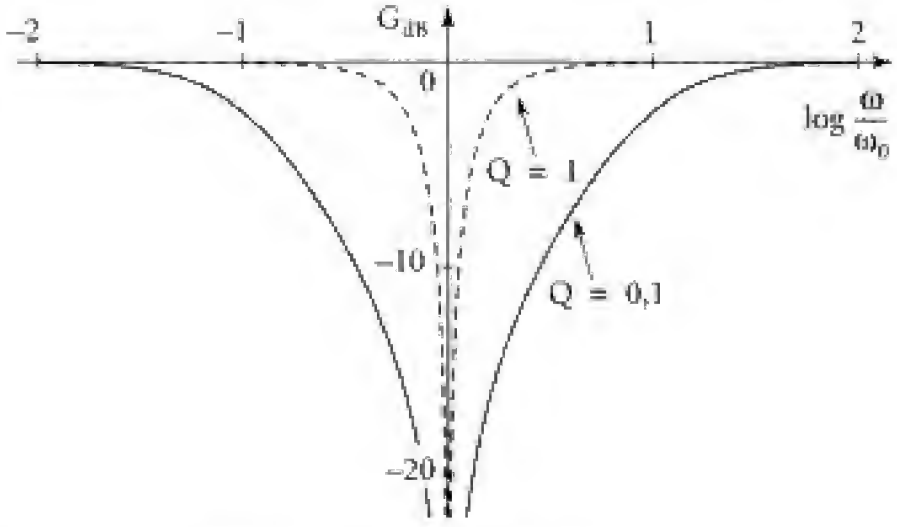
Hidden page

Posons $R'\left(1+\frac{R''}{R}\right)C_1\omega_0 = \frac{1}{Q}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, dès lors :

$$\underline{H} = \frac{jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)} \quad \text{et} \quad |\underline{H}|^2 = \frac{Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2};$$

d'où les diagrammes de Bode :

• $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = f\left[\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$



• Pour $\varphi(\omega)$, on peut remarquer que l'on a également :

$$\underline{H} = \frac{x^2-1}{x^2-1-\frac{j}{Q}x} = \frac{1-x^2}{1+\frac{j}{Q}x-x^2};$$

et $\varphi(\omega) = \arg(1-x^2) - \arg\left(1+\frac{j}{Q}x-x^2\right)$

$= \theta - \psi$;

avec $\theta = \begin{cases} 0 \text{ pour } x < 1 \\ \pi \text{ pour } x > 1 \end{cases}$ $\quad \psi \begin{cases} \tan\psi = \frac{1}{Q}\frac{x}{1-x^2} \\ \sin\psi > 0. \end{cases}$

D'où

$$\left.\begin{array}{l} \psi = \arctan\left[\frac{1}{Q}\frac{x}{1-x^2}\right] \text{ pour } x \in]0,1[\\ \psi = \pi + \arctan\left[\frac{1}{Q}\frac{x}{1-x^2}\right] \text{ pour } x > 1 \end{array}\right\} \quad \boxed{\varphi(\omega) = -\arctan\left[\frac{1}{Q}\frac{x}{1-x^2}\right]}$$

On remarque donc que :

$$\varphi(x \to 1^-) \to -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(1^-) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\varphi(x \to 1^+) \to +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(1^+) = +\frac{\pi}{2}.$$

Copyrighted material

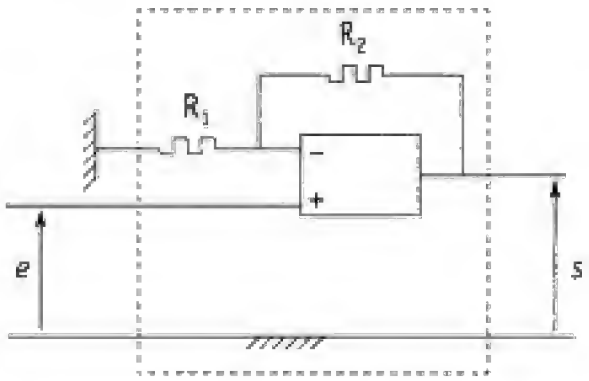
Hidden page

Hidden page

Hidden page

201 Rétroaction et propriétés d'un amplificateur

On étudie ici l'opérateur suivant (amplificateur non inverseur) composé d'un amplificateur opérationnel et de deux résistors. On prendra $R_1 = 1\ k\Omega$ et $R_2 = 100\ k\Omega$.



1. Faire un schéma de l'opérateur faisant apparaître clairement l'opérateur de chaîne de retour.

2. On suppose que l'amplificateur opérationnel (A.O.) est idéal et fonctionne en régime linéaire.

a. Déterminer la relation entre la tension d'entrée $e(t)$ et la tension de sortie $s(t)$. En déduire le gain $G = \frac{s}{e}$.

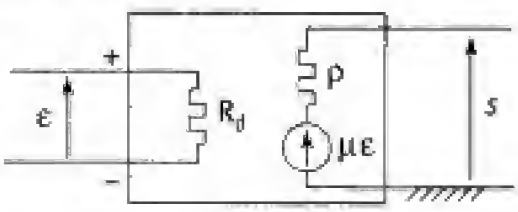
b. Déterminer les résistances d'entrée et de sortie du montage.

3. On suppose maintenant que l'A.O. présente un gain fini $\mu = 10^5$.

a. Déterminer la nouvelle expression du gain G_μ du montage à l'aide de G et μ. Quelle erreur relative commet-on en assimilant G_μ et G ?

b. Les résistances d'entrée et de sortie du montage sont-elles changées ?

4. On suppose que l'A.O. présente un gain fini $\mu = 105$, une résistance différentielle d'entrée $R_d = 100\ k\Omega$ et une résistance de sortie $\rho = 100\ \Omega$. Le schéma équivalent de l'A.O. est alors le suivant :



a. Déterminer l'expression de la résistance d'entrée R_e du montage étudié lorsqu'il fonctionne en circuit ouvert (charge infinie en aval). En prenant en compte les valeurs numériques, donner une expression approchée de R_e à l'aide de R_d, G et μ.

b. Déterminer l'expression de la résistance de sortie R_s du montage étudié lorsqu'il est alimenté en amont par une source idéale de tension (on introduira $r = \frac{R_1 R_d}{R_1 + R_d}$).

En prenant en compte les valeurs numériques, donner une expression approchée de R_s à l'aide de ρ, G et μ.

Copyrighted material

Hidden page

2. a. L'A.O. étant idéal et fonctionnant en régime linéaire,

$\varepsilon = V_{E^+} - V_{E^-} = 0$ et donc $V_{E^-} = e$. La loi des nœuds en E^- s'écrit : $\frac{e}{R_1} + \frac{e - s}{R_2} = 0$.

D'où $\boxed{s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)e}$ et donc $\boxed{G = 1 + \frac{R_2}{R_1}}$

Commentaire

On pourrait aussi se servir de la question précédente. Pour l'opérateur de chaîne de retour (pont diviseur de tension) $e_r = \frac{R_1}{R_1 + R_2}s$. Comme $\varepsilon = 0$, alors $e_r = e$ donc $\frac{R_1}{R_1 + R_2}s = e$.

2. b. Il n'y a aucun courant d'entrée dans le montage (car l'entrée du montage est reliée à l'entrée de l'A.O.). Donc la **résistance d'entrée est infinie.**

La tension de sortie s du montage est indépendante de la charge que l'on pourrait placer en aval, côté sortie, le montage se comporte donc comme une source idéale de tension : la **résistance de sortie est donc nulle.**

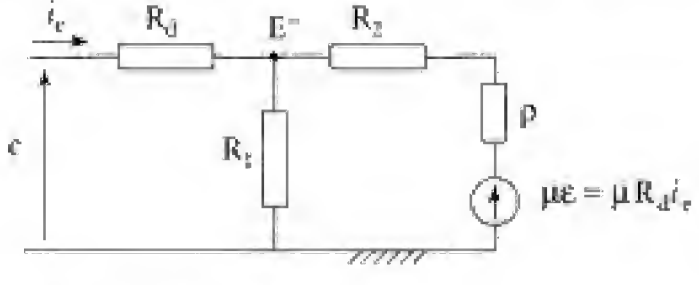
3. a. La tension de sortie s'écrit : $s = \mu\varepsilon = \mu\left(e - \frac{R_1}{R_1 + R_2}s\right)$.

D'où $\frac{s}{e} = \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{G}} \Rightarrow \boxed{G_\mu = \frac{G}{1 + \frac{G}{\mu}}}$

Si on assimile G_μ et G, on commet donc une erreur relative $\frac{G}{\mu}$, soit sensiblement de 0,1 %.

3. b. Les résistances d'entrée et sortie restent ici inchangées.

4. a. Lorsque la charge est infinie, le montage vu de l'amont peut se représenter ainsi :



$V_{E^-} = e - R_d i_e$. La loi des nœuds en E^- s'écrit alors :

$$i_e = \frac{e - R_d i_e}{R_1} + \frac{e - R_d i_e - \mu R_d i_e}{R_2 + \rho}$$

(il serait possible aussi d'appliquer le théorème de Millman).

$$i_e\left(1 + \frac{R_d}{R_1} + \frac{R_d(1 + \mu)}{R_2 + \rho}\right) = e\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \rho}\right)$$

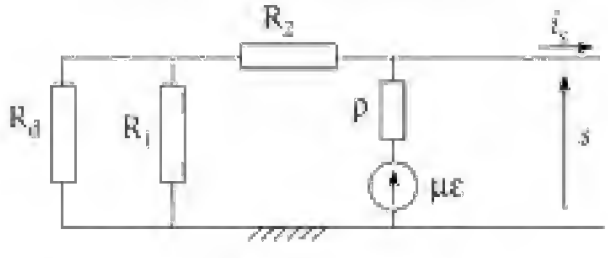
Copyrighted material

$$R_e = \frac{e}{i_e} \Rightarrow \boxed{R_e = \frac{(R_1 + R_d)(R_2 + \rho) + R_d R_1 (1 + \mu)}{R_1 + R_2 + \rho}}$$

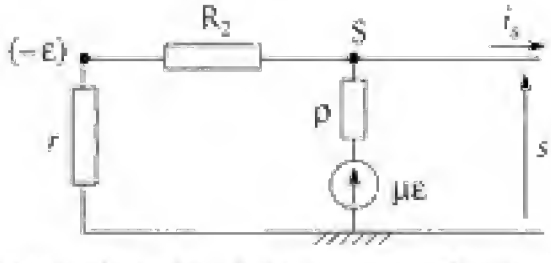
En prenant en compte les valeurs numériques :

$$R_e \approx \frac{\mu R_1 R_d}{R_1 + R_2} \Rightarrow \boxed{R_e \approx R_d \frac{\mu}{G}} \Rightarrow \boxed{R_e \approx 100\ \text{M}\Omega}$$

4. b. Si on éteint la source de tension indépendante qui donne la tension d'entrée, le schéma devient :



ou



Le courant est le même dans les deux résistors de résistances r et R_2, donc $s = -\varepsilon \dfrac{R_2 + r}{r}$. La loi des nœuds en S s'écrit alors : $i_s = -\dfrac{s}{R_2 + r} - \dfrac{1}{\rho}(s - \mu\varepsilon)$.

D'où : $i_s = -s\left(\dfrac{1}{R_2 + r} + \dfrac{1}{\rho} + \dfrac{\mu r}{\rho(R_2 + r)}\right)$.

La résistance de sortie est alors (en prenant en compte la convention générateur qui a été adoptée) :

$$R_s = -\frac{s}{i_s} \Rightarrow \boxed{R_s = \frac{\rho(R_2 + r)}{R_2 + \rho + (\mu + 1)r}}$$

Et en prenant en compte les valeurs numériques, $R_s \approx \rho \dfrac{R_2 + r}{\mu r} = \dfrac{\rho}{\mu}\left(1 + \dfrac{R_2(R_1 + R_d)}{R_1 R_d}\right)$

$R_1 + R_d = R_d$, donc $R_s = \dfrac{\rho}{\mu}\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow \boxed{R_s = \rho \dfrac{G}{\mu}}$ D'où $\boxed{R_s = 0{,}1\ \Omega}$

5. En régime harmonique de pulsation ω, on peut utiliser les complexes associés :

$$\underline{s} = \frac{\mu}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\underline{\varepsilon} = \frac{\mu}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\left(\underline{e} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\underline{s}\right).$$

D'où : $$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu}{1 + \dfrac{\mu}{G} + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\mu}{1 + \dfrac{\mu}{G}} \cdot \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0\left(1 + \dfrac{\mu}{G}\right)}}.$$

Copyrighted material

La pulsation de coupure à –3 dB est alors : $\omega_c = \omega_0\left(1 + \frac{\mu}{G}\right)$.

La fréquence de coupure à –3 dB est alors : $\boxed{f_c = f_0\left(1 + \frac{\mu}{G}\right)}$

En prenant en compte les valeurs numériques : $\boxed{f_c \approx f_0 \frac{\mu}{G}}$ soit $\boxed{f_c \approx 100\ \text{kHz}}$

6. • La résistance d'entrée du montage est égale à la résistance différentielle d'entrée de l'A.O. multipliée par le coefficient $\frac{\mu}{G} = 10^5$: la rétroaction améliore la résistance d'entrée. En effet, un amplificateur de tension doit posséder une très grande résistance d'entrée.

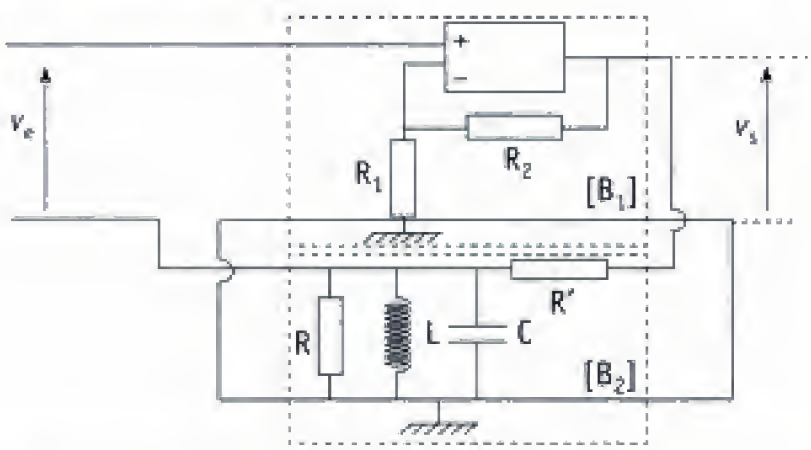
• La résistance de sortie du montage est égale à la résistance de sortie de l'A.O. divisée par le coefficient $\frac{\mu}{G} \approx 10^5$: la rétroaction améliore la résistance de sortie. En effet, un amplificateur de tension doit posséder une très petite résistance de sortie.

• La fréquence de coupure du montage est égale à la fréquence de coupure de l'A.O. multipliée par le coefficient $\frac{\mu}{G} \approx 10^5$: la rétroaction améliore la fréquence de coupure.

Il apparait donc globalement que la rétroaction améliore les défauts que peut présenter l'opération de chaine directe, et ceci d'autant plus qu'on accepte de descendre en gain.

202 Oscillateur quasi sinusoïdal

1. L'amplificateur opérationnel est idéal.



a. Étudier le système proposé en précisant le rôle des blocs $[B_1]$ et $[B_2]$.

On posera : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{RR'}{R+R'}\sqrt{\frac{C}{L}}$; $A_0 = \frac{R}{R+R'}$ et $G_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

Valeurs numériques : L = 50 mH ; C = 100 nF ; R = R' = 10 kΩ.

Copyrighted material

b. Donner un schéma fonctionnel du système et déterminer la fonction de transfert (en régime linéaire) $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{V_e(p)}$.

2. On fait maintenant $v_e = 0$, et on désire que le système fonctionne en oscillateur quasi sinusoïdal.

a. Condition théorique d'oscillations : on suppose dans cette question que le circuit est le siège d'oscillations sinusoïdales de pulsation ω, et qu'il est possible d'appliquer les résultats du **1. b.** Donner une condition sur G_0 et A_0, et préciser la valeur de la pulsation ω pour qu'il en soit ainsi. Que peut-on conclure ?

b. Déterminer l'équation différentielle vérifiée – en régime linéaire – par la tension $v_s(t)$. En déduire la condition pour que des oscillations soient susceptibles de prendre naissance. Commenter.

c. La condition précédente étant réalisée, montrer que l'état où l'A.O. est à saturation n'est pas stable. Conclure.

3. On fait l'approximation que la tension aux bornes du condensateur est quasi sinusoïdale ($v_c = u = v_+ = a_c \cos\omega_0 t$). Justifier succintement. Que dire du signal $v_s(t)$ sachant que $G_0 a_c > V_{sat}$?

Expliquer comment il est possible de déterminer graphiquement la valeur de $\dfrac{a_c}{V_{sat}}$, sachant que la décomposition de Fourier de $v_s(t)$ donne pour fondamental $a_1 \cos\omega_0 t$

avec :

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{V_{sat}} = \dfrac{2}{\pi}\left[\sin\omega_0 t_1 + \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \omega_0 t_1}{\cos\omega_0 t_1}\right] \\ \text{où} \quad \cos\omega_0 t_1 = \dfrac{V_{sat}}{G_0 a_c} \quad 0 < \omega_0 t_1 < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

b. Confrontation avec l'expérience :

L'expérience donne les résultats suivants : $V_{sat}^+ = -V_{sat}^- = 12{,}9$ volts.

$R_1(k\Omega)$	$R_2(k\Omega)$	a_c(volt)	T_c
4,88	6,12	6,4	0,45 ms
4,23	6,77	7,0	0,45 ms
2,55	8,45	7,5	0,45 ms

Conclure et donner l'allure des courbes $v_c(t)$ et $v_s(t)$. On tiendra compte du fait que l'inductance, à la pulsation ω_0, présente une résistance série r évaluée à 7,5 ohm.

1. Ce qu'il faut savoir

- Systèmes à rétroaction.
- Oscillateurs quasi sinusoïdaux à réaction.
- Filtre passe-bande du second ordre.

Copyrighted material

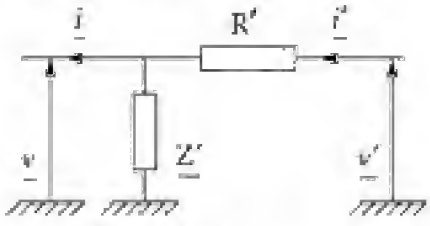
Hidden page

Hidden page

Commentaire

À titre d'exemple, déterminons complètement la matrice (a_{ij}). Elle ne dépend que du quadripôle : il est donc possible, pour atteindre les coefficients (a_{ij}), d'envisager une succession de cas particuliers (sortie court-circuitée, sortie en circuit ouvert).

$$\begin{pmatrix} \underline{i} \\ \underline{v} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} \underline{v'} \\ \underline{i'} \end{pmatrix}.$$



$Z' = (R \,//\, L \,//\, C)$ fig. 6

• Premier état : sortie en circuit ouvert ($\underline{i} = 0$)

Nous aurons $\underline{i'} = \dfrac{\underline{v'}}{R' + \underline{Z'}}$ et $\underline{v} = \dfrac{\underline{Z'}}{R' + \underline{Z'}}\underline{v'}$ (diviseur de tension)

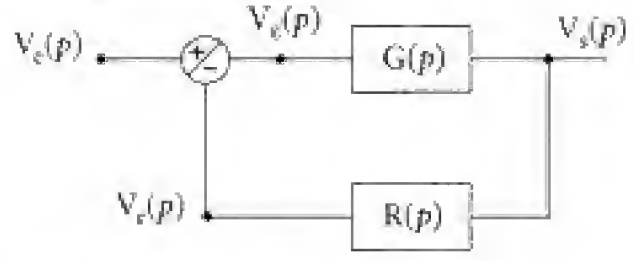
d'où : $a_{11} = \dfrac{1}{R' + \underline{Z'}}$ et $a_{21} = \dfrac{\underline{Z'}}{R' + \underline{Z'}} = \dfrac{1}{R'\underline{Y'} + 1}$, $\left(\underline{Y'} = \dfrac{1}{\underline{Z'}}\right)$.

• Deuxième état : sortie court-circuitée ($v = 0$)

Dès lors : $\underline{i} = \underline{i'} = \dfrac{\underline{v'}}{R'}$; or : $\begin{cases} \underline{i'} = a_{11}\underline{v'} + a_{12}\underline{i} \\ 0 = a_{21}\underline{v'} + a_{22}\underline{i} \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} 1 = a_{11}R' + a_{12} \\ 0 = a_{21}R' + a_{22} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_{12} = \dfrac{\underline{Z'}}{R' + \underline{Z'}} = \dfrac{1}{1 + R'\underline{Y'}} = a_{21} \\ a_{22} = -\dfrac{R'}{R'\underline{Y'} + 1} \end{matrix} \qquad \text{Soit : } (a_{ij}) = \frac{1}{1 + R'\underline{Y'}} \begin{bmatrix} \underline{Y'} & 1 \\ \underline{1} & -R' \end{bmatrix}.$$

1. b. Le schéma fonctionnel devient (fig. 7) :



Donc $\left.\begin{matrix} V_s(p) = G(p)V_\varepsilon(p) \\ V_\varepsilon(p) = V_e(p) - V_r(p) \\ V_r(p) = R(p)V_s(p) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{V_s(p)}{G(p)} = V_e(p) - R(p)V_s(p)$

et finalement :

$$\boxed{H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)R(p)}} \quad (3)$$

Commentaire

Il s'agit là du résultat classique des systèmes bouclés pour lesquels la chaîne de retour ne « charge » ni l'entrée, ni la sortie de l'opérateur de chaîne directe : ceci est dû au caractère supposé idéal de l'opérateur non inverseur (impédance d'entrée infinie ($i_+ = 0$) et impédance de sortie nulle).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Il s'agit de l'équation du type oscillateur harmonique amorti pour lequel mathématiquement, $\lim_{t \to +\infty} u = 0$, ce qui démontre l'existence de l'instant t_1. Le système repasse alors en régime linéaire, $v_s(t)$ commutant de la valeur $+V_{sat}$ à la valeur $-V_{sat}$ selon l'équation différentielle (4), l'état $-V_{sat}$ étant à son tour instable… d'où les oscillations.

Commentaire

Examinons l'évolution de $u(t)$ et $i(t)$ pour $t > t_0$. Nous avons :

$$u(t_0^+) = u(t_0^-) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = \frac{V_{sat}}{G_0} = u_0$$

$$i(t_0^-) = \frac{1}{R'}(u(t_0^-) - V_{sat}) = -\frac{R_2}{R'(R_1 + R_2)} V_{sat} = -i_0.$$

D'autre part, u est continue (présence de C) $\Rightarrow u(t_0^+) = u(t_0^-) = u_0$ donc i est continu $\left(i = \frac{1}{R'}(u - v_s)\right)$ ainsi que $i_R = \frac{u}{R}$. De plus i_L est continu (inductance L).

Il en résulte que $i_C = i - i_L - i_R$ est continu, ce qui assure la continuité de $\frac{du}{dt}$ $\left(i_C = C\frac{du}{dt}\right)$.

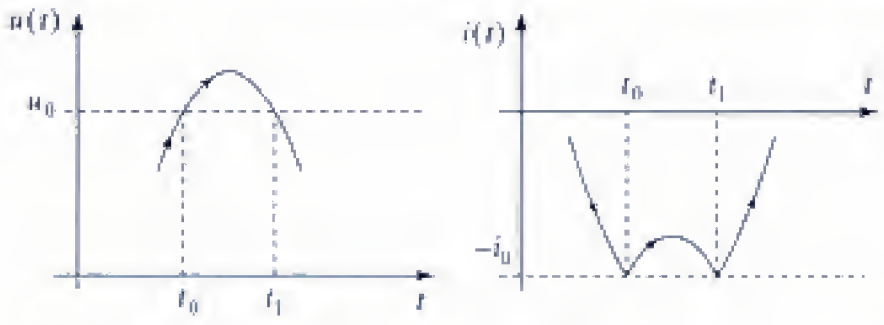
Par contre, $\frac{di}{dt}$ est discontinue :

- $t < t_0$ $\left.\begin{array}{l} i = \frac{1}{R'}(u - v_s) \\ v_s = G_0 u \end{array}\right\} i = \frac{1}{R'}u\left(1 - 1 - \frac{R_2}{R_1}\right) = -\frac{R_2}{R'R_1}u \Rightarrow \left(\frac{di}{dt}\right)_{t_0^-} = -\frac{R_2}{R'R_1}\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0^-}$;

- $t > t_0$ $i = \frac{1}{R'}(u - V_{sat}) \Rightarrow \left(\frac{di}{dt}\right)_{t_0^+} = \frac{1}{R'}\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0^+}$

$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0^-} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0^+} \Rightarrow \left(\frac{di}{dt}\right)_{t_0^-} \neq \left(\frac{di}{dt}\right)_{t_0^+}$.

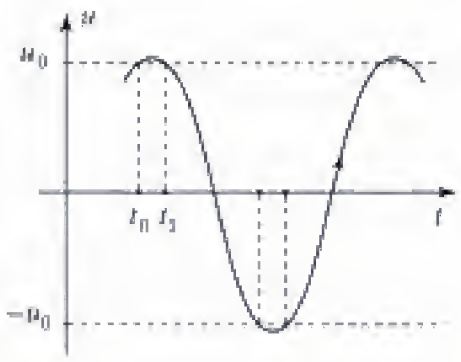
Les évolutions de $u(t)$ et $i(t)$ pour $t > t_0$ ont donc l'allure des diagrammes ci-dessous :

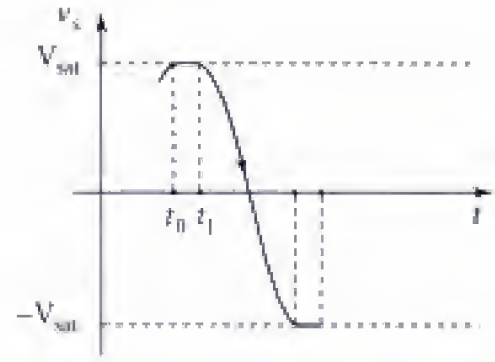


$u(t)$ finira par passer par la valeur u_0 (instant t_1), valeur pour laquelle l'amplificateur opérationnel retourne en régime linéaire. L'évolution de $u(t)$ et de $v_s(t)$ pour $t > t_1$ est alors redonnée par l'équation différentielle (4) (en régime linéaire, on a en effet : $u = v_+ = v_- = \frac{v_s}{G_0}$).

Il en résulte que $v_s(t)$ va diminuer continûment jusqu'à $-V_{sat}$ (et $u(t)$ jusqu'à $-u_0$)…

Copyright protected material



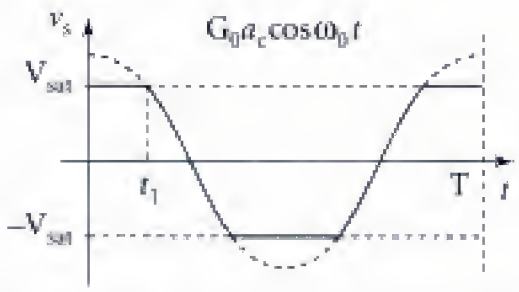


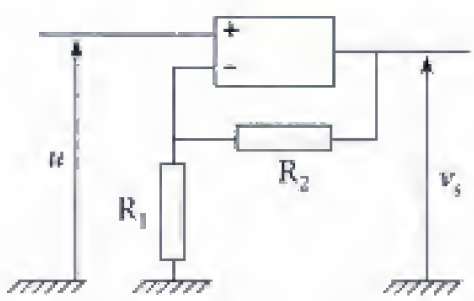
3. a. Pour G_0, $A_0 > 1$, le système est le siège d'oscillations. L'opérateur $[B_2]$ joue alors le rôle de filtre « sélectif » pour lequel :

$$\left.\begin{aligned} \left|\underline{R}\right|_{\omega=\omega_0} &= A_0 \\ \left|\underline{R}\right|_{\omega=2\omega_0} &= A_0 \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \frac{\left|\underline{R}\right|_{2\omega_0}}{\left|\underline{R}\right|_{\omega_0}} \# 9\cdot 10^{-2}.$$

De plus : $\dfrac{1}{4Q^2}(1-G_0A_0)^2 \# 5\cdot 10^{-3}(1-G_0A_0)^2 \ll 1$ … de sorte que $\omega^* = \omega_0$.

Tout se passe comme si l'opérateur $[B_1]$ était attaqué par un signal sinusoïdal $-v_r = u = a_c\cos\omega_0 t$; le signal de sortie v_s est alors en général non sinusoïdal mais périodique (période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$).





On peut décomposer $v_s(t)$ en série de Fourier : $v_s(t) = a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + \cdots$

L'opérateur de chaîne de retour (filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_0 et de facteur de qualité Q « important ») en isole – en première approximation – le fondamental, ce qui redonne la tension u, soit :

$$u = a_c\cos\omega_0 t = A_0\cdot(a_1\cos\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{a_c = A_0a_1} \quad (6)$$

D'autre part, l'amplitude a_1 du fondamental associé au signal $v_s(t)$ est donnée par :

$$a_1 = \frac{2V_{sat}}{\pi}\left[\sin\omega_0 t_1 + \frac{\left[\frac{\pi}{2}-\omega_0 t_1\right]}{\cos\omega_0 t_1}\right] \text{ avec } \left.\begin{aligned} \omega_0 t_1 &= \arccos\left(\frac{V_{sat}}{G_0 a_c}\right) \\ 0 < \omega_0 t_1 &< \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Copyrighted material

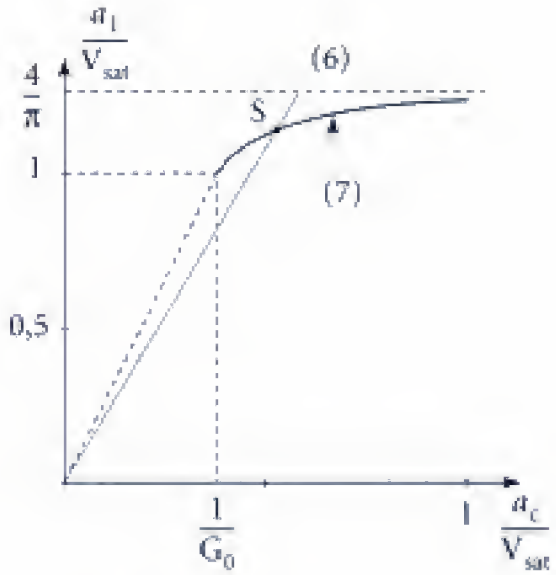
D'où les courbes :

avec $G_0 A_0 > 1$ soit $\frac{1}{A_0} < G_0$

La solution graphique est donnée par le point S, intersection des deux courbes

$$\frac{a_1}{V_{sat}} = \frac{1}{A_0} \cdot \left(\frac{a_c}{V_{sat}}\right)$$

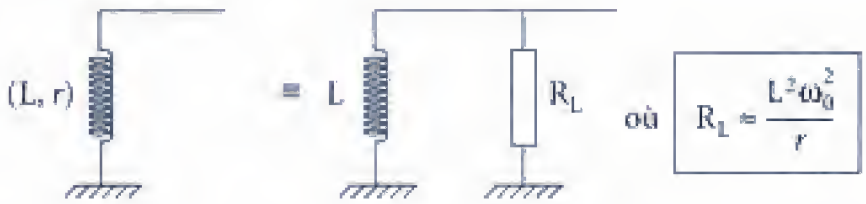
et $\frac{a_1}{V_{sat}} = f\left(\frac{a_c}{V_{sat}}\right)$ via (7).



3. b. En fait, l'énoncé nous invite à prendre en compte la résistance r de la bobine (résistance donnée pour la pulsation ω_0) :

$$\underline{Y_L} = \frac{1}{jL\omega_0 + r} = \frac{1}{jL\omega_0\left(1 + \frac{r}{jL\omega_0}\right)} \approx \frac{1}{jL\omega_0} \cdot \left(1 - \frac{r}{jL\omega_0}\right) \quad (r \ll L\omega_0)$$

$\underline{Y_L} \approx \frac{1}{jL\omega_0} + \frac{r}{L^2\omega_0^2}$. D'où :



où $\boxed{R_L \approx \frac{L^2\omega_0^2}{r}}$

A.N. : pour L = 50 mH, r = 7,5 Ω, C = 100 nF $\Rightarrow \frac{L^2\omega_0^2}{r} = \frac{L}{Cr} = 66{,}7\ k\Omega$.

Il suffit maintenant de remplacer – dans l'expression de A_0 – la résistance R par R // R_L, d'où :

$$\frac{1}{A_0} = 1 + \frac{R'}{R} \rightarrow \frac{1}{A'_0} = 1 + R'\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_L}\right).$$

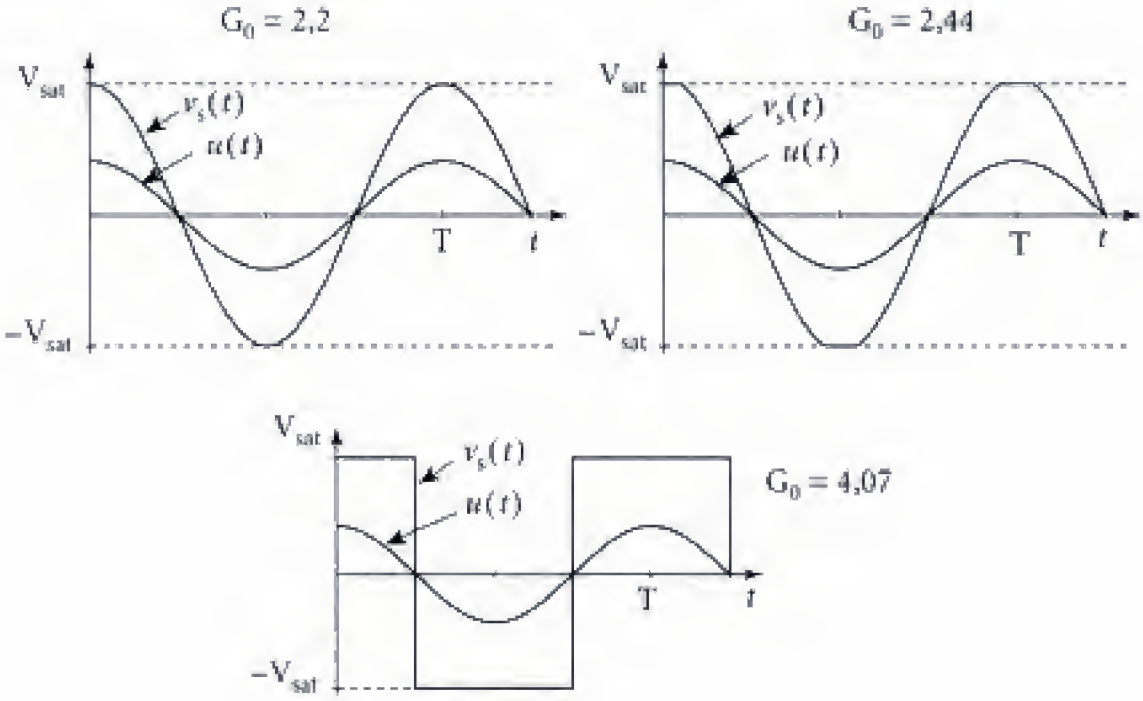
A.N. : $\frac{1}{A'_0} = 2{,}15$. Il faut donc résoudre :

$$\frac{a_1}{V_{sat}} = \boxed{\frac{1}{A'_0} \cdot \left(\frac{a_c}{V_{sat}}\right) = f\left(\frac{a_c}{V_{sat}}\right)}$$

R_1(kΩ)	R_2(kΩ)	$G_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$	a_c (volt) (théorique)	a_c (volt) (expérience)
4,88	6,12	$G_{01} = 2{,}25$	6,45	6,4
4,23	6,77	$G_{02} = 2{,}60$	6,95	7,0
2,55	8,45	$G_{03} = 4{,}31$	7,48	7,5

Copyright material

De plus T (théorique) = $\frac{2\pi}{\omega_0}$ = 0,44 ms. L'accord entre valeurs expérimentales et valeurs théoriques est satisfaisant. On peut également remarquer que pour un gain G_0 suffisamment élevé de l'opérateur $[B_1]$, la tension $v_c = u(t)$ possède une amplitude qui plafonne à une valeur proche de $\frac{4V_{sat}}{\pi} \cdot A_0' = 7{,}64$ volt.



203 Oscillateur à relaxation

L'amplificateur opérationnel est idéal.

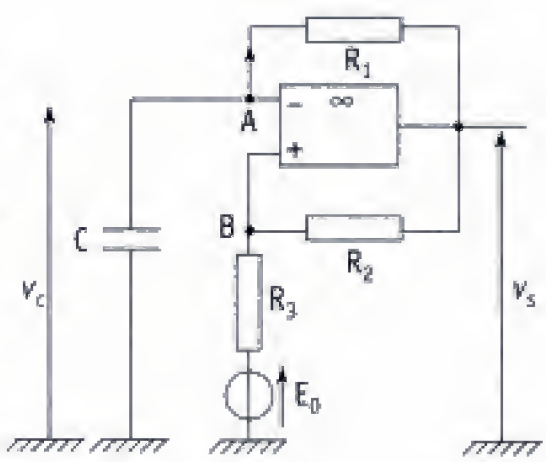
1. a. Montrer que l'A.O. fonctionne nécessairement à saturation. On note :

$$V_{sat}^{+} = +V_{sat} \quad \text{et} \quad V_{sat}^{-} = -V_{sat}.$$

b. Déterminer, en régime établi, les tensions $v_s(t)$ et $v_c(t)$.

On pose : $V_0 = \frac{1}{R_2 + R_3}(R_2 E_0 + R_3 V_{sat})$

et $V_0' = \frac{1}{R_2 + R_3}(R_2 E_0 - R_3 V_{sat})$



Copyrighted material

Hidden page

Nous avons $v_+ = \dfrac{\dfrac{E_0}{R_3} + \dfrac{v_s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_2}}$ (théorème de Millman en B avec $i_+ = 0$)

soit $$\boxed{v_s = \frac{1}{R_2 + R_3}(R_2 E_0 + R_3 v_s)} \quad (1)$$

De plus, le même courant traverse C et R_1 (car $i_- = 0$), ce qui s'écrit :

$$\frac{v_s - v_-}{R_1} = C\frac{dv_-}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_- + R_1 C\frac{dv_-}{dt} = v_s} \quad (2) \text{ avec de plus } v_- = v_c.$$

■ Montrons qu'un fonctionnement en régime linéaire conduirait de toute façon à une saturation de l'amplificateur opérationnel. En effet, dans ce cas $v_+ = v_-$ et :

$$v_s = \frac{1}{R_2 + R_3}(R_2 E_0 + R_3 v_s) + R_1 C\frac{R_3}{R_2 + R_3}\frac{dv_s}{dt}$$

d'où $$R_1 C + \frac{dv_s}{dt} - \frac{R_2}{R_3}v_s = -\frac{R_2}{R_3}E_0.$$

La solution de l'équation sans second membre est divergente. Elle implique donc la saturation de l'amplificateur opérationnel.

1. b. Considérons alors un état où l'amplificateur opérationnel est à saturation positive (une étude équivalente peut être faite avec un amplificateur opérationnel à saturation négative), c'est-à-dire un état pour lequel on aurait :

$$[v_s = V_{sat} > 0 \text{ avec } \varepsilon = v_+ - v_- > 0].$$

D'après l'équation (2), l'évolution de $v_-(t)$ est alors donnée par :

$$v_- + \tau\frac{dv_-}{dt} = V_{sat} \quad (\text{où } \tau = R_1 C),$$

ce qui montre que la tension $v_-(t)$ tend mathématiquement vers $+V_{sat}$ et $\varepsilon(t)$ vers ε_1 tel que :

$$\varepsilon_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_3}E_0 + \frac{R_2}{R_2 + R_3}V_{sat} - V_{sat}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_3}(E_0 - V_{sat}) \text{ grandeur négative (puisque } E_0 < V_{sat}).$$

Il existe donc une date t_0 pour laquelle $\varepsilon(t)$ passe par la valeur zéro. À cet instant, nous avons ($\varepsilon = 0 \Rightarrow v_-(t_0) = v_+(t_0)$) :

$$\boxed{v_-(t_0) = \frac{1}{R_2 + R_3}(R_2 E_0 + R_3 V_{sat}) = V_0}$$

et v_s passe à $-V_{sat}$ (commutation de l'amplificateur opérationnel).

Faisons alors $t = 0$ (**nouvelle origine des temps**). Dès lors :

$v_-(0^+) = V_0$ (il y a continuité de la charge du condensateur), $v_s(0^+) = -V_{sat}$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

204 Moteur à courant continu à vide puis en charge

Un moteur à courant continu est commandé par l'induit. Ce dernier, de résistance R et d'inductance L, est alimenté par une tension $U(t)$. Le rotor, de moment d'inertie J, présente un couple de frottement fluide $-f\Omega$, Ω désignant la vitesse angulaire de rotation. Le couple moteur Γ_m est proportionnel au courant i circulant dans l'induit :

$$\Gamma_m = \Phi_0 i.$$

1. Moteur à vide (sans charge) :

a. Donner les équations de fonctionnement.

En déduire la fonction de transfert $H(p)$ définie selon :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}.$$

Quelle est sa nature ?

b. On fait maintenant $f = 0$ et $L = 0$. Que devient le résultat précédent ? Commenter.

A.N. : $J = 2 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2 ; $R = 2\ \Omega$; $\Phi_0 = 0{,}1$ V · s.

Partant du repos ($\Omega = 0$), on soumet le moteur à un échelon de tension d'amplitude 10 V. Donner la vitesse limite Ω_l atteinte par le moteur. Déterminer la loi $\Omega(t)$.

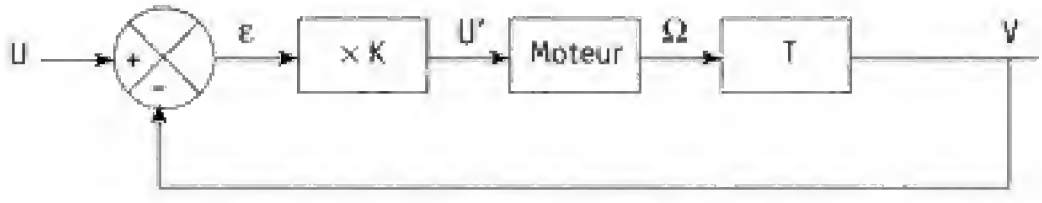
2. Moteur fonctionnant en charge :

Cette dernière est équivalente à un couple résistant constant $\Gamma_r = 0{,}1$ N · m. On fera $f = 0$ et $L = 0$.

a. Le moteur peut-il démarrer ? Quelle tension minimale U_{min} faut-il lui appliquer ? Calculer U_{min}.

b. On fait $U = U_0 = 10$ volt. Donner l'expression de la nouvelle vitesse angulaire limite Ω_l', ainsi que celle de $\Omega(t)$.

3. On modifie le système précédent de la façon suivante :



T est un opérateur qui, captant la vitesse angulaire de rotation du moteur, la transforme en la tension $V(t) = \phi_0\Omega(t)$. On a $\varepsilon = U(t) - V(t)$ et $U' = K\varepsilon(t)$.

a. On revient aux conditions du **1. b.** (moteur à vide : $\Gamma_r = 0$).

Déterminer la nouvelle fonction de transfert $H'(p)$. Commenter le résultat obtenu.

A.N. : on fait $K = 4$. Donner la valeur U_1 de la tension U pour que la vitesse limite garde la même valeur Ω_l.

b. Le moteur fonctionnant maintenant en charge ($\Gamma_r = 0{,}1$ N · m) et la tension $U(t)$ étant fixée à U_1, déterminer la nouvelle vitesse limite de rotation Ω_l''.

Commenter en précisant les avantages d'un tel système.

Copyright material

Solution

1. a. ■ D'un point de vue électrique, l'induit du moteur est équivalent au circuit représenté ci-contre.

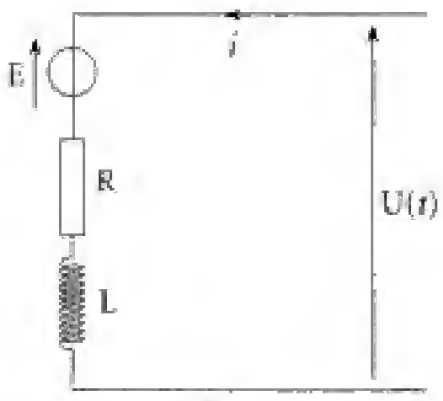


fig. 1

E est la force électromotrice du moteur associée à la rotation de l'induit dans le champ magnétique crée par l'inducteur.

Elle est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation Ω de l'induit par rapport à l'inducteur :

$$E = k\Omega.$$

La conversion électromécanique se traduit (avec des conventions algébriques convenables) par l'égalité de la puissance développée par les phénomènes électromoteurs ($P_{em} = Ei$) et de la puissance des forces de Laplace ($P_L = \Gamma_m \Omega$) :

$$\boxed{Ei = \Gamma_m \Omega}$$

Ainsi, pour $Ei > 0$, le moteur absorbe de la puissance électrique (le schéma électrique de la figure 1 correspond à une convention récepteur), et on a bien $\Gamma_m \Omega > 0$, ce qui assure un fonctionnement moteur.

Or $P_m = \phi_0 i \Rightarrow E = \phi_0 \Omega$ et $\boxed{k = \phi_0}$

L'équation électrique s'écrit alors : $U(t) = E + Ri + L\dfrac{di}{dt}$ (1)

■ L'équation mécanique s'obtient directement par application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = -f\Omega + \Gamma_m \quad (2)$$

Les équations demandées sont donc données par les égalités (1) et (2) auxquelles il faut ajouter : $E = \phi_0 \Omega$ et $\Gamma_m = \phi_0 i$.

On obtient donc :

$$\begin{cases} \phi_0 \Omega + Ri + L\dfrac{di}{dt} = U(t) \\ J\dfrac{d\Omega}{dt} + f\Omega = \phi_0 i \end{cases}$$

et en notation fonctionnelle $\left(\dfrac{d}{dt} \Leftrightarrow p\,\cdot\right)$: $\begin{cases} \phi_0 \Omega(p) + RI(p) + LpI(p) = U(p) \\ (Jp + f)\Omega(p) = \phi_0 I(p). \end{cases}$

Éliminons i entre ces deux équations :

$$U(p) = \phi_0 \Omega(p) + (R + Lp)\frac{(Jp + f)}{\phi_0}\Omega(p) = \left[\left(\phi_0 + \frac{Rf}{\phi_0}\right) + \left(\frac{RJ}{\phi_0} + \frac{Lf}{\phi_0}\right)p + \frac{LJ}{\phi_0}p^2\right]\Omega(p)$$

Copyrighted material

et $$\boxed{H(p) = \frac{1}{\left(\phi_0 + \frac{Rf}{\phi_0}\right) + \frac{1}{\phi_0}(RJ + LF)p + \frac{LJ}{\phi_0}p^2}}$$

Cette fonction de transfert est celle d'un **filtre passe-bas du second ordre**, de forme canonique :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{Q}\left(\frac{p}{\omega_0}\right) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

où $\omega_0^2 = \frac{\phi_0^2 + Rf}{LJ}$; $H_0 = \frac{\phi_0}{\phi_0^2 + Rf}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{RJ + LF}{\phi_0^2 + Rf}$.

1. b. Si l'on néglige le frottement fluide ($f = 0$) et l'inductance ($L = 0$), il vient :

$$H(p) = \frac{1}{\phi_0 + \frac{RJ}{\phi_0}p} \Rightarrow H(p) = \frac{\left(\frac{1}{\phi_0}\right)}{1 + \frac{RJ}{\phi_0^2}p}.$$

Posons alors $G_0 = \frac{1}{\phi_0}$ et $\tau = \frac{RJ}{\phi_0^2}$, nous obtenons : $\boxed{H(p) = \frac{G_0}{1 + \tau p}}$ (3)

Le système proposé se réduit alors à un **filtre passe-bas du premier ordre**, de gain G_0 (dans la bande « passante »), et de temps caractéristique τ (temps de réponse).

A.N. : $\tau = \frac{2 \times 2 \cdot 10^{-3}}{(0{,}1)^2} = 0{,}4$ s et $G_0 = \frac{1}{0{,}1} = 10\ s^{-1} \cdot V^{-1}$.

■ On soumet l'induit à un échelon de tension :

$U(t) = 0$ pour $t < 0$ et $U(t) = U_0 = 10$ volt pour $t > 0$.

En régime établi, le moteur tournera à la vitesse angulaire constante Ω_f telle que :

$$\boxed{\Omega_f = H(0)U_0 = G_0U_0} \quad (4)$$

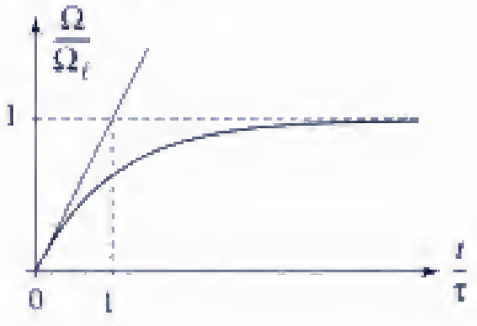
Cet état correspond ici à $i = 0$ et donc à $\Gamma_m = 0$, ce qui est normal puisque l'on a négligé le couple de frottement. L'équation différentielle régissant l'évolution de $\Omega(t)$ s'obtient à partir de : $(1 + \tau p)\Omega(p) = G_0U(p)$.

Soit $\Omega(t) + \tau\frac{d\Omega}{dt} = G_0U(t)$ d'où, pour $t > 0$, $\Omega(t) + \tau\frac{d\Omega}{dt} = G_0U_0$.

L'intégration de cette équation donne, avec $\Omega(0) = 0$:

$$\Omega(t) = G_0U_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

d'où : $\boxed{\Omega(t) = \Omega_f\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$



Copyrighted material

Hidden page

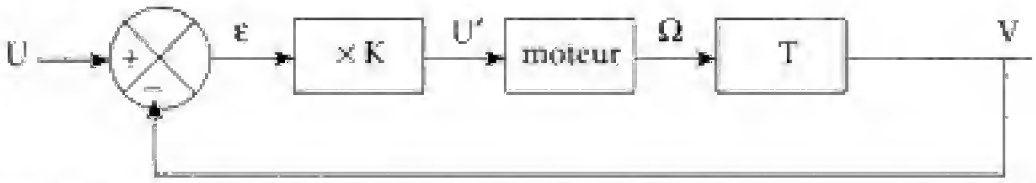
et une loi d'évolution semblable à celle obtenue au **1. b** :

$$\boxed{\Omega(t) = \Omega'_\ell \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$

A.N. : $\Omega'_\ell = \dfrac{1}{0{,}1} \cdot 10\left[1 - \dfrac{2}{10}\right] = 80 \Rightarrow \boldsymbol{\Omega'_\ell = 80\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} = 764\ \text{tours} \cdot \text{min}^{-1}}$.

On a évidemment $\Omega'_\ell < \Omega_\ell$.

3. a. On réalise maintenant un système en boucle fermée :



T est un transducteur transformant la grandeur Ω (vitesse de rotation du moteur) en une tension V proportionnelle à Ω, le coefficient de proportionnalité étant ajusté à ϕ_0 :

$$V = \phi_0 \Omega \quad \text{(V s'identifie à E)}.$$

On a réalisé ici un **retour unitaire** (la tension V est directement appliquée sur « l'opérateur de différence ») donc :

$$(6)\quad \begin{cases} \varepsilon(t) = U(t) - V(t) = U(t) - \phi_0 \Omega(t) \\ U'(t) = K\varepsilon(t) \\ U'(t) = E(t) + Ri(t) = \phi_0 \Omega(t) + Ri(t) \quad (L = 0) \\ J\dfrac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m - \Gamma_r = \phi_0 i(t) - \Gamma_r \quad (f = 0) \end{cases}$$

On fait $\Gamma_r = 0$ (moteur à vide). D'où avec $H'(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$ et :

$$\begin{cases} Jp\Omega(p) = \phi_0 I(p) \\ \phi_0 \Omega(p) + RI(p) = K[U(p) - \phi_0 \Omega(p)] \end{cases}$$

d'où $\left[\left(\phi_0 + \dfrac{RJ}{\phi_0} p\right) + K\phi_0\right]\Omega(p) = KU(p)$ et $H'(p) = \dfrac{1}{\phi_0\left(1 + \dfrac{1}{K}\right) + \dfrac{RJ}{K\phi_0} p}$.

$$H'(p) = \frac{H'_0}{1 + \tau' p} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H'_0 = \dfrac{K}{1+K} H_0 \\ \tau' = \dfrac{RJ}{\phi_0^2} \dfrac{1}{1+K}. \end{cases}$$

Le système bouclé étudié ici présente un temps de réponse τ' plus faible que celui associé au moteur seul (ou au système en boucle ouverte). On a en effet :

$$\boxed{\tau' = \frac{\tau}{1+K}} \quad \left(\tau = \frac{RJ}{\phi_0^2}\right).$$

Copyrighted material

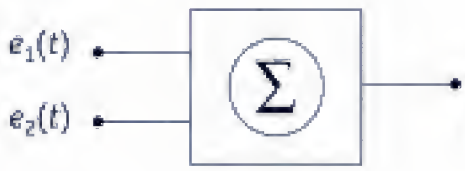
Hidden page

205 Oscillateur à fréquence commandée par une tension

On définit des opérateurs idéaux correspondant aux schémas blocs représentés ci-dessous :

a. Sommateur pondéré :

fig. 1



α_1 et α_2 sont des réels

b. Intégrateur :

fig. 2

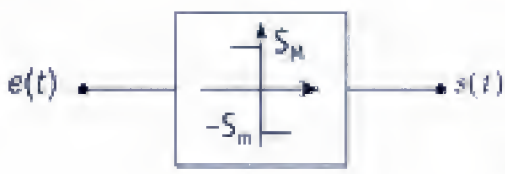
$s(t) = \beta\int_0^t e(x)dx + s(0)$

β est un réel négatif.

(On pourra poser : $\beta = -\frac{1}{\tau}$)

c. Comparateur à zéro :

fig. 3

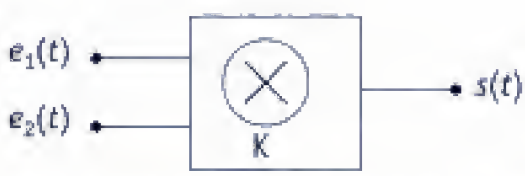


$$\begin{cases} s(t) = S_M \text{ pour } e(t) < 0 \\ s(t) = -S_m \text{ pour } e(t) > 0 \end{cases}$$

(S_M et S_m sont positifs)

d. Multiplieur :

fig. 4

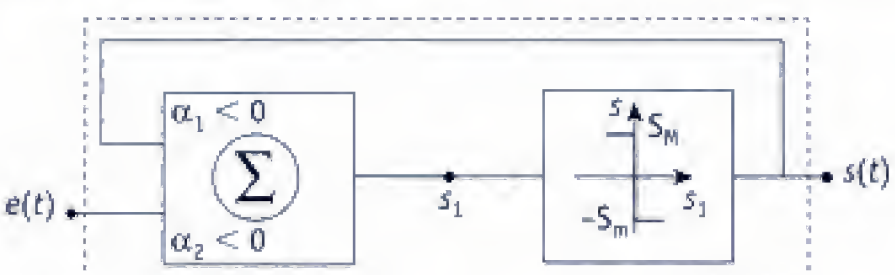


$s(t) = \frac{e_1(t) \cdot e_2(t)}{K}$

(K constante positive)

1. On associe les opérateurs « sommateur » et « comparateur » de la façon suivante (le sommateur fonctionne en régime linéaire).

fig. 5



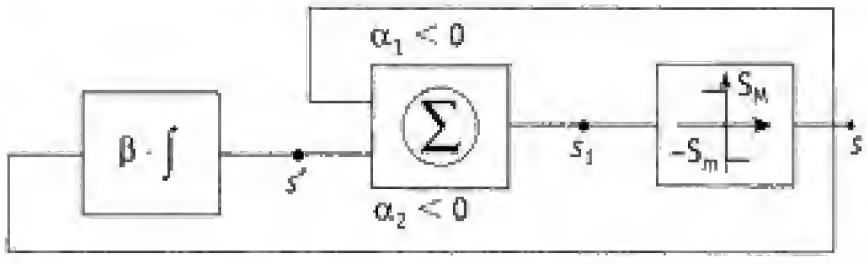
a. Déterminer les caractéristiques $s = f(e)$ et $s_1 = g(e)$ de ce montage.

Copyrighted material

b. On prend $e(t) = e_0 \cos \omega t$ (e_0 grandeur positive). Donner l'allure de $s(t)$ et $s_1(t)$. Dans cette question, on supposera que $S_M = S_m = S_0$.

2. On adjoint au montage précédent un « intégrateur » selon le schéma bloc suivant : ($\beta = -\frac{1}{\tau}$ et $\tau > 0$; l'intégrateur fonctionne comme le sommateur en régime linéaire).

fig. 6

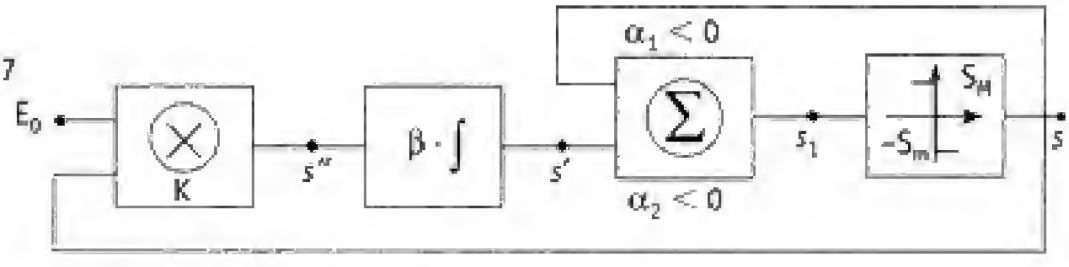


Étudier les évolutions de $s(t)$ et $s'(t)$.

En déduire que ce système constitue un oscillateur (oscillateur à relaxation) dont on donnera la période T et le rapport cyclique η (η = durée, sur un intervalle d'une période, pendant laquelle s vaut $-S_m$, divisée par T).

3. On complète le montage du **2.** à l'aide d'un multiplieur placé en amont de l'intégrateur (E_0 est une tension constante) :

fig. 7



a. Quel signe doit avoir E_0 pour que le système puisse être le siège d'oscillations ?

b. Comment varie la fréquence de ces oscillations avec E_0 ? E_0 influe-t-il sur le rapport cyclique ? Conclusion.

4. Proposer une réalisation expérimentale des montages envisagés au **2.** et **3.**

(On ne se préoccupera pas de la réalisation du multiplieur).

On impose : $S_m = S_M = 13$ V ; $\alpha_1 = -\frac{1}{10}$, $\alpha_2 = -1$; $\tau = 10^{-2}$ s ; $K = 10$ V.

Calculer les valeurs de la période T et du rapport cyclique η (pour le **3.**, on prendra de plus $E_0 = 5$ V).

Solution

1. a. Le signal de sortie du « sommateur » est donné par (fonctionnement linéaire) :

$$s_1 = \alpha_1 s + \alpha_2 e \quad (1)$$

D'autre part, la caractéristique entrée-sortie du « comparateur » est fournie par le diagramme de la figure 3 (le signal de sortie commute d'une valeur S_M à une valeur $-S_m$ lorsque la grandeur s_1 passe, en augmentant, par la valeur nulle...).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Or $e_{01} = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}S_M$ et $e_{02} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}S_m$, d'où : $T = \tau\left(\dfrac{1}{S_m} + \dfrac{1}{S_M}\right)\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}(S_m + S_M)$

soit $$\boxed{T = \tau\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{(S_M + S_m)^2}{S_M S_m}}$$

de plus : $\eta = \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{t_1}{T} = \dfrac{\dfrac{\tau}{S_m}(e_{02} - e_{01})}{\tau\left(\dfrac{1}{S_m} + \dfrac{1}{S_M}\right)(e_{02} - e_{01})}$ d'où : $\boxed{\eta = \dfrac{S_M}{S_m + S_M}}$

Commentaire

Le rapport cyclique ne dépend que des niveaux de sortie du comparateur. Il est notamment indépendant des coefficients α_1 et α_2 ; alors que la période T en dépend (T proportionnelle à $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ...).

3. a. Le « multiplieur » restitue en sortie le signal : $s''(t) = \dfrac{1}{K}E_0 s(t)$, avec $K > 0$; et c'est le signal $s''(t)$ qui va attaquer l'intégrateur.

Le fonctionnement du système sera qualitativement équivalent au précédent si le « multiplieur » conserve le signe de $s(t)$, ce qui impose $E_0 > 0$.

3. b. Quantitativement, nous aurons (état de départ « D » $\leftrightarrow t = 0$) :

• $s = -S_m$ et $s'' = -\dfrac{E_0 S_m}{K}$ soit $s'(t) = \dfrac{E_0 S_m}{K}t + e_{01}$ pour $0 < t < t_1$,

avec $t_1 = \dfrac{\tau K}{S_m E_0}(e_{02} - e_{01})$;

• $s = S_M$ et $s'' = \dfrac{E_0 S_M}{K}$, soit $s'(t) = -\dfrac{E_0 S_m}{K}(t - t_1) + e_{02}$ pour $t_1 < t < t_2$,

avec $t_2 - t_1 = \dfrac{\tau K}{S_M E_0}(e_{02} - e_{01})$.

La période est alors donnée par l'expression :

$$\boxed{T' = \tau\frac{K}{E_0}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{(S_M + S_m)^2}{S_M S_m}}$$

soit une fréquence : $$\nu' = \frac{E_0}{\tau}\frac{\alpha_2}{\alpha_1 K}\frac{S_M S_m}{(S_M + S_m)^2}.$$

Conclusions :

• La fréquence d'oscillation du système est proportionnelle au signal positif E_0. On a ainsi réalisé un oscillateur à relaxation de fréquence commandée par la tension E_0.

• t_1 et t_2 sont inversement proportionnels à $\dfrac{E_0}{K}$, de telle sorte que le rapport cyclique $\eta = \dfrac{t_1}{t_2}$ n'est pas modifié.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

La tension d'entrée du dispositif est maintenant la tension modulée en amplitude $e_1(t) = E_1(1 + m\cos\Omega t)\sin(\omega_0 t + \varphi_e)$.

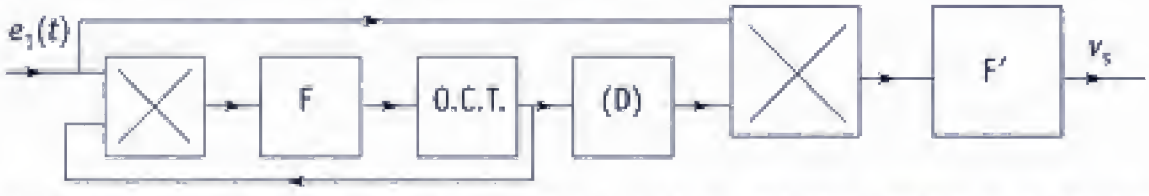
a. On suppose encore que :

- $\left|\frac{d\varphi_s}{dt}\right| < 2\pi f_c \ll \omega_0$;
- $\Omega < 2\pi f_c$;
- $|\varphi_e - \varphi_s|$ reste faible.

Déterminer alors l'expression approchée de la tension $u(t)$.

b. En utilisant l'expression précédente de $u(t)$, déterminer l'équation différentielle en $\varphi_1(t)$. Intégrer cette équation et en déduire l'expression de $r(t)$ après un temps suffisant.

c. Pour procéder à la démodulation, on peut compléter le schéma comme indiqué ci-après avec un second multiplieur, un second filtre passe-bas F' (dont on supposera le gain statique égal à l'unité) et un opérateur (D) :



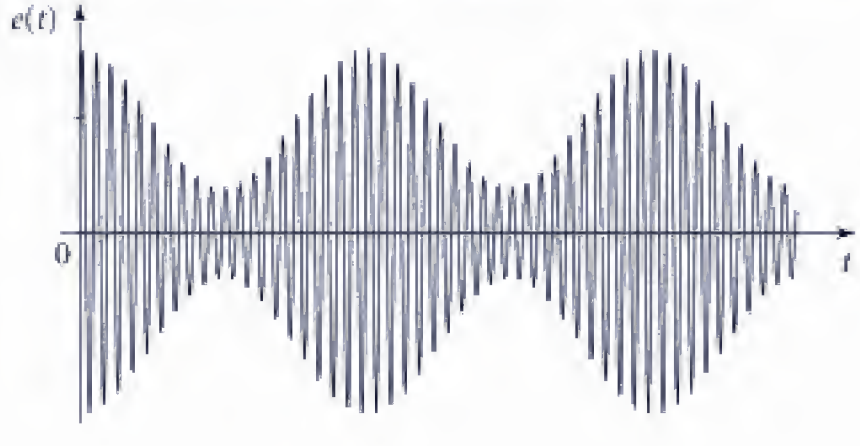
α) L'opérateur (D) est un opérateur de gain unité permettant d'opérer en aval une démodulation synchrone : de quel opérateur s'agit-il ?

β) Préciser la position nécessaire de la fréquence de coupure du filtre F' et donner alors l'expression de $v_s(t)$.

γ) Quelle dernière opération supplémentaire faut-il réaliser pour obtenir un signal proportionnel au signal modulant $M\cos\Omega t$?

Solution

1. a. Comme $\Omega \ll \omega_0$, on peut considérer le signal $e_1(t)$ comme approximativement sinusoïdal de pulsation ω_0 et d'amplitude $|E_1(1 + m\cos\Omega t)|$ lentement variable. Il apparaît alors que l'amplitude du signal $e_1(t)$ varie au cours du temps comme le signal modulant : on peut alors parler de modulation d'amplitude.



Copyrighted material

Hidden page

Le premier terme de pulsation proche de $2\omega_0$ est éliminé par le filtre.

Le second terme de pulsation $\left|\frac{d\varphi_s}{dt}\right|$ passe à travers le filtre.

Les troisième et quatrième termes de pulsations proches de $2\omega_0$ sont éliminés.

Les deux derniers termes de faible pulsation passent à travers le filtre.

En sortie du filtre, la tension sera donc :

$\frac{1}{2}kE_1R\left[\sin(\varphi_e - \varphi_s) + m\cos\Omega t\sin(\varphi_e - \varphi_s)\right]$ soit, sensiblement :

$$\boxed{u(t) \approx \frac{1}{2}kE_1R(1 + m\cos\Omega t)(\varphi_e - \varphi_s)}$$

3. b. La pulsation du signal de sortie de l'oscillateur contrôlé en tension est :

$\omega(t) = \omega_0 + k_0u(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi_s}{dt}$. Donc : $\boxed{\frac{d\varphi_s}{dt} = \frac{1}{2}kk_0E_1R(1 + m\cos\Omega t)(\varphi_e - \varphi_s)}$

Cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\frac{1}{\varphi_s - \varphi_e}\frac{d}{dt}(\varphi_s - \varphi_e) = \left(-\frac{1}{2}kk_0E_1R\right)(1 + m\cos\Omega t)$$

et s'intègre : $\boxed{\varphi_s - \varphi_e = (\varphi_s(0) - \varphi_e)\exp\left[-\frac{1}{2}kk_0E_1R\left(t + \frac{m}{\Omega}\cos\Omega t\right)\right]}$

Il apparaît donc qu'après un temps suffisant $\varphi_s(t) = \phi_e$ donc $\boxed{r(t) = R\cos(\omega_0 t + \varphi_e)}$

À un déphasage près, le signal de sortie de l'oscillateur correspond à la porteuse.

3. c. α) Pour réaliser la démodulation synchrone, il faut disposer d'un signal proportionnel à la porteuse (sans déphasage). Il faut donc utiliser par exemple un passe-tout déphaseur dont le déphasage a été réglé à $-\frac{\pi}{2}$. Ainsi, en sortie de l'opérateur (D) le signal est : $R\cos\left(\omega_0 t + \varphi_e - \frac{\pi}{2}\right) = R\sin(\omega_0 t + \varphi_e)$.

3. c. β) À la sortie du multiplieur, le signal est :

$$kE_1R(1 + m\cos\Omega t)\sin^2(\omega_0 t + \varphi_e) = \frac{1}{2}kE_1R(1 + m\cos\Omega t)(1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_e)).$$

Si la fréquence de coupure du filtre F′ est très supérieure à $\frac{\Omega}{2\pi}$ et très inférieure à $\frac{2\omega_0}{2\pi}$, alors le signal de sortie est : $\boxed{v_s(t) = \frac{1}{2}kE_1R(1 + m\cos\Omega t)}$

(car les autres termes sont de pulsations proches de $2\omega_0$ donc éliminés par le filtrage).

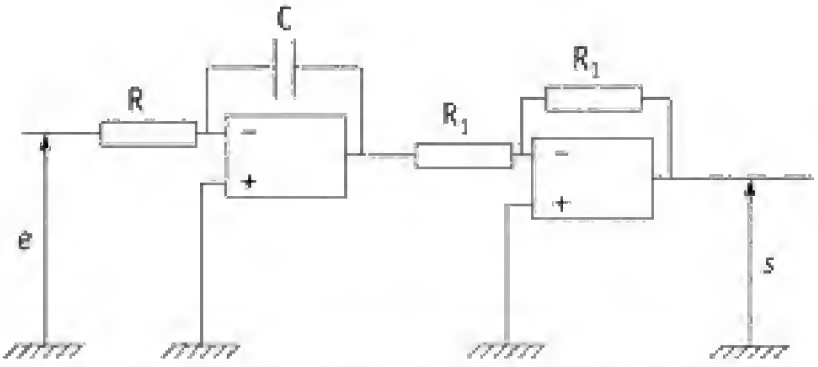
3. c. γ) Pour terminer, il faut supprimer la composante continue dans $v_s(t)$, ceci peut s'opérer avec un filtre passe-haut de fréquence de coupure notablement inférieure à $\frac{\Omega}{2\pi}$ ou, ce qui revient au même, avec un simple condensateur.

Copyrighted material

207 Intégrateur numérique – Numérisation d'un signal

Partie A

1.



Le montage représenté ci-dessus représente un intégrateur analogique (les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire).

Déterminer, en régime sinusoïdal établi, la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ (pulsation ω). On posera $\tau = RC$. Préciser les inconvénients d'un tel montage.

2. Pour réaliser une intégration numérique d'un signal $x(t)$, on commence par échantillonner $x(t)$ à une fréquence d'horloge f_H, ce qui fournit une suite de valeurs $x_n = x[t_0 + nT_H]$ (on prélève la valeur du signal $x(t)$ tous les $\Delta t = T_H$ à partir de l'instant t_0). L'intégrateur numérique fournit alors une suite de valeurs y_n définie par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{T_H}{2\tau}(x_n + x_{n-1}) \qquad n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_0 = 0.$$

a. Quels commentaires vous suggère cette expression ? Montrer que l'on peut ainsi « approcher » l'opération d'intégration.

b. On suppose maintenant que $x(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence f, soit en notation complexe : $\underline{x} = \underline{X_0}e^{j2\pi ft}$.

On considère alors que les y_n constituent une suite sinusoïdale telle que :

$$y_n = \text{Re}(\underline{y_n}) \quad \text{avec} \quad \underline{y_n} = \underline{Y_0}e^{j2\pi ft_n}.$$

Déterminer la fonction de transfert $\underline{H'}(j\omega) = \frac{\underline{Y_0}}{\underline{X_0}}$.

Montrer qu'elle s'identifie à celle calculée au **1.** pour $f \ll f_H$.

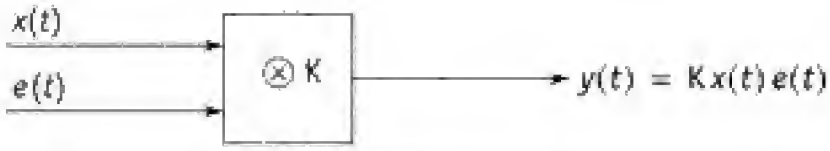
Quelle valeur maximale peut-on attribuer à f pour que l'intégrateur numérique puisse être « confondu » avec l'intégrateur analogique à moins de 1 % près ?

Partie B

1. Numérisation d'un signal analogique $x(t)$:

À cet effet, le signal $x(t)$ est traité selon le principe :

Copyrighted material



L'opérateur ⊗ K réalise l'opération multiplication des signaux $x(t)$ et $e(t)$ (K est une constante positive).

$e(t)$ est un signal périodique lié à une horloge lui imposant une période T_H. Ainsi :

$$\begin{cases} e = E_0 & \text{pour} \quad nT_H - \dfrac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant nT_H + \dfrac{\tau}{2} \\ e = 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

L'étude qui suit prend pour exemple un signal source sinusoïdal :

$$x(t) = a\sin\omega' t \quad \text{avec} \quad \omega' = 2\pi f'.$$

A.N. : $E_0 = 1$ V ; $a = 5$ V ; $T_H = 0{,}1$ ms ; $\tau = 10$ µs ; $f' = 1$ kHz ; $K = 2$.

b. Expliquer qualitativement comment s'effectue la numérisation du signal $x(t)$

a. Montrer que le signal de sortie $y(t)$ peut être considéré comme la superposition de composantes sinusoïdales.

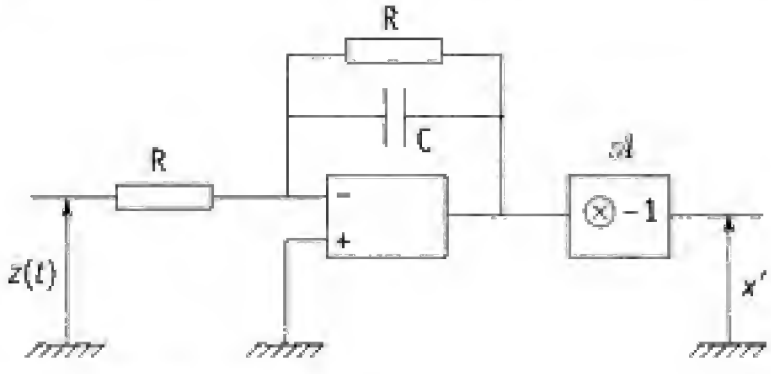
2. Restitution du signal source :

Le signal numérisé est transformé par un convertisseur numérique analogique (CNA) en un signal analogique $z(t)$ semblable au signal $y(t)$ étudié au **8. 1.** (On prendra $z(t) = y(t)$.) Pour récupérer le signal source $x(t)$, on réalise un filtrage du signal $z(t)$.

a. On considère, dans cette question, un filtre passe-bas idéal.

Montrer qu'un filtrage efficace nécessite une fréquence d'échantillonnage f_H supérieure à une valeur limite que l'on déterminera en fonction de f'.

b. On envisage d'utiliser le filtre passe-bas représenté ci-dessous ; $\mathcal{A}$ est l'opérateur multiplication par –1.



Déterminer sa fréquence de coupure f_c.

Est-il possible de choisir f_c pour que :

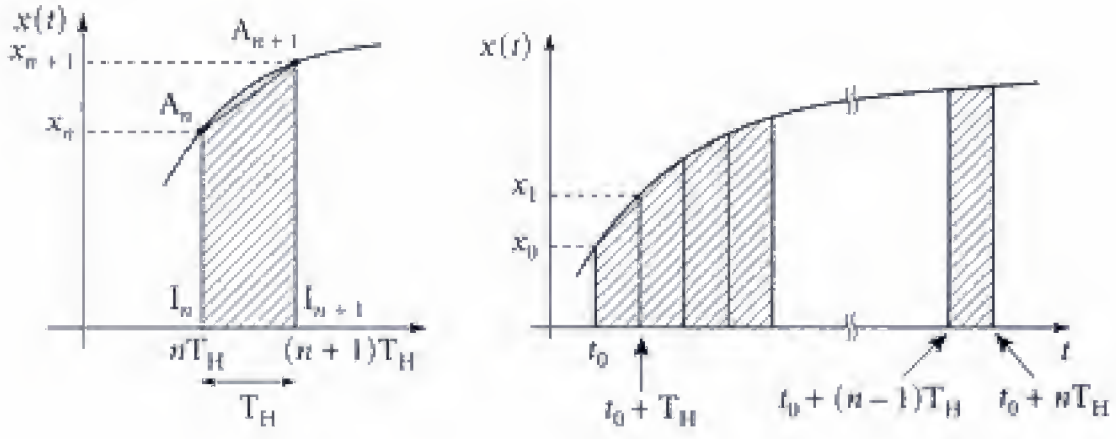
- la composante de fréquence la plus basse soit transmise quasi-intégralement avec un déphasage inférieur à 5° (en valeur absolue),

- et pour que la composante suivante soit atténuée de –20 dB ?

Commenter les résultats obtenus.

Copyrighted material

Hidden page



On a ainsi : $y_1 = y_0 + \dfrac{T_H}{2\tau}(x_1 + x_0) = \dfrac{1}{\tau}\mathcal{A}(0, 1)$ (avec $y_0 = 0$).

De même $y_2 = y_1 + \dfrac{1}{\tau}\mathcal{A}(1, 2)$ donc : $y_n = \dfrac{1}{\tau}[\mathcal{A}(0, 1) + \mathcal{A}(1, 2) + \cdots + \mathcal{A}(n-1, n)]$.

Ainsi y_n représente, au facteur multiplicatif près $\dfrac{1}{\tau}$, la somme des aires des trapèzes de « largeur $\Delta t = T_H$ » s'appuyant sur la courbe $x(t)$. Cette somme constitue une approximation de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des temps.

$$\sum_{0}^{n-1}\mathcal{A}(i, i+1) = \text{ approximation de } \left\{\int_{t_0}^{t} x(t')\mathrm{d}t'\right\} \text{ avec } t = t_0 + nT_H.$$

D'où : $y_n = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\sum_{0}^{n-1}\mathcal{A}(i, i+1) = \text{ approximation de } \left\{\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} x(t')\mathrm{d}t'\right\}$.

Commentaire

D'une autre manière, on peut écrire $y_n = y(t_0 + nT_H)$, soit :

$$\frac{y(t_0 + nT_H) - y(t_0 + (n-1)T_H)}{T_H} = \frac{1}{\tau}\left[\frac{x(t_0 + nT_H) + x(t_0 + (n-1)T_H)}{2}\right].$$

Et, en supposant que T_H reste très petit devant les temps caractéristiques associés aux variations des fonctions y et x, on peut confondre le premier membre avec la dérivée de y en t et le second avec $\dfrac{x(t)}{\tau}$, d'où : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{x(t)}{\tau} \Rightarrow y(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{x(t')\mathrm{d}t'}{\tau}$ pour $y(t_0) = 0$.

A. 2. c. $x(t)$ est désormais un signal sinusoïdal pour lequel : $\underline{x_n}(t) = \underline{X_0}e^{j2\pi f(t_0 + nT_H)}$.

De même, on pose $\underline{y_n} = \underline{Y_0}e^{j2\pi f(t_0 + nT_H)}$; on a donc d'après l'équation reliant les y_n aux x_n, relation caractéristique de l'intégrateur numérique (et après simplification par $e^{j2\pi f t_0}$) :

$$\underline{Y_0}\left[e^{j(2\pi f T_H)(n+1)} - e^{j2\pi f T_H n}\right] = \frac{T_H}{2\tau}\underline{X_0}\left[e^{j2\pi f T_H(n+1)} + e^{j2\pi f T_H n}\right].$$

Copyrighted material

Soit encore :

$$\underline{Y_0}(e^{j2\pi f T_H} - 1) = \frac{T_H}{2\tau}\underline{X_0}[e^{j2\pi f T_H} + 1].$$

Finalement :

$$\underline{Y_0}2j\sin(\pi f T_H) = \frac{T_H}{2\tau}\underline{X_0}2\cos(\pi f T_H).$$

Soit une fonction de transfert $\underline{H'} = \dfrac{\underline{Y_0}}{\underline{X_0}}$ définie par :

$$\boxed{\underline{H'} = \frac{T_H}{2\tau}\frac{1}{j\tan(\pi f T_H)}}$$

Pour $f \ll f_H$, nous avons :

$$\tan(\pi f T_H) = \tan\left(\pi\frac{f}{f_H}\right) \approx \pi\frac{f}{f_H}$$

et

$$\underline{H'} \approx \frac{T_H}{2\tau}\frac{1}{j\pi f T_H} \Rightarrow \underline{H'} \approx \frac{1}{j2\pi f\tau} = \frac{1}{j\omega\tau}.$$

Il s'agit bien de la fonction de transfert d'un intégrateur analogique idéal de constante de temps caractéristique τ.

■ Si l'inégalité n'est pas vérifiée, on peut tout de même remarquer que l'on retrouve le déphasage de l'intégrateur analogique pour $\tan(\pi f T_H) > 0$, c'est-à-dire notamment pour :

$$\pi f T_H < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{f_H > 2f}$$

On aura alors un bon intégrateur pour $|\underline{H'}|$ peu différent de $|\underline{H}|$. Il faut donc imposer :

$$\frac{|\underline{H}| - |\underline{H'}|}{|\underline{H}|} < 0{,}01.$$

D'où :

$$\frac{|\underline{H'}|}{|\underline{H}|} \ll 0{,}99 \Rightarrow \frac{\tan(\pi f T_H)}{\pi f T_H} \geqslant \frac{1}{0{,}99}.$$

Pour évaluer la valeur de la quantité $\pi f T_H$, faisons l'approximation suivante :

$$\tan(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}.$$

D'où à la limite :

$$1 + \frac{1}{3}(\pi f T_H)^2 = \frac{1}{0{,}99}$$

et

$$(\pi f T_H) = \sqrt{3\cdot\left(\frac{1}{0{,}99} - 1\right)} = 0{,}173.$$

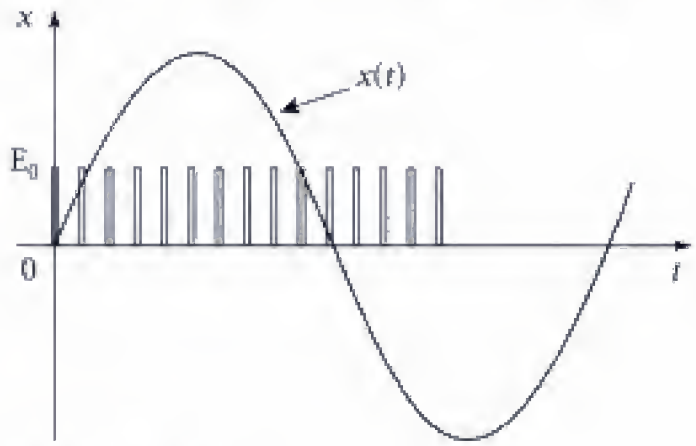
Soit :

$$f \leqslant \frac{0{,}173}{\pi} f_H \Rightarrow \boxed{f \leqslant 5{,}5\cdot 10^{-2} f_H}$$

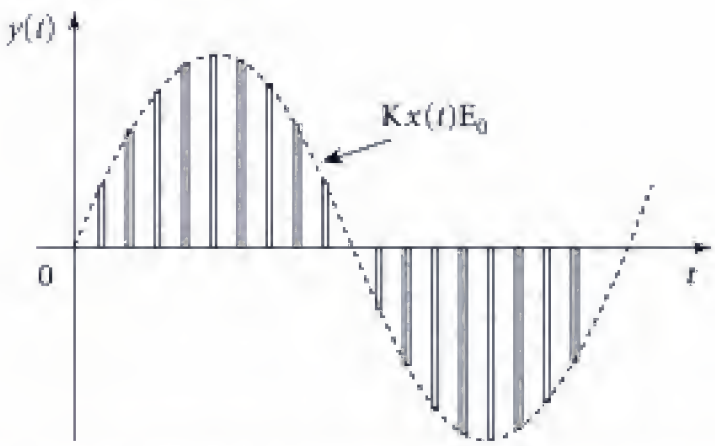
Copyright material

Partie B

B. 1. a. Représentons sur un même graphe les fonctions $x(t)$ et $e(t)$.
On a $f' = 1$ kHz soit $T' = 1$ ms ; $T_H = 0{,}1$ ms et $\tau = 10$ µs.



Le signal $y(t)$ prend alors la forme :



Le signal de sortie $y(t)$ est constitué d'une suite de valeurs $y_n = KE_0x(nT_H)$, en considérant que τ est suffisamment petit pour que $x(t)$ soit pratiquement constant sur les intervalles d'échantillonnage $\left[nT_H - \frac{\tau}{2}, nT_H + \frac{\tau}{2}\right]$.

Il suffit alors de traiter cette suite $\{y_n\}$ de valeurs analogiques par un convertisseur analogique numérique (CAN) qui associera le nombre binaire Y_n à la grandeur y_n.

B. 1. b. Le signal $e(t)$ périodique (période T_H) est décomposable en série de Fourier selon :

$$e(t) = A_0 + \sum A_n \cos(n\omega_H t) + B_n \sin(n\omega_H t) \quad \text{où} \quad \omega_H = \frac{2\pi}{T_H}.$$

A_0 représente la valeur moyenne de $e(t)$. Or, sur une période T_H, $e(t)$ est non nul sur une durée τ où il prend la valeur constante E_0. Il vient alors :

$$\langle e(t) \rangle = A_0 = E_0 \frac{\tau}{T_H}.$$

De plus, la fonction $e(t)$ est paire, ce qui impose $B_n = 0$ pour tout n.

Copyrighted material

Quant aux coefficients A_n, ils se calculent classiquement de la façon suivante ($n \geq 1$)

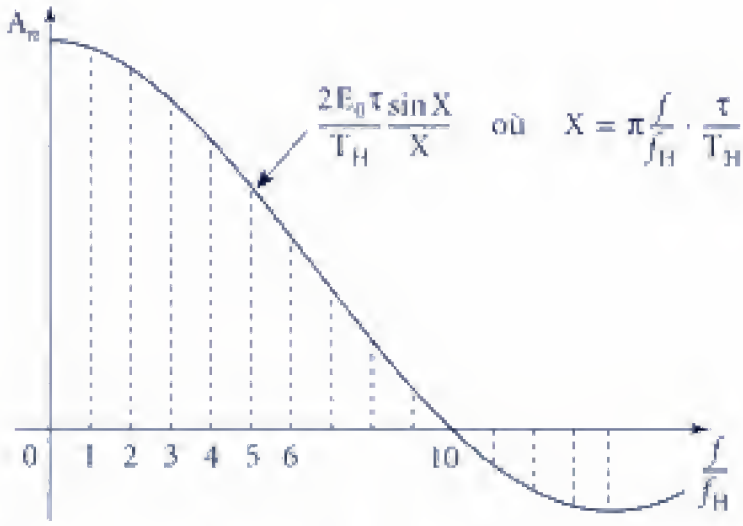
$$A_n = \frac{2}{T_H}\int_0^{T_H} e(t)\cos n\omega_H t\,dt.$$

Soit ici : $A_n = \frac{2}{T_H}2\int_0^{\frac{\tau}{2}} E_0 \cos n\omega_H t\,dt = \frac{4E_0}{T_H n\omega_H}\sin\left(2\pi n\frac{\tau}{2T_H}\right)$.

D'où : $A_n = \frac{2E_0}{n\pi}\sin\left(\pi n\frac{\tau}{T_H}\right)$.

Représentons la suite des A_n sur un même graphe (spectre du signal $e(t)$). On a :

$$A_n = \frac{2E_0\tau}{T_H}\frac{\sin\left(\frac{n\omega_H\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_H\tau}{2}\right)} \quad \text{avec } f_H = \frac{1}{T_H} = 10^4 \text{ Hz} \text{ et } \frac{1}{\tau} = 10^5 \text{ Hz}.$$



On a bien $\sin X = 0$ pour $\pi\frac{f}{f_H}\cdot\frac{\tau}{T_H} = p\pi$, soit :

$$\frac{f}{f_H} = p\frac{T_H}{\tau} = p\frac{10^{-4}}{10^{-5}} = p\cdot 10.$$

Le signal $y(t)$ devient alors ($y(t) = Kx(t)e(t)$) :

$$y(t) = Ka\sin\omega' t\cdot\left\{A_0 + \sum_1^{\infty} A_n\cos n\omega_H t\right\}$$

$$y(t) = KaA_0\sin\omega' t + Ka\sum_1^{\infty} A_n\cos n\omega_H t\sin\omega' t.$$

Or $\cos n\omega_H t\sin\omega' t = \frac{1}{2}\{\sin[(n\omega_H + \omega')t] - \sin[(n\omega_H - \omega')t]\}$.

Fsinalement, nous obtenons :

$$y(t) = KaA_0\sin\omega' t + \frac{Ka}{2}\sum_1^{\infty} A_n\{\sin[(n\omega_H + \omega')t] - \sin[(n\omega_H - \omega')t]\}.$$

Copyrighted material

Ce signal comprend :

– une composante de fréquence $f' = 1$ kHz et d'amplitude :

$$K\alpha A_0 = 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{10^{-5}}{10^{-4}} = 1 \text{ V} ;$$

– deux composantes ($n = 1$) de fréquences respectives $f_H - f'$ et $f_H + f'$ (9 et 11 kHz) et d'amplitudes $\frac{K\alpha}{2} A_1$, soit :

$$\frac{K\alpha}{2} A_1 = \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{\pi} \sin\left(\pi \frac{10^{-5}}{10^{-4}} \right) \right] = 0{,}98 \text{ V} ;$$

– puis les couples de fréquences $\{nf_H - f', nf_H + f'\}$ pour $n > 1$.

B. 2. Restitution du signal source :

B. 2. a. Un filtre passe-bas idéal, de fréquence de coupure f_c, sera caractérisé par une fonction de transfert :

$$\underline{H} = 1 \text{ pour } f \leqslant f_c \text{ et } \underline{H} = 0 \text{ pour } f > f_c.$$

Pour récupérer le signal $x(t)$, à un terme de proportionnalité près, il suffit de laisser passer la composante de la fréquence f' et d'arrêter les composantes de fréquences :

$$nf_H - f' \quad \text{et} \quad nf_H + f'.$$

On doit donc imposer :

$$f_c > f' \quad \text{et} \quad f_c < f_H - f'.$$

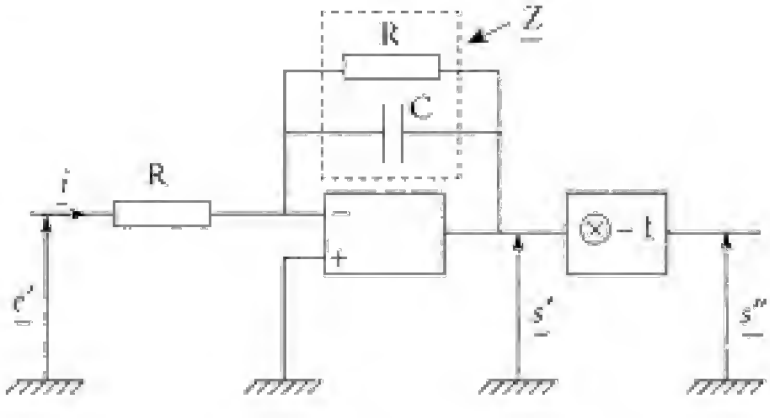
Soit encore $f' < f_c < f_H - f'$.

Cette double inégalité n'est possible que pour :

$$\boxed{f_H > 2f'} \quad (\text{ici } f_H > 2 \text{ kHz}).$$

Il faut donc que la fréquence d'échantillonnage f_H soit au moins égale au double de la fréquence f' du signal source.

B. 2. b. Filtrage :



Copyrighted material

Hidden page

Bréal, l'éditeur des prépas

En français

L'épreuve littéraire

En un seul volume, une préparation complète et efficace à l'épreuve littéraire des concours des Grandes Écoles scientifiques, sur le thème au programme : résumé et analyse des œuvres au programme, étude synthétique du thème, méthodologie des épreuves, traitement d'images et d'autres textes en lien avec le thème.

20 dissertations analysées et corrigées

Vingt dissertations autour du thème au programme, complétées par une méthodologie générale illustrée. Chaque sujet comprend une analyse de l'énoncé, un plan détaillé, ainsi qu'un corrigé rédigé et de nombreux commentaires.

Connaissance d'une œuvre

Les repères essentiels sur l'œuvre et son auteur, une analyse détaillée du texte et des principaux thèmes, des compléments utiles et des prolongements vers d'autres œuvres.

La philothèque

Cette collection permet de comprendre les enjeux philosophiques de l'œuvre étudiée et les concepts qu'elle véhicule. Chaque ouvrage comprend des éléments de lecture et d'analyse de l'œuvre dans son ensemble, le texte intégral d'une partie de l'œuvre et différents outils (vocabulaire, notions, etc.).

En langues

Journal'ease Vocabulaire, Journal'ease Exercices

Les 1300 mots nécessaires pour lire et comprendre la presse anglo-saxonne, ainsi que des exercices variés pour s'entraîner à utiliser le bon mot au bon moment, à l'oral comme à l'écrit. Des outils de travail efficaces pour préparer les concours et les examens.

Existe aussi en allemand (*Journ'allemand Vocabulaire et exercices*), en espagnol (*Journal'isimo Vocabulaire et exercices*) et en italien (*Journal'italien*).

Fort en thème - Fort en version

Des exercices de thème et de version, de difficulté progressive, pour s'entraîner à ces deux techniques de la traduction.

Titres disponibles en anglais, allemand et espagnol.

Retrouvez toutes les informations nécessaires sur ces titres et d'autres ouvrages pour les prépas sur notre site : www.editions-breal.fr

Copyrighted material

Copyrighted material

Titres disponibles en deuxième année dans la filière PSI...

En Mathématiques
Analyse PSI
Algèbre et géométrie PSI

En Chimie
Chimie PSI

Livres d'exercices
Mathématiques PC-PSI
Physique PSI

En Physique
Optique MP-PC-PSI-PT
Électromagnétisme PC-PSI
Physique des ondes PC-PSI
Thermodynamique PC-PSI
Mécanique des fluides PC-PSI
Électrotechnique PSI
Électronique PSI

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour s'entraîner efficacement et progresser tout au long de l'année.

- **Des exercices variés,** classés par thème et de difficulté progressive, couvrent la totalité du programme
- **Des solutions entièrement rédigées** détaillent l'ensemble des méthodes et des raisonnements à connaître en deuxième année.
- **De nombreux commentaires** enrichissent les corrigés d'astuces, de conseils et d'explications supplémentaires.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. . 209.0369
ISBN : 2 7495 0407 4
www.editions-breal.fr